

## معادلات انتگرال مرزی برای حل حوزه زمان و مدل سازی رتبه کاسته آیرودینامیک ناپایای بال های نازک

محمدی امین، میثم<sup>۱\*</sup>، قدیری، بهزاد<sup>۲</sup>، حدادپور، حسن<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکترا، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

۳- دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

(دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۰۳/۱۰)

### چکیده

در این تحقیق با استفاده از معادلات انتگرال مرزی به مطالعه آیرودینامیک ناپایای بال های نازک پرداخته شده است. هدف ایجاد بستر مناسب برای توسعه کاربرد روش اجزای مرزی به برخی ترکیب های برآزی نوین مانند بال های غشایی، بالزن و فرم پذیر که دارای ضخامت ناچیزند بوده است. برای این منظور روش اجزای مرزی آیرودینامیکی متداول که تنها قابلیت حل جریان حول اجسام ضخیم را دارد به گونه ای فرمول بندی و اصلاح می شود که برای بال های نازک نیز کاربردپذیر باشد. همچنین با توجه به قابل بیان بودن دستگاه معادلات اجزای مرزی در شکل مسأله مقدار ویژه به تحلیل ویژه جریان ناپایا حول بال های نازک و توسعه مدل های آیرودینامیکی رتبه کاسته بر اساس مودهای ویژه جریان پرداخته شده است. از روش اجزای مرزی توسعه یافته و مدل های رتبه کاسته مبتنی بر آن برای تحلیل آیرودینامیک حوزه زمان انواع ایرفویل و بال در چند نوع حرکت ناپایا استفاده شده است که نتایج حاصل تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی و عددی معتبر دارند.

واژه های کلیدی: معادلات انتگرال مرزی، روش اجزای مرزی، مدل سازی رتبه کاسته، آیرودینامیک ناپایا، آیرودینامیک بال نازک

### مقدمه

محاسبات مانند مدل سازی رتبه کاسته، روش چندقطبی سریع<sup>۳</sup> و مدل سازی فضای حالت نیز به هرچه کارآمدتر شدن حل مسأله با استفاده از روش اجزای مرزی کمک خواهد کرد. اما علی رغم تمام این مزایا روش اجزای مرزی متداول برای آیرودینامیک ناپایا که میانی آن پیشتر توسط مورینو و شاگردانش [۶-۸] توسعه یافته است، ذاتاً محدودیتی دارد که کاربرد آن را برای بال های نازک یا تخت غیرممکن می سازد. یک دلیل این محدودیت، نوع فرمول بندی و شکل انتگرال های مرزی است که مبنای توسعه روش اجزای مرزی قرار گرفته اند. نزدیکی بیش از حد نقاط هم مکانی به دلیل انطباق تقریبی المان های زیر و روی یک بال نازک محاسبات ضرایب تأثیر را با مشکل مواجه خواهد ساخت و مانع از بکارگیری این نوع روش اجزای مرزی برای هندسه های نازک می شود. همچنین اعمال شرط مرزی عدم نفوذ به صورت معمول مقدور نیست؛ زیرا نازک بودن هندسه الزام می کند در یک نقطه دو شرط مرزی

طی دو دهه اخیر روش های مبتنی بر معادلات انتگرال مرزی توسعه چشم گیری در زمینه های مختلف یافته اند و به طور گسترده در کاربردهای گوناگون هوافضایی از جمله تحلیل آیرودینامیک در رژیم های مختلف جریان به کار گرفته شده اند. از مشهورترین انواع این روش ها می توان به روش اجزای مرزی اشاره کرد که توسعه کاربرد و بهبود کارایی آن در حل مسائل مختلف مهندسی تاکنون مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. قابلیت حل جریان حول هندسه های نزدیک به ترکیب واقعی وسایل پرنده با هزینه به مراتب کمتر از رویکردهای محاسباتی دامنه مینا<sup>۱</sup> سبب شده است روش اجزای مرزی به ویژه در مسائل وابسته به زمان، مطالعات طراحی/بهینه سازی و تحلیل های کوپل یا چندوجهی<sup>۲</sup> مانند آیروالاستیسیته که محاسبات آیرودینامیک به دفعات نیاز می شود، مورد توجه قرار گیرد. قابلیت اعمال تکنیک هایی جهت کاهش بیشتر هزینه

رتبه‌کاسته آیرودینامیکی بر اساس روش اجزای مرزی ارائه شده با استفاده از مودهای ویژه جریان. در ادامه این نوشتار ابتدا به فرمول‌بندی معادلات انتگرال مرزی حاکم بر جریان پتانسیل ناپایا حول یک بال نازک پرداخته می‌شود. سپس روش اجزای مرزی برای حل عددی این معادلات انتگرال مرزی تشریح خواهد شد. نحوه تشکیل مسأله مقدار ویژه بر مبنای دستگاه معادلات اجزای مرزی و تحلیل ویژه آن در مرحله بعد ارائه می‌شود. پس از آن روند مدل‌سازی رتبه‌کاسته بر اساس مودهای ویژه جریان به‌طور خلاصه بیان می‌شود و سرانجام به ارائه نتایج حاصل از روش ابداع‌شده در این تحقیق در چند نوع حرکت ناپایای ایرفویل‌ها و بال‌های نازک و بحث درباره دقت و کارایی محاسبات در مقایسه با نتایج معتبر پرداخته می‌شود.

### معادلات انتگرال مرزی

در این بخش، فرمول‌بندی انتگرالی ابداع شده برای مسائل آیرودینامیک بال نازک و روش اجزای مرزی متناظر برای حل عددی این معادلات شرح داده خواهد شد. چنانچه پیشتر ذکر شد، هدف از این مقاله توسعه کاربرد روش اجزای مرزی متداول برای اجسام ضخیم به هندسه‌های با ضخامت اندک بوده است. طبقاً فرضیات حاکم بر معادلات و جریان حول بال نازک، مشابه مطالعات پیشین در زمینه اجسام ضخیم (از جمله مراجع [۲]، [۴]، [۶] و [۸]) در نظر گرفته شده که همگی مبتنی بر مدل جریان غیرلزج هستند. در واقع تا زمانی که زاویه حمله مؤثر کمتر از زاویه حمله متناظر با ضریب برآی بیشینه باشد و جدایش بر روی ایرفویل رخ ندهد، فرض جریان غیرلزج صحیح است. به‌علاوه با توجه به کاربرد مورد انتظار از روش ارائه شده یعنی آیرودینامیک خطی و ایروالاستیسیته خطی بال‌های نازک تحت حرکات نوسانی با دامنه تغییرات محدود، زاویه حمله مؤثر ناشی از حرکات ناپایا همواره در محدوده رفتار خطی ضرایب باقی می‌ماند و در نتیجه فرض جریان غیرلزج معتبر است. شایان توجه است که روش‌های کلاسیک مانند روش تئودورسون و واگنر برای بال‌های تخت نیز مبتنی بر فرض جریان غیرلزج هستند. بنابراین فرمول‌بندی انتگرال مرزی که در این بخش ارائه خواهد شد مبتنی بر فرضیات معمول برای جریان پتانسیل یعنی جریان غیرلزج، غیرچرخشی و تراکم‌ناپذیر می‌باشد. این فرضیات از نظر فیزیکی برای جریان‌های با رینولدز متوسط به بالا (بیش از  $10^4$ ) و در زوایای حمله کم قابل قبول هستند.

