http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 1 (2023), pp. 35-55.

http://ui.ac.ir

THE CONVERGENCE OF POWER ITERATION METHOD FOR TOURNAMENT MATRICES AND ITS APPLICATIONS

AMIRHOSEIN NOKHODKAR AND RASOOL KAZEMI*

Abstract. In this paper, we prove that for every tournament matrix with nonzero spectral radius, the power iteration method converges to a nonzero eigenvector corresponding to the eigenvalue with the maximum magnitude. An application of this result for ranking the corresponding players of the matrix is also given.

1. Introduction

The power iteration method is a simple numerical method for finding a corresponding eigenvector of a dominant eigenvalue of a matrix, i.e., an eigenvalue with the largest absolute value. Given a matrix A, this method starts as the first vector with an initial guess for an eigenvector of a dominant eigenvalue of A. For $n > 1$, the n-th vector in the sequence is obtained by multiplying the $(n-1)$-th vector on the left by A. The process continues until either the sequence converges

Keywords: Tournament matrix, power iteration method, dominant eigenvalue, Perron's eigenvector, ranking problem.
Communicated by Saeid Azam.
Article Type: Research Paper.
*Corresponding author.
Received: 23-02-2023, Accepted: 07-06-2023, Published Online: 10-07-2023.
Cite this article: A.-H. Nokhodkar and R. Kazemi, The convergence of power iteration method for tournament matrices and its applications, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 1 (2023) 35–55.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563 .

to the desired eigenvector, or it is clear that the sequence is not convergent. The power iteration method is very useful, but it is not convergent in general.

A *tournament matrix* is a square matrix A whose entries are 0 or 1 such that $A + A^t = J - I$, where I is the identity matrix and J is a matirx with all entries equal to 1. In this paper, we show that for every tournament matrix with a nonzero spectral radius, the power iteration method for finding the non-negative eigenvector corresponding to the dominant eigenvalue is convergent. As an application, we will rank the corresponding players of the tournament matrix.

2. Main Resalts

The spectral radius of a square matrix A is defined as the maximum absolute value of its eigenvalues and is denoted by $\rho(A)$. Also, for a vector $R = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}$, we use the notation $\|R\|_1 = |r_1| + \cdots + |r_n|$.

Theorem 2.1. *Let A be a tournament matrix. Then $\rho(A)$ is an eigenvalue of A with the geometric multiplicity one. Moreover, there exists a unique eigenvector R with nonnegative entries sush that $\|R\|_1 = 1$.*

Definition 2.2. *Let A be a tournamnet matrix. The eigenvalue R in Therorem 2.1 is called the generalized Perron eigenvector of A.*

Definition 2.3. *Let A be a tournamnet matrix of order n with $\rho(A) \neq 0$. For every positive integer k, let*

$$v_k = \frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_1},$$

where

$$v_0 = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^t \in \mathbb{R}^n.$$

We say that A satisfies the power condition if the sequence $\{v_k\}$ converges to the generalized Perron eigenvector of A.

Theorem 2.4. *Let A be a tournament matrix of order n. If $\rho(A) \neq 0$, then A satisfies the power condition.*

Let $A = (a_{ij})$ be a tournament matrix. Then A may be considered as the matrix of a *round robin tournamnet*, i.e., a tournament for which every player plays exactly one match against each of the other players. We label the players as $1, 2, \cdots, n$. Then $a_{ij} = 1$ if and only if player i

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

defeats player j. Now, for $X = (1, \cdots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$, the i-th component of the vector AX is the number of wins for player i.

The product $a_{ij}a_{jk}$ is nonzero if and only if player i defeats player j and player j defeats player k. This suggests that player i defeats *indirectly* player j. The number of such wins can be computed by the vector A^2X. Similarly, the product $a_{ij}a_{jk}a_{ks}$ is nonzero exactly when player i defeats player j, player j defeats player k and player k defeats player s, i.e., again player i defeats indirectly player j. Hence, one can count these wins by the matrix A^3X. Continuing this argument, we get the vector $(A + A^2 + \cdots)X$ which counts all of these direct and indirecet wins. However, this vector may deverge to infinity. To settle this problem, one can normalize the vectors as follows: use the vector

$$v_0 = \frac{1}{n}X = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^t,$$

instead of X. For every positive number k, set

$$w_k = \frac{(A + \cdots + A^k)v_0}{\|(A + \cdots + A^k)v_0\|_1}.$$

Note taht $\|w_k\|_1 = 1$ for every nonnegative integer k. The following result shows that the sequence $\{w_k\}$ can be used for our ranking problem.

Theorem 2.5. *Let A be a tournament matrix. If $\rho(A) \neq 0$, then the sequence $\{w_k\}$ converges to the generalized Perron eigenvector of A.*

3. **Summary of Proofs**

Theorem 2.1 follows from [4, (8.3.1)] and [6, (3.1)]. To proof Theorem 2.4, we need some preliminaries as follows:

Definition 3.1. *A square matrix P is called a permutation matrix if its rows are obtained by permuting the rows of the identity matrix.*

Lemma 3.2. *A tournament matrix A of order n with $\rho(A) \neq 0$ satisfies the power condition if and only if PAP^t satisfies the power condition for every permutation matrix P of order n.*

Proposition 3.3. *Let A be a tournament matirx with $\rho(A) \neq 0$. If the algebraic multiplicity of $\rho(A)$ is 1, then A satisfies the power condition.*

Proposition 3.4. *Let $A = \left(\begin{smallmatrix} B & J \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ be a tournament matrix of order n, where B is a square matirx of nonzero order, C is a nonzero matrix of order $n-m$ and J is an $m \times (n-m)$ matrix whose entries all are 1. If $\rho(B) = \rho(C) \neq 0$ and B and C satisfy the power condition, then so is A.*

Proof of Theorem 2.4. We use induction on the algebraic multiplicity of $\rho(A)$. If the algebraic multiplicity of $\rho(A)$ is 1 the result follows from Proposition 3.3. Suppose that every tournamnet matrix T with $\rho(T) \neq 0$ and the algebraic multiplicity l satisfies the power condition. Assume that the algebraic multiplicity of $\rho(A)$ is $l+1$. Then there exists a permutation matrix P such that PAP^t has a decomposition $PAP^t = \left(\begin{smallmatrix} B & J \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ where B is a square matrix of nonzero order m satisfying $\rho(B) = \rho(A)$ with the algebraic multiplicity 1, C is a square matrix of nonzero order $n-m$ satisfying $\rho(B) = \rho(A)$ with the algebraic multiplicity l and J is an $m \times (n-m)$ matrix whose entries are all 1. By the hypothesis, B and C satisfy the power condition. Hence, by by Proposition 3.4, PAP^t satisfies the power condition. By Lemma 3.2, the matrix A satisfies the power condition, proving the result.

Proof of Theorem 2.5. For a nonnegative number k, let $a_k = A^k v_0$, $b_k = \|A^k v_0\|_1$. Since the entries of $A^k v_0$ are nonzero for all k, we have

$$b_1 + \cdots + b_k = \|Av_0\|_1 + \cdots + \|A^k v_0\|_1 = \|(A + \cdots + A^k)v_0\|_1.$$

Hence,

$$w_k = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{b_1 + \cdots + b_k}.$$

By Theorem 2.4, the sequence $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ converges to the generalized Perron vector of A. Hence, so does the sequence $\{w_k\}$, thanks to Stolz-Cesàro Theorem (see [10, p. 181]).

Amirhosein Nokhodkar

Department of Mathematics, University of Kashan, P.O.Box 87317-51167, Kashan, Iran

Email: `a.nokhodkar@kashanu.ac.ir`

Rasool Kazemi

Department of Mathematics, University of Kashan, P.O.Box 87317-51167, Kashan, Iran

Email: `r.kazemi@kashanu.ac.ir`

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۸، شماره ۱ (۱۴۰۲)، صص. ۳۵-۵۵

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

همگرایی روش تکرار توانی برای ماتریس‌های تورنمنت و کاربردی از آن

امیرحسین نخودکار و رسول کاظمی*

چکیده. در این مقاله نشان می‌دهیم برای هر ماتریس تورنمنت با شعاع طیفی ناصفر، روش تکرار توانی برای یافتن بردار ویژهٔ نامنفی متناظر با مقدار ویژهٔ با بیشترین قدر مطلق، همگراست. کاربردی از این مطلب را نیز برای رده‌بندی بازیکن‌های تورنمنت نظیر ماتریس ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمه

فرض می‌کنیم A یک ماتریس مربعی باشد. منظور از مقدار ویژهٔ غالب A، مقدار ویژه‌ای مانند λ از آن است که برای هر مقدار ویژهٔ دیگر A مانند λ'، داشته باشیم $|\lambda'| < |\lambda|$. روش تکرار توانی روشی برای یافتن بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ غالب یک ماتریس (در صورت وجود) تحت شرایطی خاص است. در این روش، بردار ویژهٔ مذکور برابر با حد یک دنباله از بردارها است. به بیان دقیق‌تر، فرض می‌کنیم A از مرتبهٔ n و λ مقدار ویژهٔ غالب A باشد و v_0 یک بردار n–تایی ستونی ناصفر. برای هر عدد طبیعی k قرار می‌دهیم $v_k = \frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|}$، که درآن $\|.\|$ نشان‌دهنده‌ی یک نُرم دلخواه بر $\mathbb{R}^n$ است. در این‌صورت روش تکرار توانی، به دنبال شرایطی روی v_0 و A است که تحت آنها دنبالهٔ $\{v_k\}$ به یک بردار ویژهٔ نظیر λ همگرا باشد.

