http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 1 (2023), pp. 57-71.

http://ui.ac.ir

INTRODUCING GEOMETRICAL PARADIGMS AND WORKING SPACES

NARGES YAFTIAN* AND LADAN PAZOKI

Abstract. Despite the many studies conducted in the field of mathematics education and especially geometry, we see that the process of teaching and learning geometry has many challenges. Students' challenges in geometry usually appear when solving problems. Two of the approaches that describe the process of solving geometric problems are called geometrical paradigms and working spaces. The purpose of this article, which is a review article, is to briefly describe these two approaches based on related studies and then show their importance in the process of teaching and learning geometry. In general, geometrical working space refers to the interaction between the three components of visualization, construction and proof. The working space in which a person is reasoning depends on the geometrical paradigm. In Geometry I, the reasoning is based on intuition and experiment, and in Geometry II, the reasoning is made by axioms, but the connection with the physical world is still maintained. Finally, in Geometry III, there's no connection with the physical world and the reasoning is completely logical and abstract. Identifying students' geometrical paradigms and studying the working space in which they solve problems allows teachers to design their teaching according to students' understanding and also in case of difficulties in the process of teaching and learning, they can use a useful approach.

Keywords: Geometry, geometrical paradigms, geometrical working spaces.

Communicated by Majid Mirzavaziri.

Article Type: Review Paper.

*Corresponding author.

Received: 17-08-2022, Accepted: 15-05- 2023, Published Online: 12-07-2023.

Cite this article:N. Yaftian and L. Pazoki, Introducing Geometrical Paradigms and Working Spaces, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 1 (2023) 57–71.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524 .

1. Introduction

Learning geometry causes many challenges for students. Many of these difficulties appear when facing geometric problems and choosing the right strategies for solving or proving them. In general, the way students deal with geometric problems and the strategies they use to solve or prove them, reveals important information about their attitude toward geometry. The geometrical paradigms and working spaces describe the students' way of looking at problems and also the strategies they use in solving them [3, 4].

2. Main Results

Paradigm means all the beliefs held by the members of a community. Learners and teachers with similar paradigms can easily communicate with each other, and when they have different paradigms, many difficulties and misconceptions occur [5]. For example, in the process of proving a claim, it is sometimes allowed to use drawing, but sometimes it is not acceptable and providing more detailed reasonings is needed. Therefore, in different situations and problems, learners use different paradigms and we can't say one paradigm is more accurate than the others. In general, three different geometrical paradigms are introduced by Houdement and Kuzniak [3]. In Geometry I, learners use perception, experiment and connection with the physical world to solve a geometric problem. It is related to reality. So the backward and forward movement between the model and reality is allowed to prove the geometric assertions. In Geometry II, the objects are not material. Definitions and axioms are necessary to define and create the objects, but in this paradigm, they are close to intuition. At last, in Geometry III, the system of axioms has no relation with reality. It is independent of any application of the objects of the real world. This paradigm is mainly used in university courses and it doesn't exist in school geometry. A common educational misconception happens when students and teachers are not in the same paradigm. The passage from one type of Geometry to another is a complex phenomenon. Because it's a change of theory and can be considered an educational evolution. At least, two transitions happen that are not the same. The first transition (from Geometry I to Geometry II) deals with the nature of the objects and the space. The second one (from Geometry II to Geometry III) concerns the system of axioms and it leads to a more complex process. During elementary school, the first transition must happen and teachers can think about how to prepare students for Geometry II [2, 3, 5, 6].