مختلف با توجه به جهات متفاوت بردار نرمال در زیر و روی بال داشته باشیم. از سوی دیگر کاربرد بال‌های با ضخامت اندک در صنایع هوافضا روزه‌روز گسترده‌تر می‌شود که نمونه‌هایی از آنها عبارت است از بالک موشک‌های کروز، هواپیماهای با بال فرم‌پذیر<sup>۴</sup>، روبات‌های بالزن<sup>۵</sup> و ریزپهپادهای بال‌غشایی<sup>۶</sup>. رویکردهای تحلیلی موجود برای محاسبه ضرایب آیرودینامیک بال‌های نازک مانند حل تئودورسون و تابع واگنر در حالت دوبعدی [۴] و تقریب جونز برای حالت سه‌بعدی [۱] محدود به هندسه‌های تخت و حرکات ناپایای ساده هستند. روندهای عددی مانند روش گردابه متمرکز<sup>۷</sup> در حالت دوبعدی و روش‌های حلقه/شبکه گردابه برای حالت سه‌بعدی [۴] نیز فاقد مزایای روش اجزای مرزی هستند. این مزایا عبارتند از: قابلیت توسعه فرمول‌بندی به رژیم‌های گذر صوت و زیر صوت [۱۲، ۱۷]، امکان به‌کارگیری برای هندسه‌های آیرودینامیکی پیچیده [۲۰، ۳۰] و تناسب فرمول‌بندی با طیف وسیعی از انواع تکنیک‌های کاهش ابعاد محاسبات مانند مدل‌سازی رتبه‌کاسته [۲۳، ۹-۱۱]، بیان فضای حالت و روش چندقطبی سریع [۵]. با توجه به توضیحات بالا در صورتی که بتوان با تمهیداتی در فرمول‌بندی، اعمال شرایط مرزی و نحوه اجرا، محدودیت به‌کارگیری روش اجزای مرزی در حل جریان حول بال‌های نازک را رفع کرد، دامنه کاربرد این روش بسیار وسیع‌تر شده و تمام انواع پیکره‌های آیرودینامیکی را در بر خواهد گرفت. به علاوه می‌توان بر اساس حل اجزای مرزی، مدل‌های رتبه‌کاسته کارآمد توسعه داد که به ویژه در مسائلی که محاسبات مکرر ضرایب یا نیروهای آیرودینامیکی نیاز است، جایگزین حل مستقیم اجزای مرزی شوند. این مدل‌ها مبتنی بر یک بیان مودال از میدان آیرودینامیکی و توصیف آن برحسب تعدادی از مودهای مؤثرند. از نظر مفهومی ساده‌ترین راه انتخاب چنین مجموعه‌ای، در نظر گرفتن مودهای ویژه جریان است که از تحلیل ویژه دستگاه معادلات برخی روش‌های عددی مانند روش اجزای مرزی به دست می‌آیند. با استفاده از یک مدل رتبه‌کاسته می‌توان ضرایب آیرودینامیکی ایرفویل یا بال را در حرکات مختلف ناپایا بدون نیاز به تکرار بخش عمده‌ای از محاسبات به سرعت و با دقت پیش‌بینی کرد. بنابراین نوآوری‌های پژوهش حاضر نسبت به تحقیقات پیشین عبارت است از: (۱) ارائه معادلات انتگرال مرزی برای حل اجزای مرزی جریان ناپایا حول بال‌های نازک در حوزه زمان و (۲) مدل‌سازی

این معادله، جریان ناپایا حول ایرفویل‌ها و بال‌های دارای ضخامت مورد تحلیل قرار گرفته است. روال به این صورت است که پس از گسسته‌سازی معادله (۳) بر اساس فرمول‌بندی اجزای مرزی از قبل معین، با اعمال شرط عدم نفوذ روی جسم، شرط کوتا در لبه فرار و به‌کارگیری تئوری کلوین روی دنباله، دستگاه معادلات جبری برای حل مجهولات توزیع پتانسیل روی جسم و اختلاف پتانسیل روی دنباله به‌دست می‌آید. چنانچه در مقدمه نیز اشاره شد اتخاذ این رویه برای بال‌های نازک بر اساس معادله (۳) بدون اعمال اصلاحاتی در معادلات انتگرالی و شرایط مکمل غیر ممکن است. در ادامه رویکرد اصلاح‌شده تشریح می‌شود.

برای ایجاد امکان استفاده از معادلات انتگرالی و روش اجزای مرزی برای حل جریان حول بال‌های نازک یا با ضخامت ناچیز ابتدا معادله (۳) برای بال ضخیم را در نظر می‌گیریم. با توجه به ضخامت ناچیز جسم، مشابه فرضی که برای دنباله صورت گرفت بال را نیز به شکل یک سطح ناپیوستگی در نظر می‌گیریم، با این تفاوت که بال بر خلاف دنباله، بار آیرودینامیکی تحمل می‌کند. سپس با توجه به شکل (۱) دو روی سطح بسته  $S'_B$  احاطه‌گر سطح  $S_B$  را بی‌نهایت به جسم نزدیک می‌کنیم. در این فرآیند،  $S'_B$  با دو روی سطح  $S_B$  یا اصطلاحاً سطح خیس بال جایگزین می‌شود. به‌طور مشابه با فرض جهت رو به بالا برای بردار نرمال  $n$  (۱ به ۲) در حالت حدی به‌دست می‌آید:

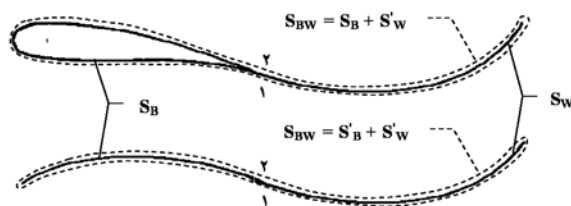
$$\iint_{S'_B} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (۴)$$

$$\iint_{S'_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_B} \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) G dS = 0 \quad (۵)$$

بنابراین، با توجه به معادلات (۴) و (۵)، معادله انتگرال مرزی (۳) برای جریان حول بال نازک به صورت زیر ساده می‌شود:

$$E(\mathbf{x}_*, t_*) \phi(\mathbf{x}_*, t_*) = - \iint_{S_B + S'_W} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (۶)$$

در معادله (۳) ضریب  $E$  برای نقاط خارج از مرز عدد یک است و برای نقاط روی مرز با حذف نقطه با یک دایره یا کره کوچک و تبدیل انتگرال مرزی بر اساس مقدار اصلی کوشی<sup>۱</sup> و رفع تکنیکی انتگرال‌ها روی این نقاط به‌دست می‌آید. در اینجا



شکل ۱ - تعریف سطوح انتگرال‌گیری برای معادله انتگرال مرزی در دو حالت بال ضخیم و نازک

چنانچه در تحقیقات پیشین مانند [۶] اشاره شده است برای دستیابی به بیان انتگرال مرزی گرین برای مسائل برآزا، باید معادله انتگرالی روی یک سطح  $S_{BW}$  تعریف شود که حجم جسم همچنین یک لایه نازک شامل سطح دنباله را احاطه کند (شکل ۱)؛ زیرا طبق مفروضات، این معادله درون حجم جسم و روی سطح دنباله معتبر نیست. در مورد بال‌های دارای ضخامت که روش اجزای مرزی برای حل جریان آیرودینامیک حول آنها پیش از این ارائه و استفاده شده است روال به این صورت است که تنها دو روی سطح بسته  $S'_W$  احاطه‌کننده سطح دنباله  $S_W$  را بی‌نهایت به هم نزدیک می‌کنند. در این فرآیند  $S'_W$  با دو روی سطح دنباله  $S_W$  جایگزین می‌شود. با فرض جهت رو به بالا برای بردار نرمال  $n$  (۱ به ۲) در حالت حدی به‌دست می‌آید:

$$\iint_{S'_W} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_W} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (۱)$$

که  $\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$  در حالی که با استفاده از تعریف دنباله برای جریان پتانسیل برآزا داریم،  $\Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = 0$  و در نتیجه:

$$\iint_{S'_W} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_W} \Delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) G dS = 0 \quad (۲)$$

بنابراین، معادله انتگرال مرزی برای پتانسیل اغتشاشی حول بال ضخیم به صورت زیر حاصل می‌شود [۶]:

$$E(\mathbf{x}_*, t_*) \phi(\mathbf{x}_*, t_*) = \iint_{S_B} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} G - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS - \iint_{S_W} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (۳)$$

که در آن  $S_B = S'_B$  سطح (بسته) جسم و  $S_W$  سطح (باز) دنباله است. در تحقیقات پیشین با استفاده از حل اجزای مرزی

### روش اجزای مرزی

برای حل عددی معادله انتگرال مرزی (۸) با استفاده از روش اجزای مرزی مستقیم می‌توان پس از گسسته‌سازی مرز جسم به اجزای دارای اختلاف پتانسیل ثابت در سطح المان و به کارگیری روش هم‌مکانی (نقطه هم‌مکانی در مرکز المان) به روابط زیر برای تشکیل دستگاه معادلات مرزی رسید:

$$\sum_{m=1}^{NB+NW} \Delta \phi_m C_{km} = \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}_k, \quad k = 1..NB \quad (9)$$

$$C_{km} = \left( \int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS \right) \cdot \mathbf{n}_m \quad \text{که}$$

ضرایب تأثیر هستند که می‌توانند به شکل تحلیلی یا عددی ارزیابی گردند (پیوست الف). در توسعه روابط بالا از فرض برابری مشتق جهت بردار نرمال در سراسر سطح جسم استفاده شد که برای هندسه‌های با انحنای کمتر از ۱۰٪ وتر صحیح است [۴]. در کاربردهای آیرودینامیکی معمول هم انحنای سطح در همین محدوده قرار دارد که با فرض جریان پتانسیل نیز سازگار است.