از مهم‌ترین شرایط روی A که تحت آن همگرایی روش تکرار توانی برای بردار v_0 مناسب، ثابت شده است می‌توان قطری‌پذیر بودن A را نام برد [۵، (۳.۱۰)]. همچنین، اگر تکرار جبری و هندسی λ برابر باشند و v_0 بر فضای ویژهٔ λ عمود نباشد، این روش همگراست [۸، (۱.۴)]. یادآوری می‌کنیم که منظور از تکرار هندسی یک مقدار ویژه، بعد فضای ویژهٔ متناظر با آن مقدار ویژه است. همچنین درجهٔ تکرار یک مقدار ویژه در چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس را تکرار جبری آن مقدار ویژه می‌نامیم.

منظور از یک ماتریس تورنمنت، یک ماتریس مربعی با درایه‌های صفر و یک مانند A است به‌طوری‌که

$$A + A^t = J - I,$$

عبارات و کلمات کلیدی: ماتریس تورنمنت، روش تکرار توانی، مقدار ویژهٔ غالب، بردار ویژهٔ پرون، مسألهٔ رده‌بندی.
دبیرتخصصی رابط: سعید اعظم
نوع مقاله: پژوهشی
* نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۱۷ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۴/۱۹
ارجاع به مقاله: ا. حسین نخودکار و ر. کاظمی، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره. ۱ (۱۴۰۲) ۳۵–۵۵.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563 .

که در آن A^t ترانهادهٔ A، I ماتریس همانی و J ماتریس مربعی از مرتبهٔ n است که همهٔ درایه‌های آن ۱ است. هر ماتریس تورنمنت را می‌توان به‌عنوان ماتریس نتایج یک لیگ با n بازیکن در نظر گرفت که در آن درایهٔ ij ماتریس ۱ است اگر و تنها اگر بازیکن i در مسابقه با بازیکن j پیروز شده باشد. در مورد ماتریس‌های تورنمنت مقالات متعددی از دیرباز نوشته شده و جنبه‌های مختلفی از آن مانند شعاع طیفی، بردارهای ویژه، روش‌های رده‌بندی بازیکن‌های نظیر و ... بررسی شده است. به‌عنوان مثال [۱، ۱۱] (و مراجع ذکر شده در آنها) را ببینید. در این مقاله ثابت می‌کنیم برای هر ماتریس تورنمنت، روش تکرار توانی همگراست. همچنین کاربردی از این همگرایی را در رده‌بندی بازیکن‌های نظیر ماتریس تورنمنت ارائه می‌دهیم. شایان ذکر است که در مقالات موجود در این باره، چه برای یافتن بردار ویژهٔ غالب و چه برای رده‌بندی بازیکن‌ها، با استفاده از بلوک‌بندی ماتریس، مسأله را تنها برای بلوک‌های تحویل‌ناپذیر بررسی می‌کنند. (به‌عنوان نمونه [۲، صفحه‌های ۸۸۳ و ۸۸۴] را ببینید). در این مقاله همگرایی روش تکرار توانی در حالت کلی بررسی شده است.

این مقاله را به ۶ بخش تقسیم نموده‌ایم. در بخش دوم مقدماتی در مورد ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر و اولیه بیان شده است. در بخش سوم ویژگی‌هایی از شعاع طیفی یک ماتریس که در ادامه به آن نیاز داریم را بررسی می‌کنیم. بخش چهارم به بیان تعمیمی از قضیهٔ شْتولتس[1]–چزارو[2] در باب دنباله‌ها اختصاص دارد. در بخش پنجم نتیجهٔ اصلی که همان همگرایی روش تکرار توانی برای ماتریس‌های تورنمنت است را بیان می‌کنیم. در نهایت در بخش ششم کاربردی از این نتیجه در رده‌بندی بازیکن‌های نظیر ماتریس تورنمنت ارائه می‌شود.

۲. ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر و اولیه

ماتریس مربعی P از مرتبهٔ n را یک ماتریس جایگشت می‌نامیم اگر سطرهای آن یک جایگشت از سطرهای ماتریس همانی باشند؛ یعنی جایگشت $\pi \in S_n$ موجود باشد که برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، سطر i–ام P با سطر $\pi(i)$–ام ماتریس همانی برابر شود. به‌طور معادل، P یک ماتریس جایگشت است اگر ستون‌های آن یک جایگشت از ستون‌های ماتریس همانی باشد. با ضرب کردن ماتریس جایگشت P از چپ (راست) در یک ماتریس مربعی، جایگشت نظیر P روی سطرهای (ستون‌های) A عمل می‌کند. به‌سادگی می‌توان دید برای هر ماتریس جایگشت P داریم $P^t = P^{-1}$؛ یعنی هر ماتریس جایگشت، متعامد است.

تعریف ۱.۲. ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n را تحویل‌پذیر می‌نامیم هرگاه ماتریس جایگشت P موجود باشد که

$$PMP^t = \left(\begin{smallmatrix} B & C \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right),$$

که در آن B و D دو ماتریس مربعی از مرتبه‌های ناصفر هستند. یک ماتریس مربعی که تحویل‌پذیر نباشد را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم.

توجه کنید که در تعریف بالا لزومی ندارد ماتریس‌های B، C و D ناصفر باشند. با استفاده از تعریف بالا و با استفاده از استقرا به سادگی نتیجه می‌شود که برای هر ماتریس مربعی M، ماتریس جایگشت P، عدد طبیعی r و ماتریس‌های M_{ij}، $1 \leqslant i,j \leqslant r$ وجود دارند به طوری‌که

$$PMP^t = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r1} & \cdots & M_{rr} \end{pmatrix},$$

[1] O. Stolz [2] E. Cesàro

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

که در آن M_{ij} برای $i > j$ ماتریس صفر و برای $i = j$ یک ماتریس (مربعی) تحویل‌ناپذیر است ([۴، (۶.۳.۸)] را ببینید). ماتریس‌های M_{11}، M_{22}، ... و M_{rr} را بلوک‌های تحویل‌ناپذیر M می‌نامیم. از آنجا که $P^t = P^{-1}$، مقادیر ویژهٔ ماتریس‌های M و PMP^t یکسان هستند. بنابراین مجموعهٔ مقادیر ویژهٔ M برابر است با اجتماع مجموعه‌های مقادیر ویژهٔ بلوک‌های تحویل‌ناپذیر آن.

حال ردهٔ مهمی از ماتریس‌ها موسوم به ماتریس‌های اولیه را معرفی می‌کنیم. توجه کنید که ماتریس M، نامنفی (مثبت) نامیده می‌شود اگر همهٔ درایه‌های آن نامنفی (مثبت) باشند.

تعریف ۲.۲. ماتریس مربعی نامنفی M را اولیه نامیم هرگاه عدد طبیعی m یافت شود که M^m مثبت باشد.

قضیهٔ معروف زیر نشان می‌دهد برای یک ماتریس، اولیه بودن شرط قوی‌تری از تحویل‌ناپذیری است.

قضیه ۳.۲. هر ماتریس اولیه، تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنیم M یک ماتریس تحویل‌پذیر باشد. در این‌صورت ماتریس جایگشت P موجود است که

$$PMP^t = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

که در آن B و D دو ماتریس مربعی از مرتبه‌های ناصفر هستند. بنابراین برای هر عدد طبیعی k، یک ماتریس C_k وجود دارد که

$$M^k = P^{-1}(PMP^t)^k P = P^{-1} \begin{pmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{pmatrix} P.$$

پس برای هر عدد طبیعی k، ماتریس M^k مثبت نیست؛ یعنی M اولیه نیست. □

قضیه ۴.۲. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت از مرتبهٔ n باشد. آن‌گاه A اولیه است اگر و تنها اگر $n \geqslant 4$ و A تحویل‌ناپذیر باشد.