In order to identify the students' geometrical paradigm, it is necessary to examine the strategies they use in problem solving. In fact, the geometrical working space in which they solve problems should be identified. If we consider mathematics as an activity that is done by the human brain, we can find out how learners have a geometrical paradigm. When experts solve geometric problems, they go back and forth between paradigms. A geometrical working space is a place that is organized to explain the

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

process of solving geometric problems. It illustrates the structure of the complex situation in which the problem solver acts. It involves two planes which are called the epistemological and the cognitive planes. In the epistemological plane, there are three elements. In fact, learners use three components which are the theoretical system of references, the real space, and artifacts to solve a geometric problem. These components are not sufficient to define the meaning of the geometrical working space clearly. Because it strongly depends on its users too. So the cognitive plane was introduced to describe the cognitive activity of each user which consists of visualization, construction and proof. The process of linking the epistemological plane and the cognitive plane is part of geometrical work. In fact, problem solvers use more than one component to reach the correct response to a problem and a set of these actions represents their geometrical working space [4, 5, 6, 9]. The variety of geometrical working spaces depends on the way users synthesize the cognitive and epistemological planes to solve geometric problems. It also depends on the cognitive abilities of each user too. In fact, being an expert or a beginner in solving problems affects the structure of geometrical working space [4].

3. Summary of Proofs/Conclusion

Many of the difficulties in the process of teaching and learning geometry are due to the difference in the paradigms and working spaces of students and teachers. Several factors influence the students' geometrical paradigm and the working space in which they solve problems, among which the role of the teachers and the textbooks are the most prominent. In fact, the educational system of each country can determine the type of preferred paradigm for each educational level according to the goals of the curriculum. So teachers should be familiar with these approaches and in addition to being aware of them, they can guide the students toward a suitable working space [4, 6].

Narges Yaftian
Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
Email: yaftian@sru.ac.ir

Ladan Pazoki
M.S. in Mathematics Education & Math Teacher in Tehran,, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran.
Email: pazokiladan@yahoo.com

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا (الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۸، شماره ۱ (۱۴۰۲)، صص. ۵۷-۷۱

http://www.ui.ac.ir

معرفی پارادایم‌ها و فضاهای کاری هندسی

نرگس یافتیان* و لادن پازوکی

چکیده. با وجود پژوهش‌های متعدد صورت گرفته در زمینه آموزش ریاضی و به‌ویژه هندسه، شاهد آن هستیم که فرآیند یاددهی و یادگیری هندسه پیچیدگی‌های بسیاری دارد. چالش‌های دانش‌آموزان در ارتباط با هندسه معمولاً هنگام حل مسائل آن نمایان می‌شود. دو نمونه از رویکردهایی که به شیوه‌ای متفاوت، فرآیند حل مسائل هندسی را توصیف می‌کنند، پارادایم‌ها و فضاهای کاری هندسی نام دارند. هدف از این مقاله‌ی مروری آن است که بر اساس پژوهش‌های معتبر، به شرح مختصری از این دو رویکرد بپردازد و سپس اهمیتی را که در فرآیند تدریس و یادگیری هندسه دارند، نمایان سازد. به‌طور کلی، منظور از فضای کاری هندسی تعامل بین سه مؤلفه تجسم، ابزارهای ترسیم و دانش شخص درباره ویژگی‌ها و تعاریف اشکال هندسی برای ارائه استدلال است. چگونگی فضای کاری که فرد در آن به استدلال می‌پردازد به پارادایم هندسی وی بستگی دارد. در پارادایم هندسی ۱، استدلال بر پایه شهود و آزمایش صورت می‌گیرد و در پارادایم هندسی ۲، استدلال‌ها به کمک اصول موضوعه ساخته می‌شوند اما همچنان ارتباط با جهان فیزیکی حفظ می‌شود. در نهایت در پارادایم هندسی ۳، ارتباط با جهان فیزیکی قطع می‌شود و استدلال‌ها کاملاً منطقی و انتزاعی هستند. شناسایی پارادایم هندسی دانش‌آموزان و مطالعه فضای کاری که در آن به حل مسئله می‌پردازند به معلمان این امکان را می‌دهد تا تدریس خود را متناسب با درک دانش‌آموزان طراحی کنند و در صورت بروز مشکلات در فرآیند یاددهی و یادگیری هندسه بتوانند راهکارهای سودمندی به کار گیرند.