در روش اجزای مرزی برای آیرودینامیک بال‌های ضخیم به منظور حصول حل یکتا (در حالت دوبعدی) و برقراری ریزش ورتیسیته از بال به دنباله (در حالات دوبعدی و سه‌بعدی) اعمال شرط کوتاه در لبه فرار ضروری است. این شرط از نظر فیزیکی دلالت دارد بر اینکه جریان، لبه فرار را به آرامی ترک می‌کند و سرعت در آن نقطه محدود است و می‌تواند این طور تفسیر شود که جریان لبه فرار را در امتداد خط نیمساز زاویه لبه فرار ترک می‌کند. برای وارد ساختن شرط کوتاه در رویه حل اجزای مرزی برای بال‌های ضخیم مقدار اختلاف پتانسیل هر المان دنباله متصل به لبه فرار برابر با تفاضل مقادیر پتانسیل روی المان‌های متناظر بالا و زیر بال قرار داده می‌شود. در حالت بال نازک که حاصل حل دستگاه معادلات مرزی، مقادیر اختلاف پتانسیل روی اجزای بال است، اختلاف پتانسیل المان‌های متناظر بال و دنباله متصل به لبه فرار برابر فرض می‌شوند. به این ترتیب با اعمال شرط کوتاه به تعداد المان‌های دنباله متصل به لبه فرار معادله اضافی خواهیم داشت و دستگاه معادلات برای یک حل پایا بسته خواهد شد. در صورتی که حل وابسته به زمان یا ناپایا مورد نظر باشد سطح دنباله باید در جهت جریان نیز گسسته‌سازی شود و مشابه حالت بال ضخیم،

با توجه به عدم وجود متغیر پتانسیل در طرف راست معادله (۶) ضریب  $E$  همان عدد یک فرض می‌شود، اما عبارتی به سمت راست معادله اضافه می‌شود که حاصل حذف تکینگی از انتگرال‌های مرزی است:

$$\phi(\mathbf{x}_*, t_*) = - \int \int_{S_B + S_W} \Delta \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \pm \frac{\Delta \phi}{2} \Big|_{\mathbf{x}_* \in S_B} \quad (7)$$

که علائم مثبت و منفی به ترتیب مربوط به روی بال و سطح زیرین آن می‌شوند و  $G$  حل اساسی<sup>۹</sup> است  $(\ln r / 2\pi)$  در حالت دوبعدی و  $-1/4\pi r$  در حالت سه‌بعدی با  $(r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|)$ . معادله (۷) در صورت معلوم بودن توزیع اختلاف پتانسیل روی سطح بال و دنباله می‌تواند برای ارزیابی پتانسیل در نقاط داخل دامنه غیر واقع روی مرز استفاده شود. اما برای تعیین توزیع اختلاف پتانسیل روی مرز شامل بال و دنباله این معادله قابل استفاده نیست زیرا بر خلاف حالت بال ضخیم که با داشتن  $\partial \phi / \partial n$  روی  $S_B$  (شرط مرزی نیومن) دستگاه معادلات برای ارزیابی  $\phi$  روی  $S_B$  و  $\Delta \phi$  روی  $S_W$  به دست می‌آید در اینجا مشتق نرمال پتانسیل وجود ندارد؛ همچنین روی جسم دو مجهول پتانسیل و اختلاف پتانسیل داریم که تعداد مجهولات را بیش از معادلات می‌سازد. برای رفع این مشکلات می‌توان از معادله (۷) نسبت به جهت عمود بر سطح مشتق گرفت و با توجه به شرایط مشتق‌گیری برداری رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_*, t_*) = \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = - \left( \int \int_{S_B + S_W} \Delta \phi \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS \right) \cdot \mathbf{n} \quad (8)$$

که  $\nabla G$  برای حالت دوبعدی  $r/2\pi r^2$  و در حالت سه‌بعدی  $r/4\pi r^3$  است. با استفاده از شرط عدم نفوذ روی جسم،  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_e}{\partial n} = -\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}$  می‌توان سمت چپ معادله (۸) را در نقاط قرار گرفته روی جسم معین کرد و دستگاه معادلاتی را برای تعیین مجهولات اختلاف پتانسیل روی سطح بال و دنباله تشکیل داد. برای در نظر گرفتن اثرات تراکم‌پذیری در اعداد ماخ بالاتر از ۰/۳ نیز مشابه حالت بال ضخیم می‌توان از مختصات پرانتل - گلاورت بهره برد. در این حالت با تغییر مختصات از  $(x, y, z)$  به  $(x/\beta, y, z)$  که  $\beta = \sqrt{1 - M^2}$  معادلات حاکم مشابه حالت تراکم‌ناپذیر حل می‌شوند.

با استفاده از ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای جسم و دنباله از طریق شرط کوتا و ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای دنباله در گام‌های زمانی متوالی از طریق تئوری کلون می‌توان معادله (۹) را بر اساس بردار مجهول  $\mu$  از نو نوشت:

$$\mathbf{A}\mu^{n+1} + \mathbf{B}\mu^n = w^{n+1} \quad (13)$$

که  $w$  بردار معلومی است که با استفاده از شرط مماس بودن جریان روی جسم به دست می‌آید. ماتریس  $\mathbf{A}$  شامل ضرایب تأثیر اجزای جسم و دنباله آن است و ماتریس  $\mathbf{B}$  نیز شامل ضرایبی است که با استفاده از تئوری کلون ارتباط بین قدرت اجزای دنباله در گام‌های زمانی متوالی را برقرار می‌کند. برای تشکیل مسأله ویژه، با در نظر گرفتن بخش همگن رابطه (۱۳) و جایگذاری  $\mu = x_i e^{\lambda_i t}$  و  $z_i = e^{\lambda_i \Delta t}$  معادله زیر حاصل می‌شود:

$$z_i \mathbf{A}x_i + \mathbf{B}x_i = 0 \quad (14)$$

که  $z_i$  و  $\lambda_i$  به ترتیب مقادیر ویژه زمان گسسته و پیوسته  $i$  ام بوده و  $x_i$  بردار ویژه راست متناظر است. به شکل کلی‌تر داریم:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{Z} + \mathbf{B}\mathbf{X} = 0 \quad (15)$$

که  $\mathbf{Z}$  ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه مسأله ویژه تعمیم یافته و  $\mathbf{X}$  ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ویژه راست متناظر تشکیل می‌دهند. با توجه به اینکه ماتریس‌های  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  متقارن هستند، بردارهای ویژه چپ ( $\mathbf{Y}$ ) نیز به‌طور مشابه در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Y}\mathbf{Z} + \mathbf{B}^T \mathbf{Y} = 0 \quad (16)$$

شایان ذکر است که بردارهای ویژه راست و چپ شرایط تعامد را ارضا می‌کنند. یعنی:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T \mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{Y}^T \mathbf{B}\mathbf{X} &= -\mathbf{Z} \end{aligned} \quad (17)$$

که این خواص بردارهای ویژه در فرمول‌بندی مدل سازی رتبه کاسته مود ویژه در بخش بعد استفاده خواهند شد.

اختلاف پتانسیل‌های هر ردیف المان دنباله غیرمتصل به لبه فرار بر اساس تئوری کلون برابر با مقادیر اختلاف پتانسیل ردیف قبلی المان‌ها در گام زمانی قبل قرار داده شوند. در هر حالت پس از حل دستگاه معادلات توزیع اختلاف پتانسیل روی سطح بال نازک به دست می‌آید. با داشتن توزیع اختلاف پتانسیل با استفاده از معادله برنولی ناپایا رابطه زیر برای محاسبه توزیع اختلاف فشار به دست می‌آید:

$$\Delta p_i' = -\rho \left[ Q_\infty \frac{\Delta \phi_i' - \Delta \phi_{i-1}'}{\Delta l_i} + \frac{\Delta \phi_i' - \Delta \phi_{i-1}'}{\Delta t} \right] \quad (10)$$

که  $\Delta l_i$  طول هر المان و  $Q_\infty$  مقدار سرعت جریان آزاد است. با معین شدن توزیع اختلاف فشار مقدار نیروهای برآ و ممان آیرودینامیکی نیز با گسسته‌سازی انتگرال‌های مربوطه به صورت زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$L(t) = \sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i' S_i, \quad M(t) = -\sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i' S_i x_i \quad (11)$$

که ممان  $M$  حول مبدأ دستگاه مختصات تعیین می‌شود. به این ترتیب پس از معین شدن نوع حرکت ناپایا، بر اساس یک رویه گام به گام زمانی در هر گام، دستگاه معادلات اجزای مرزی برای محاسبه توزیع اختلاف پتانسیل روی بال مستقیماً حل می‌شود. سپس با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) توزیع اختلاف فشار ناپایا و سرانجام ضرایب آیرودینامیکی ناپایا محاسبه می‌شوند.