اثبات. [۷، قضیهٔ ۱] را ببینید. □

با توجه به قضیهٔ ۴.۲ ماتریس‌های تورنمنت تحویل‌ناپذیری که اولیه نیستند، درست همان ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر از مرتبهٔ کوچکتر از ۴ هستند. این ماتریس‌ها را می‌توان به شکل زیر توصیف نمود:

(آ) از مرتبهٔ ۱ تنها یک ماتریس تورنمنت داریم که ماتریس صفر است و طبق تعریف، تحویل‌ناپذیر است.

(ب) از مرتبهٔ ۲ تنها دو ماتریس تورنمنت داریم که عبارتند از

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

واضح است که A تحویل‌پذیر است. همچنین برای ماتریس جایگشت $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ داریم $B = PAP^t$. بنابراین B نیز تحویل‌پذیر بوده و ماتریس تورنمنت تحویل‌ناپذیر از مرتبهٔ ۲ نداریم.

(پ) از مرتبهٔ ۳، هشت ماتریس تورنمنت داریم که عبارتند از

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

واضح است که A_1 تحویل‌پذیر است. با محاسبه‌ای ساده مشخص می‌شود ماتریس‌های A_2 تا A_6 را می‌توان به‌صورت PA_1P^t نوشت که P یک ماتریس جایگشت غیرهمانی از مرتبهٔ ۳ است. بنابراین این ماتریس‌ها نیز تحویل‌پذیرند و تنها دو ماتریس A_7 و A_8 باقی می‌مانند. به‌سادگی می‌توان دید برای هر ماتریس جایگشت P از مرتبهٔ ۳، $PA_7P^t = A_7$ یا $PA_7P^t = A_8$. پس این دو ماتریس تحویل‌ناپذیرند و بنا به قضیهٔ ۴.۲ ، این دو ماتریس اولیه نیستند.

۳. شعاع طیفی

فرض کنیم M یک ماتریس مربعی حقیقی باشد. شعاع طیفی M که با $\rho(M)$ نمایش داده می‌شود برابر با بیشترین مقدار قدرمطلق‌های مقادیر ویژهٔ M تعریف می‌شود. بنابراین برای هر مقدار ویژهٔ M مانند λ داریم $|\lambda| \leqslant \rho(M)$. همچنین دست کم یک مقدار ویژهٔ λ از M وجود دارد به طوری‌که $|\lambda| = \rho(M)$. توجه کنید که هر کدام از این مقادیر ویژه می‌توانند حقیقی یا غیرحقیقی باشند. واضح است که شعاع طیفی ماتریس M برابر است با بیشترین شعاع طیفی بلوک‌های تحویل‌ناپذیر آن.

قضیه ۱.۳. اگر M یک ماتریس اولیهٔ نامنفی باشد، آن‌گاه $\rho(M)$ مقدار ویژهٔ غالب M است.

اثبات. [۹، قضیهٔ ۱.۱] را ببینید. □

قضیه ۲.۳. (**پرون[۳]ـ فروبنیوس[۴]**) فرض کنیم M یک ماتریس تحویل‌ناپذیر نامنفی باشد. آن‌گاه $\rho(M)$ یک مقدار ویژهٔ M است و بردار ویژهٔ v نظیر $\rho(M)$ وجود دارد که مثبت است. همچنین، هر بردار ویژهٔ مثبت دیگر M مضربی از v است.

اثبات. [۴، قضیهٔ ۴.۴.۸] را ببینید. □

نمادگذاری ۳.۳. برای بردار $v \in \mathbb{R}^n$، مجموع قدرمطلق‌های مؤلفه‌های v را با $\|v\|_1$ نمایش می‌دهیم.

نتیجه ۴.۳. فرض کنیم M یک ماتریس تحویل‌ناپذیر نامنفی باشد. آن‌گاه، بردار ویژهٔ مثبت یکتای $R = (r_1, \dots, r_n)^t$ از M وجود دارد که $\|R\|_1 = 1$.

تعریف ۵.۳. فرض کنیم M یک ماتریس تحویل‌ناپذیر نامنفی باشد. بردار ویژهٔ R ذکر شده در نتیجهٔ ۴.۳ را بردار ویژهٔ پرون ماتریس M می‌نامیم.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم M یک ماتریس مربعی نامنفی باشد. آن‌گاه، $\rho(M)$ یک مقدار ویژهٔ M است و بردار ویژهٔ v نظیر $\rho(M)$ وجود دارد که نامنفی است.

اثبات. [۴، قضیهٔ ۱.۳.۸] را ببینید. □

قضیه ۷.۳. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت باشد. آن‌گاه $\rho(A)$ یک مقدار ویژهٔ A با تکرار هندسی ۱ است. همچنین یک بردار ویژهٔ نامنفی یکتای R نظیر $\rho(A)$ وجود دارد که $\|R\|_1 = 1$.

اثبات. طبق قضیهٔ ۶.۳، $\rho(A)$ یک مقدار ویژهٔ A است و یک بردار ویژهٔ نامنفی نظیر $\rho(A)$ مانند v وجود دارد. طبق [۶، قضیهٔ ۱.۳]، تکرار هندسی این مقدار ویژه برابر با ۱ است. بنابراین، هر بردار ویژهٔ دیگر A نظیر $\rho(A)$ مضربی از v است. پس یک بردار ویژهٔ نامنفی یکتای R نظیر $\rho(A)$ وجود دارد که $\|R\|_1 = 1$. □

[3] O. Perron [4] G. Frobenius

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

تعریف ۸.۳. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت باشد. بردار ویژهٔ R در قضیهٔ ۷.۳ را بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ A می‌نامیم.

لم ۹.۳. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت تحویل‌ناپذیر از مرتبهٔ n باشد. آن‌گاه یا $\rho(A) = ۰$ یا $\rho(A) = ۱$ و یا $\rho(A) > \sqrt[۳]{۲}$. به بیان دقیق‌تر:

۱) $\rho(A) = ۰$ اگر و تنها اگر $n = ۱$ و A ماتریس صفر باشد.
۲) $\rho(A) = ۱$ اگر و تنها اگر $n = ۳$. در این حالت برای هر مقدار ویژهٔ λ از A داریم $|\lambda| = ۱$.
۳) $\rho(A) > \sqrt[۳]{۲}$ اگر و تنها اگر $n \geqslant ۴$. در این‌حالت $\rho(A)$ مقدار ویژهٔ غالب A است.

اثبات. اگر $n = ۱$، آن‌گاه ماتریس A برابر با صفر است و $\rho(A) = ۰$. اگر $n = ۳$، آن‌گاه A یکی از دو ماتریس $A_۷$ یا $A_۸$ در انتهای بخش دوم است. چندجمله‌ای مشخصهٔ هر دو ماتریس $A_۷$ و $A_۸$ برابر است با $X^۳ - ۱$. بنابراین قدرمطلق هر مقدار ویژه از این دو ماتریس برابر ۱ است. اگر $n \geqslant ۴$، آنگاه $\rho(A) > \sqrt[۳]{۲}$ ([۳، صفحهٔ ۳۱۶] را ببینید). به‌علاوه، طبق قضیهٔ ۴.۲، A اولیه است. پس $\rho(A)$ مقدار ویژهٔ غالب A است. بنابراین استلزام‌های برگشت را در هر سه مورد ثابت کردیم. با در نظر گرفتن این سه استلزام و با توجه به اینکه از مرتبهٔ ۲ ماتریس تورنمنت تحویل‌ناپذیر نداریم، استلزام‌های رفت نیز به وضوح نتیجه خواهند شد. □

نمادگذاری ۱۰.۳. برای ماتریس دلخواه M، مجموع درایه‌های سطر i–ام M را با $s_i(M)$ نشان می‌دهیم و مجموع کل درایه‌های M را با $s(M)$.

تذکر ۱۱.۳. فرض کنیم M یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n و P یک ماتریس جایگشت از مرتبهٔ n باشد که متناظر با جایگشت $\pi \in S_n$ است. به‌سادگی می‌توان دید درایهٔ ij–ام ماتریس PMP^t همان درایهٔ $\pi(i)\pi(j)$–ام ماتریس M است. بنابراین $s(M) = s(PMP^t)$. به‌ویژه، اگر B یک بلوک تحویل‌ناپذیر M باشد، آن‌گاه $s(B) \leqslant s(M)$.

لم ۱۲.۳. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت باشد. آن‌گاه عدد حقیقی مثبت c وجود دارد که برای هر عدد صحیح نامنفی k، $s(A^k) \geqslant c\rho(A)^k$. به‌ویژه، اگر $\rho(A) \neq ۰$ آن‌گاه برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم $s(A^k) > ۰$.