۱. مقدمه

هودمنت و کازنیاک [1] [۱]، برای اولین بار اصطلاحات پارادایم‌های [2] هندسی و فضاهای کاری هندسی [3] را ارائه کردند. مدل آن‌ها تنها بر تجسم یا استدلال متمرکز نبوده و در عوض بر اهمیت ارتباط این عوامل و همچنین عوامل دیگری مانند ترسیم‌های هندسی تأکید دارد. در آموزش هندسه، پارادایم‌های هندسی و فضاهای کاری هندسی ایده‌هایی هستند که فرآیند حل مسائل هندسی را به‌طور نظام‌مند توصیف کرده و در حل بسیاری از مشکلات آموزش و یادگیری هندسه سودمند خواهند بود. در واقع نحوه برخورد دانش‌آموزان با مسائل هندسی مختلف و راهبردهایی که در حل آن‌ها به کار می‌گیرند نشان‌دهنده نوع نگاه آن‌ها به هندسه است که آن را پارادایم هندسی می‌نامند [۳]. در حالت کلی، در برخورد با مسائل هندسی، سه پارادایم مختلف

عبارات و کلمات کلیدي: هندسه، پارادایم هندسی، فضای کاری هندسی.
دبیرتخصصی رابط: مجید میرزاوزیری
نوع مقاله: مروری
* نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۵ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۴/۲۱
ارجاع به مقاله: ن. یافتیان و ل. پازوکی، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره. ۱ (۱۴۰۲) ۵۷-۷۱.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524 .

[1]Houdement & Kuzniak [2]paradigms [3]geometrical working space

نمایان می‌شود که مطالعه و شناسایی آن‌ها می‌تواند چگونگی نگاه دانش‌آموزان به مسائل هندسی را آشکار سازد و به معلم این امکان رامی‌دهد تا با ارائه مسائل مختلف، زمینه گذر دانش‌آموزان به پارادایم‌های دیگر که دارای سطح انتزاع و پیچیدگی بیشتری هستند را فراهم سازد. علاوه بر این، در بسیاری از مواقع، مشکلاتی که در فرآیند یاددهی و یادگیری هندسه رخ می‌دهد به این دلیل است که پارادایم هندسی معلم با دانش‌آموزان هماهنگی ندارد، پس آگاهی معلم از این موضوع و روش‌های شناسایی آن سودمند خواهد بود. فن‌هیلی [۴] [۱۱] نیز معتقد است که معمولاً مشکلاتی که در فرآیند یاددهی و یادگیری هندسه رخ می‌دهد ناشی از آن است که سطح تفکر هندسی معلمان و دانش‌آموزان با یکدیگر تناسب ندارد و به همین دلیل گاهی تعامل مناسبی بین آن‌ها ایجاد نمی‌شود. به‌منظور شناسایی پارادایم هندسی دانش‌آموزان، باید راهبردهایی که در حل مسائل مختلف به کار می‌گیرند را مطالعه کرد. در واقع باید فضای کاری هندسی آن‌ها را از طریق حل مسائل هندسی مختلف شناسایی کرد. عوامل متعددی بر شکل‌گیری پارادایم هندسی دانش‌آموزان و فضای کاری هندسی که در آن به حل مسئله می‌پردازند، تأثیرگذار هستند که از میان آن‌ها نقش معلم و محتوای کتاب‌های درسی پررنگ‌تر است. در واقع در نظام آموزشی هر کشور، می‌توان با توجه به اهداف برنامه درسی، نوع پارادایم مطلوب هر مقطع تحصیلی را به‌طور تقریبی تعیین کرد. در ادامه به‌شرح مختصری از پارادایم‌های هندسی و فضای کاری هندسی پرداخته می‌شود.