### تشکیل مسأله مقدار ویژه

چنانچه در بخش مقدمه اشاره شد، با توجه به زمان بر بودن حل مستقیم دستگاه معادلات اجزای مرزی در هر گام زمانی، برای برخی کاربردها نیاز به بهره‌برداری از تکنیک‌های کاهشی<sup>۱۰</sup> مانند مدل سازی رتبه کاسته است. در این تحقیق از رویکرد مود ویژه برای ایجاد مدل‌های رتبه کاسته بر اساس معادلات انتگرال مرزی استفاده شده است. برای تشکیل مسأله مقدار ویژه بر مبنای روش اجزای مرزی از رابطه هم‌مکانی حاصل از گسسته‌سازی انتگرال مرزی جریان حول بال نازک یعنی رابطه (۹) استفاده می‌کنیم. بردار مجهول  $\mu$  این‌طور تعریف می‌شود:

$$\mu = \{ \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \dots, \Delta \phi_{NB}, \Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \dots, \Delta \phi_{NW} \}^T \quad (12)$$

مشابه حالت استاندارد یعنی معادله (۱۳) با در نظر گرفتن بخش همگن رابطه (۲۲)، مسأله ویژه جدید حاصل می‌شود. روند ذکر شده برای تشکیل مسأله مقدار ویژه جریان ناپایا بر اساس روش اجزای مرزی در حالات دوبعدی و سه‌بعدی صادق است. حاصل تحلیل ویژه مسأله مقدار ویژه، بردارها و مقادیر ویژه خواهند بود که در مدل‌سازی آیرودینامیکی رتبه‌کاسته استفاده می‌شوند. بردارهای ویژه به تعبیری نشانگر مودهای طبیعی حرکت سیال یا حداقل مودهای طبیعی مدل محاسباتی آن هستند و مقادیر ویژه، فرکانس (بخش حقیقی) و میرایی (بخش موهومی) هر مود را توصیف می‌کنند [۳].

### روند مدل‌سازی رتبه کاسته

پس از تحلیل ویژه مسأله مقدار ویژه و محاسبه مودهای ویژه، می‌توان با انتخاب تعدادی از مودهای مؤثر یک فضای برداری با ابعاد کوچک‌تر نسبت به فضای محاسباتی مستقیم تشکیل داده و جواب مسأله را در این فضا به دست آورد. فرض می‌شود رفتار دینامیکی سیال به صورت مجموع مودهای ویژه ارائه شود:

$$\mu = \mathbf{Xc} \quad (24)$$

که در آن  $\mathbf{X}$  شامل  $M$  بردار ویژه سمت راست مربوط به بزرگترین مقادیر ویژه است و این بردارها ستون‌های آن را تشکیل می‌دهند. همچنین  $\mathbf{c}$  بردار مختصات مود نرمال است که بیانگر ابعاد فضای مودال مورد استفاده است. با یادآوری روابط (۱۳) تا (۱۷) و جایگزینی رابطه (۲۴) در (۱۳) داریم:

$$\mathbf{AXc}^{n+1} + \mathbf{Bxc}^n = \mathbf{w}^{n+1} \quad (25)$$

ضرب طرفین معادله در  $\mathbf{Y}^T$  که سطرهای آن شامل  $M$  بردار ویژه چپ مربوط به بزرگترین مقادیر ویژه است و به‌کارگیری شرایط تعامد مودهای ویژه، دستگاهی متشکل از  $N$  معادله غیرکوپل در مختصات مودال  $\mathbf{c}$  نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{c}^{n+1} - \mathbf{Zc}^n = \mathbf{Y}^T \mathbf{w}^{n+1} \quad (26)$$

که در آن  $\mathbf{c}$  برداری با بعد  $M$ ،  $\mathbf{Z}$  ماتریس قطری  $M \times M$ ،  $\mathbf{Y}^T$  ماتریسی با ابعاد  $N \times M$  و  $\mathbf{w}$  بردار سمت راست با بعد  $N$  است. همان‌طور که مشاهده می‌شود رابطه (۲۶) به دلیل خاصیت

با توجه به ارتباط بین مقادیر اختلاف پتانسیل اجزای روی دنباله و جسم می‌توان با کمی عملیات جبری ماتریسی به نوع دیگری از مسأله مقدار ویژه بر اساس روش اجزای مرزی دست یافت که چنانچه در بخش بعد توضیح داده خواهد شد می‌تواند مبنای مدل‌سازی رتبه‌کاسته مود ویژه به شکلی کارآمدتر قرار گیرد. برای این منظور، ابتدا بردار  $\mu$  در دستگاه جدید به صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$\mu = \begin{Bmatrix} \mu_b \\ \mu_w \end{Bmatrix}$$

که در آن  $\mu_b$  مشتمل است بر پتانسیل‌های مجهول روی جسم به انضمام اختلاف پتانسیل‌های مجهول اجزایی از دنباله که مستقیماً به لبه فرار متصل هستند. بردار  $\mu_w$  نیز شامل اختلاف پتانسیل‌های مجهول باقیمانده اجزای دنباله است. بر این اساس می‌توان رابطه (۱۳) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_b \\ \mu_w \end{Bmatrix}^{n+1} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_b \\ \mu_w \end{Bmatrix}^n = \begin{Bmatrix} w_b \\ 0 \end{Bmatrix}^{n+1} \quad (18)$$

به عبارت دیگر:

$$A_{11}\mu_b^{n+1} + A_{12}\mu_w^{n+1} + B_{11}\mu_b^n + B_{12}\mu_w^n = w_b^{n+1} \quad (19)$$

$$A_{21}\mu_b^{n+1} + A_{22}\mu_w^{n+1} + B_{21}\mu_b^n + B_{22}\mu_w^n = 0 \quad (20)$$

با توجه به ماهیت و عناصر تشکیل‌دهنده ماتریس‌های  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{B}$  می‌توان نشان داد که ضرایب  $A_{21}$ ،  $B_{11}$  و  $B_{12}$  در روابط فوق صفر هستند. در نتیجه رابطه (۱۹) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\mu_b^{n+1} = A_{11}^{-1}w_b^{n+1} - A_{11}^{-1}A_{12}\mu_w^{n+1} \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۲۱) - در گام  $n$  - در رابطه (۲۰) داریم:

$$A_{new}\mu_w^{n+1} + B_{new}\mu_w^n = w_{new}^n \quad (22)$$

که در آن ضرایب مربوطه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{new} &= A_{22} \\ B_{new} &= B_{22} - B_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \\ w_{new}^n &= -B_{21}A_{11}^{-1}w_b^n \end{aligned} \quad (23)$$

حفظ تعداد اندکی از مودها نیاز است، زیرا تنها مودهای فرکانس-پایین به شکل دینامیک پاسخ می‌دهند. امتیاز معادله (۲۹) بر معادله (۲۶) آن است که می‌تواند در کنار روش تصحیح استاتیک برای در نظر گرفتن اثر مودهای متناظر با مقادیر ویژه صفر به منظور حصول حل رضایت‌بخش به کار گرفته شود. برای حل جریان ناپایا کافی است با پیمایش زمانی مودها را به طور مستقل دنبال کرده و پس از به دست آمدن آنها توسط رابطه (۲۹) جواب را از رابطه (۲۷) در هر گام محاسبه نمود.

چنانچه بحث شد، مهمترین دلیل نیاز به تصحیح استاتیک در مدل سازی رتبه کاسته مود ویژه وجود مقادیر ویژه صفر می‌باشد که در واقع معرف وجود فرکانس‌های بسیار زیاد یا مودهای شبه استاتیک در سیستم می‌باشند. بنابراین در صورتی که بتوان با حذف مودهای شبه پایا بدون نیاز به تصحیح استاتیک و با در نظر گرفتن تعدادی از مودهای مؤثر به جواب رسید، مدل سازی رتبه کاسته به مراتب کارآمدتری خواهیم داشت. در بخش قبل دو نوع مسأله مقدار ویژه تعریف شد که مسأله نوع دوم یعنی رابطه (۲۲) تنها بر اساس مجهولات روی اجزای غیر متصل به لبه فرار دنباله بنا شد و در نتیجه هیچ مقدار ویژه صفری نتیجه نمی‌دهد. بنابراین با به کارگیری تعدادی از مودهای ویژه حاصل از تحلیل ویژه این رابطه و استفاده از معادله (۲۱) می‌توان بدون تصحیح استاتیک جواب‌های مناسبی به دست آورد [۹]. این رویکرد حتی در صورت نیاز به تصحیح استاتیک برای دقت بیشتر نتایج باز هم با توجه به کاهش ابعاد مسأله مقدار ویژه، هزینه محاسباتی کمتری خواهد داشت.