اثبات. اگر $\rho(A) = ۰$ که حکم واضح است. پس فرض کنیم $\rho(A) \neq ۰$. گیریم B یک بلوک تحویل‌ناپذیر A باشد که $\rho(B) = \rho(A)$. واضح است که برای هر عدد صحیح نامنفی k، $s(A^k) \geqslant s(B^k)$. پس کافی است ثابت کنیم عدد مثبت c وجود دارد که برای هر عدد صحیح نامنفی k، $s(B^k) \geqslant c\rho(B)^k$. فرض کنیم $R = (r_۱, \dots, r_n)^t$ بردار ویژهٔ پرون B باشد. قرار می‌دهیم

$$\alpha = \max_{۱ \leqslant i \leqslant n} r_i, \quad \beta = \min_{۱ \leqslant i \leqslant n} r_i.$$

چون R یک بردار مثبت است، بنابر [۴، لم ۳۳.۱.۸] برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$ و هر عدد طبیعی k داریم

$$\frac{\beta}{\alpha}\rho(B)^k \leqslant s_i(B^k) \leqslant s(B^k).$$

با توجه به اینکه هر ماتریس مربعی به توان صفر را ماتریس همانی در نظر می‌گیریم، نامساوی‌های بالا برای $k = ۰$ نیز برقرار است. بنابراین حکم ثابت می‌شود. □

نمادگذاری ۱۳.۳. برای هر عدد طبیعی n، تنها یک ماتریس تورنمنت بالامثلثی وجود دارد که آن را با U_n نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی U_n برابر با ۱ و سایر درایه‌های آن برابر با صفر هستند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

لم ۱۴.۳. برای ماتریس تورنمنت A از مرتبهٔ n گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند:

(۱) $\rho(A)=0$؛

(۲) ماتریس جایگشت P وجود دارد که $PAP^t=U_n$؛

(۳) عدد طبیعی k وجود دارد که $A^k=0$.

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱): اگر $\rho(A)=0$، طبق لم ۹.۳ تمام بلوک‌های تحویل‌ناپذیر A ماتریس تورنمنت صفر (از مرتبهٔ ۱) هستند. بنابراین ماتریس جایگشت P وجود دارد که $P^tAP=U_n$.

(۳) $\Rightarrow$ (۲): با توجه به اینکه برای هر $k\geqslant n$ ماتریس U_n^k صفر است و $P^t=P^{-1}$ حکم واضح است.

(۱) $\Rightarrow$ (۳): گیریم عدد طبیعی k وجود دارد که $A^k=0$. بنابراین $\rho(A^k)=0$ که نتیجه می‌دهد $\rho(A)=0$، زیرا $\rho(A^k)=\rho(A)^k$ ([۴، صفحهٔ ۳۴۹] را ببینید). □

تعریف ۱۵.۳. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت از مرتبهٔ n باشد که $\rho(A)\neq 0$. برای هر عدد طبیعی k قرار می‌دهیم

$$v_k=\frac{A^kv_0}{\|A^kv_0\|_1},$$

که در آن

$$v_0=(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})^t\in\mathbb{R}^n.$$

می‌گوییم A در شرط توانی صدق می‌کند هرگاه دنبالهٔ $\{v_k\}$ به بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ A همگرا باشد. توجه کنید که بنابر لم ۱۴.۳ شرط $\rho(A)\neq 0$ تضمین می‌کند که برای هر عدد طبیعی k، $\|A^kv_0\|_1\neq 0$.

لم ۱۶.۳. ماتریس تورنمنت A از مرتبهٔ n با $\rho(A)\neq 0$ در شرط توانی صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر ماتریس جایگشت P از مرتبهٔ n، ماتریس PAP^t نیز در شرط توانی صدق کند.

اثبات. با توجه به اینکه وارون هر ماتریس جایگشت یک ماتریس جایگشت است، کافی است فقط استلزام رفت را ثابت کنیم. اگر R بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ A باشد، آن‌گاه PR بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ PAP^t خواهد بود. حال فرض کنیم دنبالهٔ $\{v_k\}$ با ضابطهٔ $v_k=\frac{A^kv_0}{\|A^kv_0\|_1}$ به بردار R همگرا باشد. برای هر عدد طبیعی k قرار می‌دهیم

$$w_k=\frac{(PAP^t)^kv_0}{\|(PAP^t)^kv_0\|_1}.$$

آن‌گاه از تساوی $P^t=P^{-1}$، داریم

$$\lim_{k\to\infty}w_k=\lim_{k\to\infty}\frac{(PAP^t)^kv_0}{\|(PAP^t)^kv_0\|_1}=\lim_{k\to\infty}\frac{PA^kP^tv_0}{\|PA^kP^tv_0\|_1}.$$

از طرفی، $P^tv_0=v_0$ و

$$\|PA^kP^tv_0\|_1=\frac{1}{n}s(PA^kP^t)=\frac{1}{n}s(A^k)=\|A^kv_0\|_1.$$

بنابراین

$$\lim_{k\to\infty}w_k=\lim_{k\to\infty}\frac{PA^kP^tv_0}{\|PA^kP^tv_0\|_1}=\lim_{k\to\infty}\frac{PA^kv_0}{\|A^kv_0\|_1}=PR.$$

□

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

لم ۱۷.۳. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت از مرتبهٔ n باشد که $\rho(A) \neq 0$. برای هر عدد طبیعی k قرار می‌دهیم

$$v_k = \frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_1},$$

که در آن

$$v_0 = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^t \in \mathbb{R}^n.$$

اگر دنبالهٔ $\{v_k\}$ همگرا باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{\frac{s(A^{k+1})}{s(A^k)}\}$ نیز همگراست. همچنین، اگر قرار دهیم $\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{s(A^{k+1})}{s(A^k)}$ و $v = \lim_{k\to\infty} v_k$، آنگاه λ یک مقدار ویژهٔ A و v بردار ویژهٔ نظیر λ است. به‌ویژه، $\lambda = \rho(A)$ اگر و تنها اگر v بردار ویژهٔ پرون تعمیم یافتهٔ A باشد؛ یا هم‌ارز آن، A در شرط توانی صدق کند.

اثبات. برای هر عدد طبیعی k داریم

$$Av_k = \frac{A^{k+1} v_0}{\|A^k v_0\|_1} = \frac{\|A^{k+1} v_0\|_1}{\|A^k v_0\|_1} \frac{A^{k+1} v_0}{\|A^{k+1} v_0\|_1}.$$

با محاسبهٔ حد دنبالهٔ بالا نتیجه می‌شود که

$$Av = \lim_{k\to\infty} \frac{\|A^{k+1} v_0\|_1}{\|A^k v_0\|_1} v. \qquad (1)$$

بنابراین $\lim_{k\to\infty} \frac{\|A^{k+1} v_0\|_1}{\|A^k v_0\|_1}$ موجود است. توجه کنید که $\|A^k v_0\|_1 = \frac{1}{n} s(A^k)$. پس حکم از (۱) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۱۸.۳. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت باشد که $\rho(A) \neq 0$. اگر $\rho(A)$ مقدار ویژهٔ غالب A باشد و تکرار هندسی و جبری $\rho(A)$ با هم برابر باشند، آنگاه A در شرط توانی صدق می‌کند.

اثبات. حکم به سادگی از [۸، قضیهٔ ۱.۴] نتیجه می‌شود. □

تذکر ۱۹.۳. با توجه به قضیهٔ ۷.۳، شرط برابر بودن تکرار هندسی و جبری $\rho(A)$ در قضیهٔ ۱۸.۳، به این معنی است که تکرار جبری $\rho(A)$ برابر ۱ است.

قضیه ۲۰.۳. هر ماتریس تورنمنت اولیه در شرط توانی صدق می‌کند.

اثبات. [۴، صفحهٔ ۵۳۴] را ببینید. □

۴. قضیهٔ شْتولتس–چزارو و تعمیمی از آن

در این بخش قضیه‌ای موسوم به قضیهٔ شْتولتس–چزارو در باب دنباله‌ها و همچنین یک تعمیم از آن را بیان می‌کنیم که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱.۴. **(شْتولتس–چزارو)** فرض کنیم $\{a_k\}$ و $\{b_k\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند که در آن $\{b_k\}$ دنباله‌ای مثبت است و $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} b_i = \infty$. اگر دنبالهٔ $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_k}{b_1 + \cdots + b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

اثبات. [۱۰، صفحهٔ ۱۸۱] را ببینید. $\square$

قضیهٔ زیر تعمیمی از قضیهٔ شْتولتس–چزارو است. اثباتی که ارائه می‌شود نیز تعمیمی از اثبات ارائه شده در [۱۰] است.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $\{a_k\}$ یک دنبالهٔ دلخواه از اعداد حقیقی و $\{b_k\}$ و $\{c_k\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشند. قرار دهید $A_k=\sum_{i=0}^{k}a_ic_{k-i}$ و $B_k=\sum_{i=0}^{k}b_ic_{k-i}$. اگر برای هر عدد صحیح نامنفی i، $\lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-i}}{B_k}=0$، آنگاه

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}\leqslant\liminf_{k\to\infty}\frac{A_k}{B_k}\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{A_k}{B_k}\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}. \tag{۲}$$

به‌ویژه، اگر دنبالهٔ $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{k\to\infty}\frac{A_k}{B_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}. \tag{۳}$$

اثبات. کافی است نامساوی سوم از (۲) را ثابت کنیم. در این‌صورت نامساوی اول در (۲) با قرار دادن $-a_k$ به‌جای a_k در نامساوی سوم به دست می‌آید. همچنین (۲)، به وضوح (۳) را نتیجه می‌دهد.
قرار دهید $L=\limsup_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}$. حکم برای $L=+\infty$ واضح است. پس فرض کنید L متناهی یا برابر با $-\infty$ باشد. عدد حقیقی دلخواه $l>L$ را در نظر بگیرید. عدد طبیعی m وجود دارد به طوری‌که برای هر $k>m$، $\frac{a_k}{b_k}\leqslant l$. بنابراین برای هر $k>m$

$$A_k=\sum_{i=0}^{k}a_ic_{k-i}\leqslant\sum_{i=0}^{m}a_ic_{k-i}+l\sum_{i=m+1}^{k}b_ic_{k-i}=\sum_{i=0}^{m}a_ic_{k-i}+lB_k-l\sum_{i=0}^{m}b_ic_{k-i},$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{A_k}{B_k}\leqslant l+\frac{\sum_{i=0}^{m}(a_i-lb_i)c_{k-i}}{B_k}. \tag{۴}$$

با توجه به ثابت بودن m و این فرض که برای هر عدد صحیح نامنفی i داریم $\lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-i}}{B_k}=0$، نتیجه می‌شود

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{m}(a_i-lb_i)c_{k-i}}{B_k}=0.$$

پس از نامساوی (۴) داریم:

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{A_k}{B_k}\leqslant l.$$

با توجه به اینکه $l>L$ دلخواه انتخاب شده بود، نامساوی (۲) ثابت می‌شود. $\square$

تذکر ۳.۴. قضیهٔ ۲.۴ در حالت خاصی‌که $\{c_k\}$ دنبالهٔ ثابت ۱ باشد، همان قضیهٔ ۱.۴ است.

تذکر ۴.۴. قضیهٔ ۲.۴ بدون این فرض که برای هر عدد صحیح نامنفی i، $\lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-i}}{B_k}=0$ ممکن است برقرار نباشد. به‌عنوان مثال، برای هر عدد طبیعی k قرار دهید $a_k=1$، $b_k=2^k$ و $c_k=3^k$. در این‌صورت $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=0$. همچنین

$$A_k=\sum_{i=0}^{k}3^i=\frac{3^{k+1}-1}{2},$$

$$B_k=\sum_{i=0}^{k}2^i3^{k-i}=3^k\sum_{i=0}^{k}(\frac{2}{3})^i=3^k\frac{1-(\frac{2}{3})^{k+1}}{\frac{1}{3}}=3^{k+1}(1-(\frac{2}{3})^{k+1}).$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

بنابراین $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}\neq\frac{1}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{A_k}{B_k}$. توجه کنید که برای هر عدد صحیح نامنفی i، $\lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-i}}{B_k}=(\frac{1}{2})^{i+1}\neq 0$.

تذکر ۵.۴. در قضیهٔ ۴.۲ این شرط که «برای هر عدد صحیح نامنفی i، $\lim_{k\to\infty}\frac{c_{k-i}}{B_k}=0$» را می‌توان با شرط قوی‌تر «صعودی بودن دنبالهٔ $\{c_k\}$ و $\lim_{k\to\infty}\frac{c_k}{B_k}=0$» جایگزین کرد.

۵. نتایج اصلی

در این بخش نشان می‌دهیم هر ماتریس تورنمنت A با شعاع طیفی ناصفر در شرط توانی صدق می‌کند. برهانی که ارائه خواهیم داد بر پایهٔ استقرا روی تکرار جبری $\rho(A)$ است. برای این کار از بلوک‌بندی ماتریس A به ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر استفاده می‌کنیم. طبق قضیهٔ ۳.۲۰، هر ماتریس تورنمنت اولیه در شرط توانی صدق می‌کند. از طرفی، تنها ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر با شعاع طیفی ناصفر که اولیه نیستند، ماتریس‌های A_7 و A_8 هستند که در انتهای بخش دوم معرفی شدند. پس این ماتریس‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم. شایان ذکر است که اگر A یک ماتریس تورنمنت از مرتبهٔ n باشد، آنگاه به‌راحتی می‌توان دید که برای هر ماتریس جایگشت P از مرتبهٔ n، PAP^t نیز یک ماتریس تورنمنت است. در این‌حالت، اگر A تحویل‌پذیر باشد و P را طوری انتخاب کنیم که PAP^t یک ماتریس بلوکی به شکل

$$PAP^t=\begin{pmatrix} B & C\\ 0 & D\end{pmatrix},$$

باشد، آنگاه همهٔ درایه‌های ماتریس C برابر با ۱ است. بحث خود را با بررسی توان‌های این ماتریس‌ها شروع می‌کنیم.

گزاره ۱.۵. فرض کنیم $A=\begin{pmatrix} B & J\\ 0 & C\end{pmatrix}$ یک ماتریس از مرتبهٔ n باشد که در آن B یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ناصفر m، C یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ناصفر $n-m$ و J ماتریسی $m\times(n-m)$ است که همهٔ درایه‌های آن برابر با ۱ هستند. آنگاه برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم:

$$s_i(A^k)=\begin{cases} s_i(B^k)+\sum_{r=0}^{k-1}s_i(B^{k-r-1})s(C^r), & 1\leqslant i\leqslant m,\\ s_{i-m}(C^k), & m+1\leqslant i\leqslant n.\end{cases}$$

اثبات. با استقرا روی k می‌توان نشان داد $A^k=\begin{pmatrix} B^k & D_k\\ 0 & C^k\end{pmatrix}$، که در آن

$$D_k=\sum_{r=0}^{k-1}B^{k-r-1}JC^r.$$

برای $m+1\leqslant i\leqslant n$، سطر iـام A^k برابر با سطر $(i-m)$ـام C^k است و درنتیجه $s_i(A^k)=s_{i-m}(C^k)$. پس فرض کنیم $1\leqslant i\leqslant m$. برای هر $1\leqslant j\leqslant n-m$، هر $k\geqslant 1$ و هر $0\leqslant r\leqslant k-1$، درایهٔ ijـام از ماتریس $B^{k-r-1}JC^r$ برابر است با حاصل‌ضرب مجموع سطر iـام B^{k-r-1} در مجموع ستون jـام C^r. با جمع کردن این مقادیر برای $j=1,\dots,n-m$ نتیجه می‌گیریم

$$s_i(B^{k-r-1}JC^r)=s_i(B^{k-r-1})s(C^r).$$

بنابراین

$$s_i(A^k)=s_i(B^k)+\sum_{r=0}^{k-1}s_i(B^{k-r-1})s(C^r).$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

$\square$

نتیجه ۲.۵. با شرایط گزارهٔ ۱.۵، قرار می‌دهیم $v_\circ = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^t \in \mathbb{R}^n$. آن‌گاه، برای هر عدد طبیعی k، مؤلفه‌ی iـام بردار $\frac{A^k v_\circ}{\|A^k v_\circ\|_1}$ برای $1 \leqslant i \leqslant m$ برابر است با

$$\frac{s_i(B^k) + \sum_{r=\circ}^{k-1} s_i(B^{k-r-1}) s(C^r)}{s(B^k) + \sum_{r=\circ}^{k-1} s(B^{k-r-1}) s(C^r) + s(C^k)},$$

و برای $m+1 \leqslant i \leqslant n$ برابر است با

$$\frac{s_{i-m}(C^k)}{s(B^k) + \sum_{r=\circ}^{k-1} s(B^{k-r-1}) s(C^r) + s(C^k)}.$$

اثبات. مؤلفه‌ی iـام بردار $A^k v_\circ$ برابر است با $\frac{1}{n} s_i(A^k)$. همچنین داریم

$$\|A^k v_\circ\|_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i(A^k) = \frac{1}{n} s(A^k).$$

بنابراین حکم به راحتی از گزارهٔ ۱.۵ نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۳.۵. فرض کنیم B یک ماتریس تورنمنت تحویل‌ناپذیر از مرتبهٔ ۳ باشد. برای عدد صحیح نامنفی n، قرار می‌دهیم $A = \left(\begin{smallmatrix} B & J \\ \circ & U_n \end{smallmatrix}\right)$ که در آن J یک ماتریس $3 \times n$ است که همهٔ درایه‌هایش برابر ۱ است. در این‌صورت عدد حقیقی مثبت α وجود دارد که برای هر عدد صحیح $k \geqslant n$،

$$s_i(A^k) = \begin{cases} \alpha, & 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ \circ, & 4 \leqslant i \leqslant n+3. \end{cases}$$

به‌ویژه، $s(A^k) = 3\alpha$. همچنین A در شرط توانی صدق می‌کند.