### نتایج و بحث

برای اعتبارسنجی روش ارائه شده ابتدا حل جریان پایا دوبعدی حول یک ایرفویل نازک سهموی با انحنای  $\varepsilon = 0.1$  (شکل ۲) را در نظر می‌گیریم. این مثال می‌تواند برای بررسی اثر انحنای سطح بال بر تقریب مشتق نرمال در شرایط مرزی نیز استفاده شود. توزیع فشار تحلیلی از رابطه زیر به دست می‌آید [۴]:

$$\Delta C_p = 4\sqrt{\frac{c-x}{x}}\alpha + 32\frac{\varepsilon}{c}\sqrt{\frac{x}{c}}\left(1-\frac{x}{c}\right) \quad (30)$$

تعامد مودهای ویژه یک سیستم غیر کوپل و با بعد ناچیز است و چون سمت چپ آن قطری است، می‌توان مودها را به طور مستقل و کم هزینه با پیمایش گام به گام زمانی محاسبه نمود. سپس با استفاده از معادله (۲۴) و برهم نهی مودها بردار مجهولات را به دست آورد. نتایج حاصل از این تحقیق برای بال‌های نازک و تحقیقات دیگر برای بال‌های ضخیم [۹] نشان می‌دهد که روش بالا حتی در صورت لحاظ کردن همه مودها نیز جواب مناسبی نخواهد داد. دلیل این مسأله را می‌توان این طور توضیح داد که سیستم معادلات به تعداد المان‌های روی مرز و متصل به آن دارای مقدار ویژه صفر است، لذا تأثیر مودهای متناظر با این مقادیر ویژه در عمل حذف می‌شود، اما این مودها عمود بر فروشار نیستند و از این رو در پاسخ نهایی سهمیم هستند. بنابراین چون مودهای صرف نظر شده که در واقع به طور آبی با حرکت جسم فعال می‌شوند توسط روش بالا در نظر گرفته نمی‌شوند، نتایج حاصل مطلوب نخواهد بود. این مودها تمایل دارند فرکانس‌های طبیعی بزرگ‌تر از فرکانس تحریک داشته باشند و به همین دلیل در یک اسلوب ضرورتاً شبه استاتیک پاسخ می‌دهند. برای رفع این مشکل روش تصحیح استاتیکی پیشنهاد شده است که در ادامه تشریح می‌شود. برای گنجانیدن تقریبی اثرات مودهای ویژه صرف نظر شده، حل ناپایا به دو بخش تجزیه می‌شود: یک بخش شبه پایای معادل پاسخ سیستم به اختلال شبه پایا؛ و یک بخش دینامیک حاصل از فضای مودال، یعنی:

$$\mu^n = \mu_s^n + \tilde{\mu}^n = \mu_s^n + \mathbf{X}\tilde{\mathbf{c}}^n \quad (27)$$

که بخش شبه پایا  $\mu_s$  توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}]\mu_s^n = \mathbf{w}^n \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه (۲۷) در معادله (۱۳) و ضرب طرفین رابطه در  $\mathbf{Y}^T$  و استفاده از خاصیت تعامد یعنی معادله (۱۷) داریم:

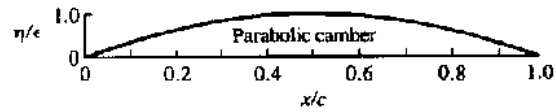
$$\tilde{\mathbf{c}}^{n+1} - \mathbf{Z}\tilde{\mathbf{c}}^n = \mathbf{Y}^T \mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{Y}^T (\mathbf{A}\mu_s^{n+1} + \mathbf{B}\mu_s^n) \quad (29)$$

بخش استاتیک حل شامل اثر تمام مودهای ویژه است و در هر گام زمانی از حل سیستم جبری (۲۸) به دست می‌آید. برای بخش دینامیک حل، تعریف شده توسط معادله (۲۹)، تنها به

نکته دیگر جهت قرارگیری صفحه دنباله است که از بین سه گزینه مماس بر وتر، مماس بر لبه فرار و مماس بر جهت جریان مورد دوم بهترین نتایج را داد. دلیل این امر را می‌توان حساسیت حل اجزای مرزی به جهت بردار نرمال اجزا به ویژه در محاسبات ضرایب تأثیر دانست. این نتیجه با شرط کوتاه که جریان ملایم و مماس بر لبه فرار را الزام می‌کند نیز سازگار است.

در [۴] برای حل جریان حول یک بال ضخیم نامتقارن با استفاده از روش پنل مرتبه اول نشان داده شده که اگر دنباله در ابتدا مماس بر لبه فرار و دور از بال همسو با جریان باشد، نتایجی نزدیک به داده تجربی حاصل خواهد شد. با توجه به اینکه در روش اجزای مرزی ارائه شده در حالت پایا تنها یک المان (صفحه تخت) دنباله وجود دارد برای بررسی مسأله با دنباله منحنی شکل باید از حل ناپایا با گام‌های زمانی به تعداد المان‌های روی دنباله و فرض همگرایی حل ناپایا به جواب پایا پس از سپری شدن زمان کافی استفاده کرد.

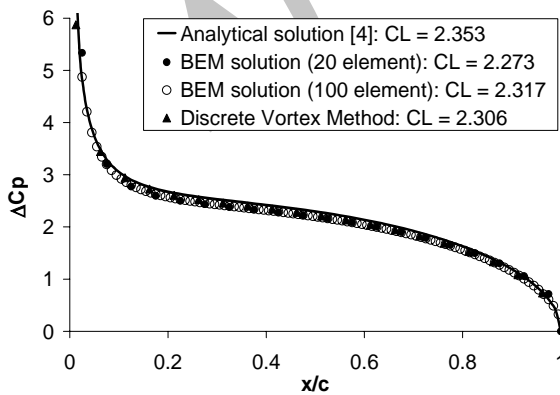
چیدمان المان‌های دنباله در قالب پیشنهادی [۴] و تحلیل اجزای مرزی ناپایا نشان داد که جواب حاصل هیچ تفاوتی با حل پایا به دست آمده با دنباله با طول مشابه و یک المان تخت مماس بر لبه فرار ندارد. بنابراین در کاربردهای مورد نظر این تحقیق (زاویه حمله و دامنه نوسان کم) تنها مماس بودن دنباله بر لبه فرار برای حصول جواب مناسب کفایت می‌کند. پس از ارزیابی روش در حالت پایا می‌توان از روش اجزای مرزی ارائه شده برای حل جریان‌های ناپایا استفاده کرد.



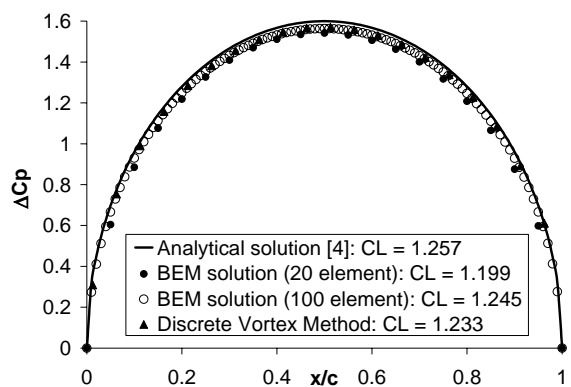
شکل ۲- ایروفیل نازک سهموی با انحنای ده درصد وتر

حل تحلیلی با استفاده از توزیع گردابه و اعمال شرایط مرزی روی محور  $x$  (وتر) به دست می‌آید. چنانچه در نمودارهای (۳) و (۴) مشاهده می‌شود توزیع فشار و ضریب برآی حاصل از روش اجزای مرزی ارائه شده در تحقیق حاضر در دو زاویه حمله صفر و ۱۰ درجه تطابق خوبی با حل تحلیلی و نتایج عددی حاصل از روش گردابه جدا دارد و با افزایش المان‌ها دقت نتایج نیز بیشتر شده است. اختلاف اندک نتایج عددی و تحلیلی می‌تواند ناشی از این امر باشد که در هر دو روش حل عددی، نقاطی که شرایط مرزی روی آنها ارضا می‌شوند (نقاط هم‌مکانی) بر خلاف روش تحلیلی روی خط انحنا قرار دارند. نزدیکی این نتایج نشان می‌دهد برای هندسه‌های با انحنای کمتر از ۱۰٪ وتر ( $\epsilon < 0.1$ ) محل اعمال شرایط مرزی تأثیر چندانی بر جواب ندارد. پدیده مکش لبه فرار که در آیرودینامیک بال نازک کاملاً شناخته شده است نیز در شکل (۴) در ناحیه لبه فرار مشاهده می‌شود.