اثبات. بنابر گزارهٔ ۱.۵، $s_i(A^k)$ برای $i \leqslant 3$ برابر است با

$$s_i(B^k) + \sum_{r=\circ}^{k-1} s_i(B^{k-r-1}) s(U_n^r),$$

و برای $i > 3$ برابر است با $s_{i-3}(U_n^k)$. چنانچه قبلاً دیدیم B یکی از ماتریس‌های A_7 یا A_8 در بخش دوم است. پس برای هر عدد صحیح نامنفی r داریم $s_i(B^r) = 1$. همچنین برای هر $r \geqslant n$ ماتریس U_n^r برابر صفر است. بنابراین اگر $k \geqslant n$، $s_i(A^k)$ برای $i \leqslant 3$ برابر است با

$$s_i(B^k) + \sum_{r=\circ}^{n-1} s_i(B^{k-r-1}) s(U_n^r) + \sum_{r=n}^{k-1} s_i(B^{k-r-1}) s(U_n^r) = 1 + \sum_{r=\circ}^{n-1} s(U_n^r),$$

و برای $i > 3$ برابر با صفر است. توجه کنید که $\alpha := 1 + \sum_{r=\circ}^{n-1} s(U_n^r)$ عددی ثابت است. بنابراین قسمت اول حکم ثابت می‌شود. حال واضح است که دنبالهٔ $\{\frac{A^k v_\circ}{\|A^k v_\circ\|_1}\}$ به بردار

$$R = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \circ, \dots, \circ),$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

همگراست. با توجه به این‌که $\lim_{k\to\infty}\frac{\|A^{k+1}v_0\|_1}{\|A^kv_0\|_1}=1=\rho(A)$، طبق لم ۱۷.۳، A در شرط توانی صدق می‌کند. $\square$

قضیهٔ ۱۸.۳ را می‌توان به شکل قوی‌تری با حذف شرط غالب بودن $\rho(A)$ به شکل زیر بیان نمود (تذکر ۱۹.۳ را نیز ببینید).

گزاره ۴.۵. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت باشد که $\rho(A)\neq 0$. اگر تکرار جبری $\rho(A)$ برابر ۱ باشد، آن‌گاه A در شرط توانی صدق می‌کند.

اثبات. فرض کنیم A_1، A_2، ... و A_r بلوک‌های تحویل‌ناپذیر A باشند. آن‌گاه $\rho(A)$ برابر با بیشترین مقدار $\rho(A_i)$ برای $1\leqslant i\leqslant r$ است. از آنجا که تکرار جبری $\rho(A)$ برابر ۱ است، عدد یکتای $1\leqslant l\leqslant r$ وجود دارد که $\rho(A_l)=\rho(A)$ و برای هر $j\neq l$ داریم $\rho(A_j)<\rho(A)$. نخست فرض می‌کنیم $\rho(A)\neq 1$. با استفاده از لم ۹.۳ نتیجه می‌شود مرتبهٔ A_l حداقل ۴ بوده و $\rho(A_l)$ مقدار ویژهٔ غالب A_l است. پس $\rho(A)$ مقدار ویژهٔ غالب A است. همچنین طبق قضیهٔ ۷.۳، تکرار هندسی $\rho(A)$ برابر ۱ است. بنابراین قضیهٔ ۱۸.۳ نتیجه می‌دهد که A در شرط توانی صدق می‌کند.
حال فرض کنیم $\rho(A)=1$. با استفاده از لم ۹.۳ نتیجه می‌شود A_l از مرتبهٔ ۳ و بقیهٔ بلوک‌ها از مرتبهٔ ۱ (یعنی ماتریس صفر) هستند. بنابراین ماتریس A را می‌توان به شکل

$$A=\begin{pmatrix} U_n & J_1 & J_2\\ 0 & A_l & J_3\\ 0 & 0 & U_m\end{pmatrix},$$

نوشت که در آن $n=l-1$، $m=r-l$ و J_1، J_2 و J_3 ماتریس‌هایی هستند که همهٔ درایه‌هایشان برابر ۱ است. قرار می‌دهیم $B=\begin{pmatrix} A_l & J_3\\ 0 & U_m\end{pmatrix}$ و $J=(J_1\ J_2)$. آن‌گاه

$$A=\begin{pmatrix} U_n & J\\ 0 & B\end{pmatrix}.$$

بنابر گزارهٔ ۱.۵، برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم

$$s_i(A^k)=\begin{cases} s_i(U_n^k)+\sum_{r=0}^{k-1}s_i(U_n^{k-r-1})s(B^r), & i\leqslant n\\ s_{i-n}(B^k), & i>n\end{cases}$$

نخست فرض می‌کنیم $i>n$. طبق لم ۳.۵، عدد حقیقی α وجود دارد که

$$s_{i-n}(B^k)=\begin{cases}\alpha, & i-n\leqslant 3\\ 0, & i-n>3.\end{cases}\tag{۵}$$

پس برای هر عدد صحیح نامنفی k و هر $i>n$، مؤلفهٔ iـام بردار $\frac{A^kv_0}{\|A^kv_0\|_1}$ ثابت است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

حال فرض کنیم $i \leqslant n$. برای $k \geqslant n$، ماتریس U_n^k صفر است. همچنین اگر $k \geqslant 2n$، آن‌گاه برای هر $r \leqslant n-1$ داریم $k-r-1 \geqslant n$. با استفادهٔ دوباره از لم ۳.۵ نتیجه می‌شود که $s(B^{k-r-1}) = 3\alpha$. بنابراین برای هر $k \geqslant 2n$،

$$\begin{aligned} s_i(A^k) &= s_i(U_n^k) + \sum_{r=0}^{k-1} s_i(U_n^{k-r-1}) s(B^r) \\ &= s_i(U_n^k) + \sum_{r=0}^{k-1} s_i(U_n^r) s(B^{k-r-1}) \\ &= s_i(U_n^k) + \sum_{r=0}^{n-1} s_i(U_n^r) s(B^{k-r-1}) + \sum_{r=n}^{k-1} s_i(U_n^r) s(B^{k-r-1}) \\ &= 0 + \sum_{r=0}^{n-1} 3\alpha s_i(U_n^r) + 0 \\ &= 3\alpha \sum_{r=0}^{n-1} s_i(U_n^r). \end{aligned} \tag{6}$$

توجه کنید که مقدار به‌دست آمده در تساوی (۶) عددی ثابت است. پس برای هر $k \geqslant 2n$ و هر $i \leqslant n$ نیز مؤلفهٔ iـام بردار $\frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_1}$ ثابت است. بنابراین تمامی مؤلفه‌های بردار $\frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_1}$ برای $k \geqslant 2n$ ثابت بوده و دنبالهٔ $\{\frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_1}\}$ همگراست. همچنین داریم $\rho(A) = 1 = \frac{\|A^{k+1} v_0\|_1}{\|A^k v_0\|_1}$. بنابراین طبق لم ۱۷.۳، A در شرط توانی صدق می‌کند. □

گزاره ۵.۵. فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} B & J \\ 0 & C \end{pmatrix}$ یک ماتریس تورنمنت از مرتبهٔ n باشد که در آن B یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ناصفر m است، C یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ناصفر $n-m$ و J ماتریسی $m \times (n-m)$ است که همهٔ درایه‌های آن برابر با ۱ هستند. اگر $\rho(B) = \rho(C) \neq 0$ و B و C در شرط توانی صدق کنند، آن‌گاه ماتریس A نیز در شرط توانی صدق می‌کند.

اثبات. فرض کنیم $R_B = (r_1, \ldots, r_m)^t$ و $R_C = (r_{m+1}, \ldots, r_n)^t$ به ترتیب بردارهای ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ B و C باشند. پس $BR_B = \rho(B) R_B$ و $CR_C = \rho(C) R_C$. از آنجایی که $\rho(A) = \rho(B) = \rho(C)$، به‌راحتی می‌توان دید که بردار

$$R = (r_1, \ldots, r_m, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^n,$$

یک بردار ویژهٔ A نظیر $\rho(A)$ است. با توجه به یکتایی بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافته و این‌که $\|R\|_1 = 1$، نتیجه می‌شود که R بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ A است. قرار می‌دهیم $v_0 = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^t \in \mathbb{R}^n$. باید نشان دهیم دنبالهٔ $\{\frac{A^k v_0}{\|A^k v_0\|_1}\}$ به R همگراست. برای هر عدد طبیعی k و هر $1 \leqslant i \leqslant m$ قرار می‌دهیم

$$a_k^{(i)} = s_i(B^k), \quad b_k = s(B^k), \quad c_k = s(C^k).$$

با توجه به نتیجهٔ ۲.۵ باید ثابت کنیم برای $1 \leqslant i \leqslant m$ دنبالهٔ $\{d_k^{(i)}\}$ با ضابطهٔ

$$d_k^{(i)} = \frac{a_k^{(i)} + \sum_{r=0}^{k-1} a_{k-r-1}^{(i)} c_r}{b_k + \sum_{r=0}^{k-1} b_{k-r-1} c_r + c_k}, \tag{7}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

به r_i و برای $m+1 \leqslant i \leqslant n$ دنبالهٔ

$$\left\{ \frac{s_{i-m}(C^k)}{b_k + \sum_{r=0}^{k-1} b_{k-r-1} c_r + c_k} \right\},$$

به صفر همگراست. ابتدا فرض کنیم $m+1 \leqslant i \leqslant n$. آن‌گاه

$$0 \leqslant s_{i-m}(C^k) \leqslant s(C^k) = c_k.$$

همچنین با تغییر اندیس داریم

$$\sum_{r=0}^{k-1} b_{k-r-1} c_r = \sum_{r=0}^{k-1} b_r c_{k-r-1}.$$

بنابراین کافی است نشان دهیم دنبالهٔ $\{e_k\}$ با ضابطهٔ

$$e_k := \frac{c_k}{b_k + \sum_{r=0}^{k-1} b_r c_{k-r-1} + c_k},$$

به صفر همگراست. حکم قوی‌تری را ثابت می‌کنیم. گیریم j یک عدد صحیح نامنفی باشد. نشان می‌دهیم دنبالهٔ $\{f_k^{(j)}\}$ با ضابطهٔ

$$f_k^{(j)} := \frac{c_{k-j}}{b_k + \sum_{r=0}^{k-1} b_r c_{k-r-1} + c_k},$$

به صفر همگراست.

طبق لم ۳.۱۲، دنباله‌های $\{b_k\}$ و $\{c_k\}$ مثبت هستند. فرض کنیم l یک عدد طبیعی دلخواه باشد. آن‌گاه برای هر $k \geqslant l+1$،

$$f_k^{(j)} \leqslant \frac{c_{k-j}}{\sum_{r=0}^{l} b_r c_{k-r-1}}.$$

بنا بر لم ۳.۱۲، عدد حقیقی مثبت α وجود دارد که برای هر عدد صحیح نامنفی k، $b_k \geqslant \alpha\rho(B)^k$. بنابراین برای هر $k \geqslant l+1$،

$$f_k^{(j)} \leqslant \frac{c_{k-j}}{\alpha \sum_{r=0}^{l} \rho(B)^r c_{k-r-1}} = \frac{1}{\alpha \sum_{r=0}^{l} \rho(B)^r \frac{c_{k-r-1}}{c_{k-j}}}.$$

از طرفی طبق لم ۳.۱۷

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s(C^k)}{s(C^{k-1})} = \rho(C) = \rho(B).$$

بنابراین برای هر عدد صحیح نامنفی r

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_{k-j}}{c_{k-r-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{s(C^{k-j})}{s(C^{k-r-1})} = \rho(B)^{r-j},$$

که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha \sum_{r=0}^{l} \rho(B)^r \frac{c_{k-r-1}}{c_{k-j}}} = \frac{1}{\alpha \sum_{r=0}^{l} \rho(B)^j}.$$

از آنجا که $\rho(B) \neq 0$، طبق لم ۳.۹ داریم $\rho(B) \geqslant 1$. بنابراین $\lim_{k\to\infty} f_k^{(j)} \leqslant \frac{1}{\alpha(l+1)}$. چون l دلخواه انتخاب شده بود، نتیجه می‌شود که $\lim_{k\to\infty} f_k^{(j)} = 0$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

حال فرض کنید $1 \leqslant i \leqslant m$. نشان می‌دهیم دنبالهٔ $\{d_k^{(i)}\}$ در (۷) به r_i همگراست. قرار دهید

$$a_{-1}^{(i)} = b_{-1} = c_{-1} = 1.$$

همچنین برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$ و هر عدد طبیعی k قرار دهید

$$g_k^{(i)} = \frac{\sum_{r=-1}^{k} a_{k-r-1}^{(i)} c_r}{\sum_{r=-1}^{k} b_{k-r-1} c_r} = \frac{a_k^{(i)} + \sum_{r=0}^{k-1} a_{k-r-1}^{(i)} c_r + c_k}{b_k + \sum_{r=0}^{k-1} b_{k-r-1} c_r + c_k} = d_k^{(i)} + e_k.$$

با توجه به اینکه نشان دادیم e_k به صفر همگراست، کافی است ثابت کنیم برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$، دنبالهٔ $\{g_k^{(i)}\}$ به $\{r_i\}$ همگراست. از آنجایی که B در شرط توانی صدق می‌کند، پس

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k^{(i)}}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{s_i(B^k)}{s(B^k)} = r_i.$$

از طرفی، ثابت کردیم برای هر عدد صحیح نامنفی j،

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_{k-j}}{\sum_{r=-1}^{k} b_r c_{k-r-1}} = \lim_{k\to\infty} f_k^{(j)} = 0.$$

بنابراین طبق قضیهٔ ۲.۴ برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$،

$$\lim_{k\to\infty} g_k^{(i)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{r=-1}^{k} a_r^{(i)} c_{k-r-1}}{\sum_{r=-1}^{k} b_r c_{k-r-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k^{(i)}}{b_k} = r_i, \tag{8}$$

و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۶.۵. فرض کنیم A یک ماتریس تورنمنت از مرتبهٔ n باشد. اگر $\rho(A) \neq 0$، آن‌گاه A در شرط توانی صدق می‌کند.

اثبات. حکم را با استقرا روی تکرار جبری $\rho(A)$ ثابت می‌کنیم. اگر تکرار جبری $\rho(A)$ برابر با ۱ باشد، آن‌گاه حکم از گزارهٔ ۴.۵ نتیجه می‌شود. فرض کنیم هر ماتریس تورنمنت که شعاع طیفی ناصفر دارد و تکرار جبری آن برابر l است، در شرط توانی صدق کند. گیریم تکرار جبری $\rho(A)$ برابر با $l+1$ باشد. بنابراین یک ماتریس جایگشت P وجود دارد که PAP^t تجزیه‌ای به شکل $PAP^t = \begin{pmatrix} B & J \\ 0 & C \end{pmatrix}$ دارد که در آن B یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ناصفر m با شرط $\rho(B) = \rho(A)$ و با تکرار جبری ۱، C یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ ناصفر $n-m$ با شرط $\rho(C) = \rho(A)$ و با تکرار جبری l و J ماتریسی $m \times (n-m)$ است که همهٔ درایه‌های آن برابر با ۱ هستند. بنابر فرض، B و C در شرط توانی صدق می‌کنند. پس طبق گزارهٔ ۵.۵، PAP^t نیز در شرط توانی صدق می‌کند. بنابر لم ۱۶.۳، ماتریس A نیز در شرط توانی صدق می‌کند. □

۶. کاربردی در مسألهٔ رده‌بندی

فرض کنیم n بازیکن در یک لیگ دوبه‌دو با هم مسابقه داده‌اند و نتیجهٔ هر بازی برای هر بازیکن شکست یا پیروزی است (یعنی نتیجهٔ مساوی نداریم). گیریم G گراف جهت‌دار متناظر با نتایج این لیگ و $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ماتریس مجاورت گراف G است؛ یعنی $a_{ij} = 1$ اگر و تنها اگر بازیکن i بازیکن j را شکست داده باشد. در این‌صورت A یک ماتریس تورنمنت از مرتبهٔ n است. مجموع عناصر سطر iـام A برابر با تعداد کل بردهای بازیکن i است. به‌همین ترتیب حاصل‌ضرب $a_{ik}a_{kj}$ ناصفر است اگر و تنها اگر بازیکن i بر بازیکن k و بازیکن k بر بازیکن j پیروز شده باشد؛ یعنی بازیکن i با یک واسطه بازیکن j

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

را برده باشد. پس درایهٔ ij از ماتریس $A^{۲}$ برابر با تعداد بردهای بازیکن i از بازیکن j با یک واسطه است. بنابراین مجموع عناصر سطر i–ام ماتریس $A^{۲}$ برابر با تعداد کل بردهای با یک واسطهٔ بازیکن i است. با همین استدلال، برای هر عدد طبیعی k، مجموع سطر i–ام ماتریس A^k برابر با تعداد کل بردهای با k واسطهٔ بازیکن i است. یک روش برای رده‌بندی بازیکن‌ها، شمارش همهٔ بردهای با واسطه و بدون واسطه است؛ یعنی مجموع عناصر سطر i–ام ماتریس $A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots$. اگر قرار دهیم $X = (۱, ۱, \dots, ۱)^t \in \mathbb{R}^n$، آنگاه

$$(A + A^{۲} + A^{۳} + \cdots)X,$$

برداری است که مؤلفه‌ی i–ام آن مجموع تعداد بردهای با واسطه و بدون واسطهٔ بازیکن i را نشان می‌دهد. پس بازیکن i رتبهٔ بهتری از بازیکن j خواهد داشت اگر و تنها اگر مؤلفهٔ i–ام بردار فوق از مؤلفهٔ j–ام آن بیشتر باشد. واضح است که برای چنین برداری مسألهٔ همگرایی پیش می‌آید. در واقع اعداد بردار حاصل در حالت کلی ممکن است به بینهایت واگرا باشند. برای حل این مشکل یک راه این است که ماتریس A را با ضریبی از آن جایگزین کنیم که ماتریس حاصل شعاع طیفی کوچکتر از ۱ داشته باشد. این شرط تضمین خواهد کرد که مجموع همگرا باشد (برای توضیحات بیشتر [۱۱] را ببینید).