بررسی استقلال جواب از مشخصات دنباله نشان داد که طول و شکل دنباله تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر حل اجزای مرزی دارند. هر چه طول دنباله بیشتر باشد، جواب به حل تحلیلی نزدیکتر می‌شود که این امر با توجه به مبتنی بودن حل تحلیلی بر دنباله بی‌نهایت قابل انتظار است.

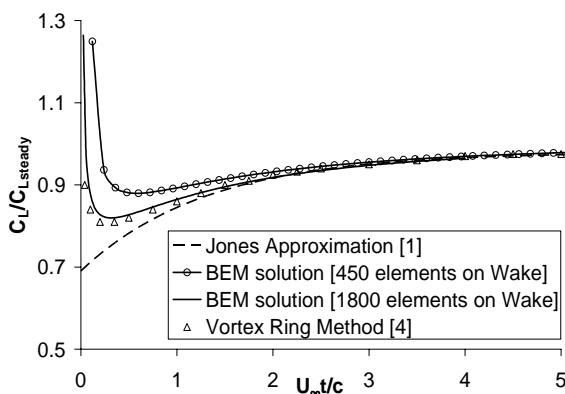


شکل ۴- توزیع اختلاف پتانسیل در جهت وتر ایروفیل سهموی در زاویه حمله ۱۰ درجه



شکل ۳- توزیع اختلاف پتانسیل در جهت وتر ایروفیل سهموی در زاویه حمله صفر درجه



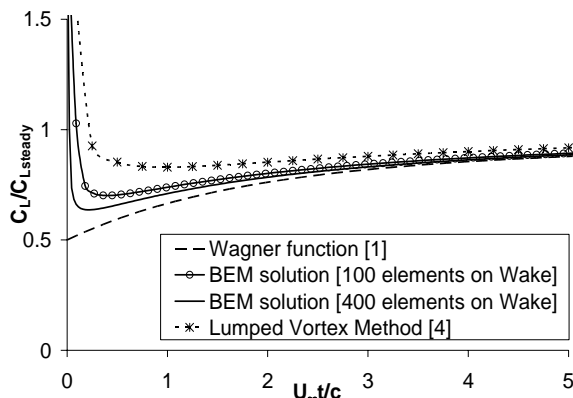


شکل ۶- تغییرات ضریب برای گذرا برای یک بال تخت ( $AR = 6$ ) پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

مدل سازی فیزیکی صحیح جریان پایا برآزا حول یک ترکیب آیرودینامیکی ضروری است.

برای مطالعه توانایی روش اجزای مرزی ارائه شده در حل جریان ناپایا حول بال های نازک، بال مستطیلی تخت با ضریب منطری ۶ و زاویه حمله ۵ درجه که از حالت سکون شروع به حرکت با سرعت ثابت می کند در نظر گرفته شد. روی جسم ۱۵۰ المان (۶ المان در جهت دهانه و ۲۵ المان در جهت وتر) و در دو حالت آزمایشی ۴۵۰ و ۱۸۰۰ المان روی دنباله به طول ده برابر وتر قرار داده شد. در شکل (۶) تغییرات نسبت ضریب برای آنی به ضریب برای حالت پایای بال در برابر زمان بی بعد نشان داده شده است. چنانچه در شکل مشاهده می شود نتایج حاصل از روش اجزای مرزی با تقریب جونز [۱] که مبتنی بر روابط نمایی حوزه زمان است، اختلاف اندکی در شروع حرکت دارند که دلیل آن مشابه علت اختلاف نتایج حالت دوبعدی و حل واگنر است که پیشتر بحث شد. همچنین در شکل (۶) نتایج حاصل از روش حلقه گردابه [۴] که معمولاً برای آیرودینامیک بال نازک مورد استفاده قرار می گیرد نشان داده شده است که تفاوت چندانی بین این نتایج و حل اجزای مرزی به ویژه در حالت شبکه ریزتر دنباله وجود ندارد.

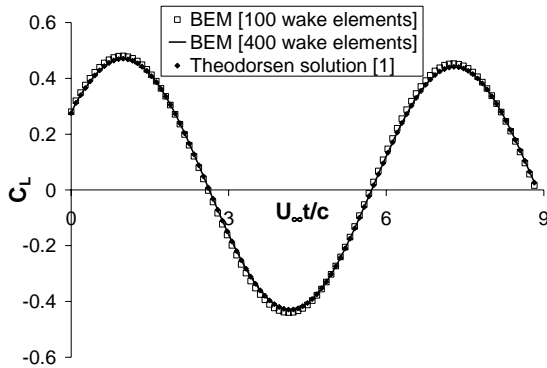
چنانچه در شکل (۶) مشخص است در روش اجزای مرزی با افزایش تعداد اجزای روی دنباله و ریزتر شدن اندازه المان ها در جهت جریان و در نتیجه کوچک تر شدن گام زمانی امکان تسخیر دقیق تر تغییرات فراهم شده است. شایان توجه است که با افزایش ضریب منطری به مقادیر زیاد نتایج حالت سه بعدی به نتایج حالت دوبعدی (شکل ۵) میل می کند (مثلاً با قرار دادن  $AR=1000$ ). بنابراین با مقایسه نتایج دو شکل (۵) و (۶)



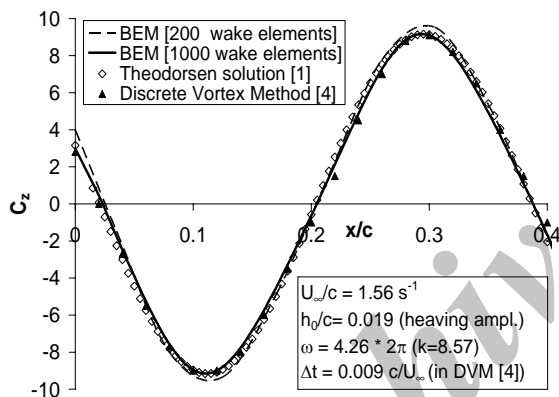
شکل ۵- تغییرات ضریب برای گذرا برای یک ایرفویل تخت پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

برای بررسی قابلیت روش در مسائل آیرودینامیک ناپایا از حرکت ناگهانی یک ایرفویل تخت در زاویه حمله ۵ درجه شروع می کنیم. همانطور که در شکل (۵) مشاهده می شود نتایج به دست آمده از روش اجزای مرزی دقت خوبی در مقایسه با حل دقیق واگنر دارد و هرچه تعداد اجزای دنباله افزوده شده است دقت حل به ویژه در تسخیر تغییرات ضریب برای لحظات ابتدایی بیشتر شده است. دلیل این امر وابستگی گام زمانی به اندازه اجزای دنباله از طریق معادله جابجایی می باشد. اختلاف بین منحنی محاسبه شده و نتایج کلاسیک واگنر را می توان به نرخ محدود شتاب حین اولین گام زمانی نسبت داد. زیرا در حل واگنر زمان شتاب صفر و مقدار نیروی برآ بلافاصله پس از شروع حرکت ( $t = 0+$ ) بی نهایت است. اثر شتاب محدود افزایش تند برآ حین شتاب و افزایش نرم آن در لحظات بعدی می باشد. در حل اجزای مرزی این حالات آزمایشی طول دنباله ده برابر وتر ایرفویل و تعداد اجزای روی جسم ۱۰۰ فرض شد. همچنین مشابه حالت پایا مشاهده شد که تعداد اجزای روی جسم تأثیر چندانی بر حل ندارد که این رفتار ناشی از این حقیقت است که نتیجه مستقیم و نهایی پیشینه سیرکولاسیون حول ایرفویل در شکل دنباله و توزیع اختلاف پتانسیل روی آن نمود پیدا می کند. به علاوه چنانچه پیشتر اشاره شد اندازه المان های دنباله نیز ارتباط مستقیم با اندازه گام زمانی حل ناپایا دارند. شایان ذکر است که ضریب برای حالت پایا که برای محاسبه نسبت ضریب برآ در حالت ناپایا به حالت پایا در شکل (۵) مورد استفاده قرار گرفته است، با در نظر گرفتن یک المان دنباله طویل (۱۰۰ برابر وتر) و حل اجزای مرزی مستقل از زمان به دست آمده است. در نظر گرفتن چنین المان برای