راه دیگری که در این بخش پیشنهاد می‌دهیم این است که در هر مرحله، بردار به‌دست آمده را طوری انتخاب کنیم که مجموع درایه‌هایش برابر ۱ باشد. واضح است که این کار تأثیری در رده‌بندی به‌دست آمده ندارد. بنابراین برای شروع به‌جای بردار X از بردار n–تایی

$$v_{۰} = \frac{۱}{n}X = (\frac{۱}{n}, \dots, \frac{۱}{n})^t,$$

استفاده می‌کنیم. همچنین برای هر عدد طبیعی k قرار می‌دهیم

$$w_k = \frac{(A + \cdots + A^k)v_{۰}}{\|(A + \cdots + A^k)v_{۰}\|_{۱}}.$$

در این‌صورت قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۱.۶. اگر $\rho(A) \neq ۰$، دنبالهٔ $\{w_k\}$ به بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ A همگراست.

اثبات. برای اثبات، ابتدا توجه کنید که در قضیهٔ ۱.۴ می‌توان یک دنباله از بردارها را جایگزین دنبالهٔ $\{a_k\}$ نمود. حال برای هر عدد صحیح نامنفی k قرار می‌دهیم $a_k = A^k v_{۰}$ و $b_k = \|A^k v_{۰}\|_{۱}$. با توجه به اینکه درایه‌های $A^k v_{۰}$ برای هر k نامنفی هستند، داریم:

$$b_{۱} + \cdots + b_k = \|Av_{۰}\|_{۱} + \cdots + \|A^k v_{۰}\|_{۱} = \|(A + \cdots + A^k)v_{۰}\|_{۱}.$$

بنابراین

$$w_k = \frac{a_{۱} + \cdots + a_k}{b_{۱} + \cdots + b_k}.$$

با توجه به قضیهٔ ۶.۵ دنبالهٔ $\{\frac{a_k}{b_k}\}$ به بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ A همگراست. بنابراین دنبالهٔ $\{w_k\}$ نیز طبق قضیهٔ ۱.۴ به بردار ویژهٔ پرون تعمیم‌یافتهٔ A همگراست. □

تذکر ۲.۶. در حالتی‌که $\rho(A) = ۰$، طبق لم ۱۴.۳، ماتریس جایگشت P وجود دارد که $PAP^t = U_n$. توجه کنید که مسألهٔ رده‌بندی برای ماتریس U_n بدیهی است. درواقع برای هر $i > j$ واضح است که بازیکن j ردهٔ بهتری از بازیکن i دارد. بنابراین

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

می‌توان از بردار $w = \frac{U_n v_0}{\|U_n v_0\|_1}$ برای رده‌بندی U_n استفاده نمود. در نتیجه، رده‌بندی A از بردار $P^t w = \frac{Av_0}{\|Av_0\|_1}$ به‌دست خواهد آمد. این رده‌بندی نیز با رده‌بندی حاصل از

$$w_k = \frac{(A + \cdots + A^k)v_0}{\|(A + \cdots + A^k)v_0\|_1},$$

برای هر عدد طبیعی k یکسان است.

مثال ۳.۶. فرض کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

در این‌صورت بردار پرون تعمیم‌یافتهٔ A برابر است با

$$P = (0/41748,\ 0/24319,\ 0/09614,\ 0/05600,\ 0/07815,\ 0/10904)^t$$

(تمامی محاسبات با ۵ رقم اعشار دقت انجام شده است). برای هر عدد طبیعی k، خطای w_k را با ε_k نشان می‌دهیم؛ یعنی $\varepsilon_k = \|P - w_k\|_1$. برای رسیدن به خطای کمتر از ۰/۱، ۰/۰۱، ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۰۱ به‌ترتیب بردارهای زیر را نیاز داریم

$$w_2 = (0/38461,\ 0/25641,\ 0/10256,\ 0/051282,\ 0/076923,\ 0/12821)^t,$$
$$w_7 = (0/41457,\ 0/24372,\ 0/09799,\ 0/05779,\ 0/07789,\ 0/10804)^t,$$
$$w_{21} = (0/41734,\ 0/24322,\ 0/09623,\ 0/05588,\ 0/07793,\ 0/10940)^t,$$
$$w_{39} = (0/41748,\ 0/24318,\ 0/09615,\ 0/05603,\ 0/07815,\ 0/10900)^t.$$

مقادیر خطا (با دقت ۵ رقم اعشار) برابر است با $\varepsilon_2 = 0/07762$، $\varepsilon_7 = 0/00832$، $\varepsilon_{21} = 0/00096$ و $\varepsilon_{39} = 0/00009$.

مراجع

[1] R. O. Carlson, *Tournament matrices: An overview*, Thesis (Ph.D.)–Utah State University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2002 152 pp.

[2] C. Eschenbach, F. Hall, R. Hemasinha, S. Kirkland, Z. Li, B. Shader, J. Stuart and J. Weaver, Properties of tournaments among well-matched players, *Amer. Math. Monthly*, **107** (2000) 881–892

[3] A. Brauer and I. C. Gentry, Some remarks on tournament matrices, *Linear Algebra Appl.*, **5** (1972) 311–318.

[4] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[5] R. Larson and B. H. Edwards, *Elementary Linear Algebra*, Sixth edition. D.C. Heath, 1996.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563

[6] J. S. Maybee and N. Pullman, Tournament matrices and their generalizations. I, *Linear and Multilinear Algebra*, **28** (1990) 57–70.

[7] J. W. Moon and N. J. Pullman, On the powers of tournament matrices, *J. Combinatorial Theory*, **3** (1967) 1–9.

[8] Y. Saad, *Numerical methods for large eigenvalue problems*, Revised edition of the 1992 original [1177405]. Classics in Applied Mathematics, **66**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2011.

[9] E. Seneta, *Non-negative matrices and Markov chains*, Revised reprint of the second (1981) edition [Springer-Verlag, New York], Springer, New York, 2006.

[10] G. Toth, *Elements of mathematics—a problem-centered approach to history and foundations*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics. Springer, Cham, 2021.

[11] S. Vigna, Spectral ranking, *Network Science*, **4** (2016) 433–445.

امیر حسین نخودکار
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.
a.nokhodkar@kashanu.ac.ir

امیر حسین نخودکار متولد تیر ۱۳۶۴ در شهر کاشان است. وی در سال ۱۳۸۶ مقطع کارشناسی رشتهٔ ریاضی محض و در سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض را در دانشگاه صنعتی شریف به پایان رساند. همچنین وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری در همان دانشگاه شد و در سال ۱۳۹۳ تحت نظر دکتر محمد غلامزاده محمودی در زمینهٔ نظریهٔ برگردان‌ها از رسالهٔ خود دفاع کرد. او در حال حاضر دانشیار دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه کاشان است.

رسول کاظمی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.
r.kazemi@kashanu.ac.ir

رسول کاظمی متولد بهمن ۱۳۶۱ در شهر نجف آباد است. وی در سال ۱۳۸۵ مقطع کارشناسی رشتهٔ ریاضی محض را در دانشگاه صنعتی اصفهان به پایان رسانید و در سال ۱۳۸۷ نیز مقطع کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض را در دانشگاه صنعتی شریف به اتمام رسانید. سپس در سال ۱۳۹۱ تحت نظر دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه موفق به اخذ دکترای تخصصی ریاضی کاربردی (گرایش دستگاه‌های دینامیکی) از دانشگاه صنعتی اصفهان شد. وی در حال حاضر استادیار دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه کاشان است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136812.1563