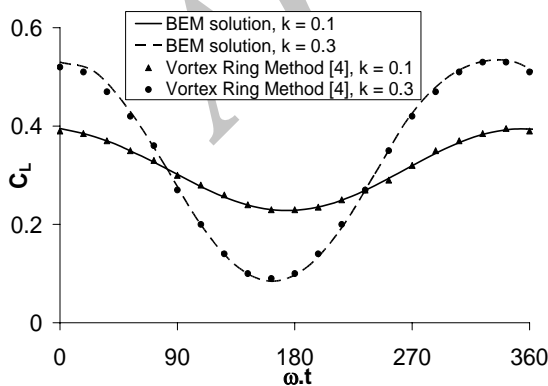
گردابه [۴] از انطباق خوبی برخوردار هستند. در این دو حالت آزمایشی سطح جسم با ۱۰۰ و سطح دنباله با ۲۰۰ المان مدل شد که تعداد المان مورد نیاز روی دنباله با توجه به گام زمانی مورد نیاز حل ناپایا تعیین شد.



شکل ۷- تغییرات ضریب برآی ایرفویل تخت در نوسان پیشی



شکل ۸- تغییرات ضریب نیروی عمودی ایرفویل تخت در یک سیکل نوسان انتقالی

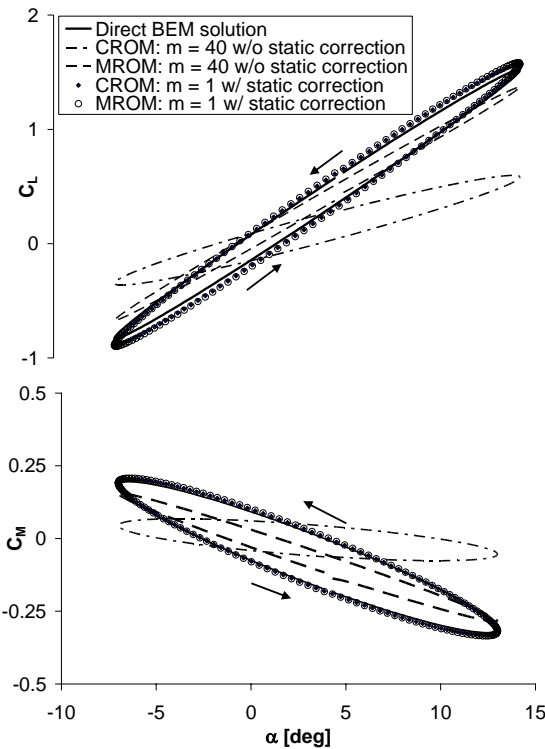


شکل ۹- تغییرات ضریب برآی بال مستطیلی تخت در نوسان انتقالی حول زاویه حمله ۵ درجه

می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش ضریب منظری طول برآی گذرا و اتلاف برآی اولیه کاهش می‌یابد. علت این امر را می‌توان تأثیر ضریب منظری محدود بر قدرت گردابه لبه فرار در لحظه شروع حرکت دانست.

پس از ارزیابی روش اجزای مرزی توسعه‌یافته در این تحقیق در مسائل حرکت ناگهانی بال از سکون به بررسی انواع دیگر حرکت ناپایا، یعنی حرکت‌های نوسانی پیشی و انتقالی می‌پردازیم. در شکل (۷) تغییرات ضریب برآی ایرفویل تخت تحت نوسان پیچ با دامنه ۵ درجه حول زاویه حمله صفر درجه با فرکانس کاهش یافته ۰/۵ نشان داده شده است. در دو حالت حل اجزای مرزی، تعداد اجزای روی جسم ۱۰۰ و طول دنباله ۲۰ برابر وتر ایرفویل فرض شده است. چنانچه مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج روش اجزای مرزی و حل تئودورسون وجود دارد. به دلیل فرکانس بی‌بعد کم حرکت نوسانی، افزایش تعداد اجزای دنباله دقت نتایج را تغییر چندانی نمی‌دهد. زیرا برای این نوع حرکت‌های نوسانی نیازی به گام‌های زمانی خیلی کوچک برای تسخیر دقیق تغییرات زمانی نیست.

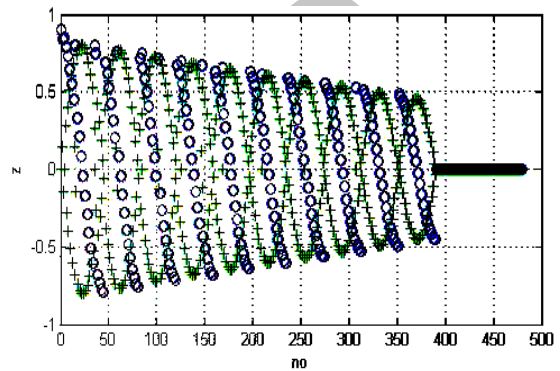
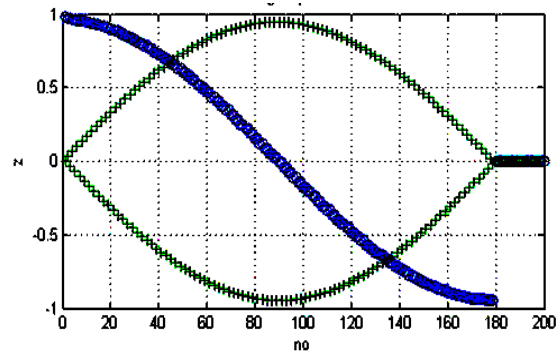
در شکل (۸) نتایج حاصل از محاسبه ضریب نیروی عمودی یک ایرفویل تخت تحت نوسان انتقالی در جهت عمودی با مشخصات ذکر شده روی شکل نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود نتایج حاصل از محاسبه با روش اجزای مرزی در مقایسه با حل کلاسیک تئودورسون [۱] همچنین نتایج [۴] که با مدل گردابه جدا به دست آمده از تطابق خوبی برخوردارند. همچنین با افزایش تعداد اجزای دنباله خطای محاسبات کاهش یافته که علت آن فرکانس بی‌بعد بزرگ نوسانات است که گام زمانی کوچک‌تر و در نتیجه تعداد المان بیشتر روی دنباله را برای بالا بردن دقت حل الزام می‌کند. در هر دو حالت حل اجزای مرزی نشان داده شده در شکل (۸) طول دنباله ۱۰ برابر طول وتر و تعداد المان روی جسم ۱۰۰ عدد در نظر گرفته شد و با افزایش اجزای روی جسم تغییری در نتایج مشاهده نشد. دقت نتایج در این مورد آزمایشی نشان داد که روش ارائه شده در نوسان‌های با فرکانس‌های بی‌بعد بالا نیز قابل استفاده است. در شکل (۹) نیز تغییرات ضریب برآی یک بال مستطیلی تخت با ضریب منظری ۴ و زاویه حمله ۵ درجه در نوسان انتقالی با دامنه ۰/۱ وتر و در دو فرکانس بی‌بعد ۰/۱ و ۰/۳ نمایش داده شده است. نتایج حاصل از روش اجزای مرزی و روش متداول برای بال‌های نازک یعنی روش حلقه



شکل ۱۱- تغییرات ضرایب برآ و ممان آیرودینامیکی برای ایرفویل تخت در نوسان پیچشی

بحث شد، مدهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه باید آنی و بدون هیچ تأخیر زمانی با حرکت جسم فعال شوند. در صورت تشکیل مسأله مقدار ویژه نوع دوم و تحلیل ویژه آن مشاهده می شود به دلیل حذف مجهولات روی جسم و اجزای دنباله متصل به لبه فرار در مسأله مقدار ویژه جدید اثری از مقادیر ویژه صفر وجود نخواهد داشت. بدیهی است با توجه به کاهش ابعاد سیستم در این حالت، تحلیل ویژه در زمان کمتری صورت پذیرد. همچنین بررسی بال‌های با هندسه پیچیده تر ولی دارای دینامیک دنباله یکسان نشان داد ضخامت، انحنا و زاویه حمله جسم تأثیر چندانی بر رفتار توزیع ویژه ندارد.

با استفاده از مدهای ویژه حاصل از تحلیل ویژه می توان مدل های آیرودینامیکی رتبه کاسته ای توسعه داد که قابلیت جایگزین شدن حل مستقیم اجزای مرزی را داشته باشند. یک ایرفویل تخت در نوسان پیچشی با دامنه ۱۰ درجه حول زاویه حمله ۳ درجه با فرکانس کاهش یافته ۰/۱ فرض می شود. شکل (۱۱) نتایج مدل سازی رتبه کاسته را در مقایسه با حل مستقیم نشان می دهد. چنانچه از نتایج نمایش داده شده در شکل (۱۱)



شکل ۱۰- بخش های حقیقی (0) و موهومی (+) مقادیر ویژه به ترتیب شماره در حالت دوبعدی (بالا) و سه بعدی (پایین)

پس از بررسی اعتبار نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم در تحلیل آیرودینامیک ناپایا برای حالت های مختلف آزمایشی، به توسعه مدل های آیرودینامیکی رتبه کاسته بر اساس روش اجزای مرزی ارائه شده می پردازیم. یک ایرفویل تخت دوبعدی بدون انحنا که بدنه آن توسط ۲۰ المان و دنباله آن به طول ۹ برابر طول ایرفویل توسط ۱۸۰ المان مدل شده باشد، همچنین یک بال مستطیلی با ضریب منظری ۵ و طول دنباله ۵ برابر طول وتر را در نظر می گیریم. تعداد اجزای روی بال در جهت وتر ۸ و در جهت دهانه ۱۰ و تعداد اجزای روی دنباله در جهت جریان ۴۰ لحاظ می شود. با حل مسأله مقدار ویژه برای این دو حالت، توزیع مقادیر ویژه حاصل از تحلیل ویژه طبق شکل (۱۰) خواهد بود. اگر مقدار تمام مقادیر ویژه کمتر یا برابر واحد باشد، آنگاه سیستم پایدار و اگر هر یک از مقادیر ویژه از واحد بزرگ تر بود، آنگاه سیستم ناپایدار است. از سوی دیگر با توجه به طیف ویژه مشاهده می شود که سیستم به تعداد المان های متصل به جسم، مقادیر ویژه صفر دارد. از دیدگاه فیزیکی این امر موجه است زیرا چنانچه در بخش های قبل نیز

که  $G$  برای حالت دوبعدی  $\ln r / 2\pi$  می‌باشد. با انتگرال گیری نامعین خواهیم داشت:

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \right) dx = \frac{z - z_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \mathbf{i} - \frac{x - x_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \mathbf{k} \quad (الف ۲)$$

در نتیجه انتگرال معین در مختصات محلی به دست می‌آید:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \right) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{z_* - z_1}{r_1^2} - \frac{z_* - z_2}{r_2^2} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{x_* - x_2}{r_2^2} - \frac{x_* - x_1}{r_1^2} \right) \mathbf{k} \quad (الف ۳)$$

که  $r_1$  و  $r_2$  فاصله نقطه بار تا دو نقطه انتهایی المان هستند.

### پی‌نوشت‌ها

- ۱ Domain-based methods
- ۲ Multidisciplinary
- ۳ Fast multipole methods
- ۴ Morphing wing aircraft
- ۵ Flapping wing robots
- ۶ Membrane wing MAV
- ۷ Lumped vortex method
- ۸ Cauchy principal value
- ۹ Fundamental solution
- ۱۰ Reduction techniques

### منابع و مراجع

- [1] Bisplinghoff, R.L., Ashley, H, (1982), "Principles of Aeroelasticity", John Wiley and Sons Inc., USA.
- [2] Esfahanian, V., Behbahani-Nejad, M, (2002), "Reduced Order Modeling of Unsteady Flows about Complex Configurations Using Boundary Element Method", ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 124, pp. 988-993.
- [3] Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, Firouz-Abadi, R.D, (2007), "Reduced-Order Aerodynamic Model for Aeroelastic Analysis of Complex Configurations in Incompressible Flow", AIAA Journal of Aircraft, Vol. 44 (3), pp. 1015-1017.
- [4] Katz, J, Plotkin, A, (2001), "Low Speed Aerodynamics", 2nd Edition, Cambridge University Press, UK.
- [5] Liu, Y, (2010), "Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and Applications in Engineering", Cambridge University Press, UK.

مشخص است، هر دو نوع روش مدل‌سازی رتبه‌کاسته معمول (CROM) و اصلاح‌شده (MRM) بدون تصحیح استاتیک حتی با در نظر گرفتن ۴۰ مود، نتیجه دقیقی ارائه نمی‌دهند. دلیل این رفتار وجود تعدادی مقدار ویژه صفر و در نتیجه مودهای شبه‌استاتیک است که اثر آنها فقط با به‌کارگیری تکنیک تصحیح استاتیک قابل دستیابی است. هر چند، نتایج مدل اصلاح‌شده خطای بسیار کمتری دارند و در زمان محاسباتی کوتاه‌تر نیز به دست آمده‌اند. اما همان‌طور که در شکل (۱۱) مشاهده می‌شود، در صورت به‌کارگیری تصحیح استاتیک، هر دو روش با در نظر گرفتن تنها یک مود نتایج دقیقی ارائه خواهند کرد. در این حالت مزیت رویکرد مدل‌سازی رتبه‌کاسته اصلاح شده کارآمدتر بودن آن از نظر هزینه محاسبات است.

### نتیجه گیری

در این پژوهش با استفاده از معادلات انتگرال مرزی به مطالعه آیرودینامیک ناپایای بال‌های نازک پرداخته شد. برای این منظور روش اجزای مرزی آیرودینامیکی جدیدی ارائه شد که می‌تواند برای حل جریان حول بال‌های نازک استفاده شود. همچنین بر اساس مسأله ویژه حاصل از به‌کارگیری روش اجزای مرزی ارائه شده به تحلیل ویژه جریان و توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته مود ویژه برای بال‌های ناپایا پرداخته شد. از روش اجزای مرزی توسعه‌یافته و مدل‌های رتبه‌کاسته مبتنی بر آن برای تحلیل آیرودینامیک حوزه زمان انواع ایرفویل و بال در چند نوع حرکت ناپایا استفاده شد که نتایج حاصل تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی و عددی معتبر داشتند.

### پیوست الف.

#### محاسبه تحلیلی ضرایب تأثیر در حالت دو بعدی

در حل اجزای مرزی جریان حول بال نازک با مقدار اختلاف پتانسیل ثابت روی هر المان، انتگرال زیر برای ضرایب تأثیر به دست می‌آید (معادله ۹) که در مختصات محلی المان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{s_m} \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \right) dx \quad (الف ۱)$$

- 23, pp. 143-153.
- [10] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Behbahani-Nejad, M, Haddadpour, H, (2009), "Aeroelastic analysis of helicopter rotor blade in hover using an efficient reduced-order aerodynamic model", Journal of Fluids and Structures, Vol. 25 (8), pp. 1243-1257.
- [11] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, (2009), "Application of the Modified Reduced-Order Aerodynamics Modeling Approach to Aeroelastic Analysis", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineer - Part G: Journal of Aerospace Engineering, Vol. 223 (3).
- [12] Soltani, N, Esfahanian, V, Haddadpour, H, Behbahani-Nejad, M, (2004), "Unsteady Supersonic Aerodynamics Based on BEM, Including Thickness Effects in Aeroelastic Analysis", Journal of Fluids and Structures, Vol. 19, pp. 801-813.
- [6] Morino, L, Gennaretti, M, (1992), "Boundary Integral Equation Methods for Aerodynamics", Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 146, pp. 279-320.
- [7] Morino, L, Gennaretti, M, Iemma, U, Salvatore, F, (1998), "Aerodynamics and Aeroacoustics of Wings and Rotors via BEM - Unsteady, Transonic, and Viscous Effects", Computational Mechanics, Vol.21, pp.265-275.
- [8] Morino, L, Gennaretti, M, Bernardini, G, (2003), "A Boundary Element Method for the Aerodynamic Analysis of Aircraft in Arbitrary Motions", Computational Mechanics, Vol.32, pp. 301-311.
- [9] Shahverdi, H, Nobari, A.S, Behbahani-Nejad, M, Haddadpour, H, (2007), "An Efficient Reduced-Order Modeling Approach Based on Fluid Eigenmodes and Boundary Element Method", Journal of Fluids and Structures, Vol.

Archive of SID