۲. پارادایم‌های هندسی

در حالت کلی، اصطلاح پارادایم به معنای تمام باورهایی است که در اعضای یک گروه از افراد وجود دارد. در صورتی که افراد پارادایم مشابهی داشته باشند، راحت‌تر می‌توانند با یکدیگر ارتباط برقرار کنند و در مقابل، زمانی که پارادایم‌های متفاوتی داشته باشند، مشکلات و بدفهمی‌های بسیاری رخ می‌دهد و گاهی منجر می‌شود که هرگز یکدیگر را درک نکنند. برای مثال، در اثبات یک ادعا گاهی می‌توان از رسم شکل استفاده کرد اما برخی اوقات این کار قابل قبول نیست و ارائه استدلال‌های دقیق‌تری مدنظر است. بنابراین در موقعیت‌ها و مسائل مختلف، افراد پارادایم‌های مختلفی را به کار می‌گیرند [۵]. هودمنت و کازنیاک [۳] سه پارادایم هندسی برای طبقه‌بندی اثر متقابل میان شهود، استنتاج و استدلال معرفی می‌کنند که هر سطح چالش‌های یاددهی و یادگیری مختص به خود را دارد [۶]. در ادامه به شرح مختصری از آن‌ها پرداخته می‌شود.

۱.۲. پارادایم هندسی ۱ (هندسه طبیعی). این پارادایم مربوط به جهان قابل لمس است. به همین دلیل است که نام دیگر آن را هندسه طبیعی [۵] گذاشته‌اند. افرادی که در این پارادایم فکری قرار دارند، اجسام فیزیکی، خطوط رسم شده روی کاغذ و یا خطوط مجازی در صفحه رایانه را برای حل مسائل هندسی به کار می‌گیرند و شیوه‌ی رایج آن‌ها در حل مسائل، رسم شکل به کمک ابزارهای هندسی مانند خط‌کش، گونیا، پرگار و یا به‌کارگیری شیوه‌هایی مانند بریدن و تا کردن است [۲]. در این نوع نگاه به هندسه، تمامی استدلال‌ها بر پایه ادراک، آزمایش و سپس نتیجه‌گیری صورت می‌گیرد. استدلال از طریق ترسیم، اندازه‌گیری‌های دستی و حتی تا کردن و بریدن، برای ارائه اثبات‌های شهودی مجاز است. به‌طور کلی می‌توان گفت که در پارادایم هندسی۱، استدلال‌های تجربی قابل قبول هستند.

۲.۲. پارادایم هندسی ۲ (هندسه اصل موضوعی طبیعی). الگوی اولیه و اصلی این پارادایم، هندسه اقلیدسی است. اشیاء در این نوع هندسه، فیزیکی نبوده و ذهنی هستند و تعاریف و اصول موضوعه برای ساخت آن‌ها ضرورت دارد. برخی از اصول موضوعه با درک ما از فضا و جهان واقعی بسیار مرتبط هستند و از این رو نام هندسه اصل موضوعی طبیعی

[4] Van Hiele [5] natural geometry

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

[۶] برای این پارادایم انتخاب شده است [۲، ۶]. البته پس از آنکه اصول موضوعه تدوین می‌شوند، باید به کمک اثبات به گزاره‌ها اعتبار بخشید. به‌طور کلی در این پارادایم، اشکال به واسطه تعریفشان، معنا پیدا می‌کنند و گاهی این تعریف بر اساس خصوصیات اشیای واقعی شکل می‌گیرد [۵]. در این پارادایم، توضیحات اهمیت بالایی دارند و همه اشیاء باید تعریف شوند. در واقع، طراحی‌ها تنها تصویرسازی‌هایی هستند که براساس یک توضیح و تعریف، رسم شده‌اند و در اصل از توضیحات برای اعتباربخشی به اشکال و ترسیم‌ها استفاده می‌شود.

۳.۲. پارادایم هندسی ۳ (هندسه اصل موضوعی رسمی). دو پارادایم هندسی ۱ و ۲، به شکل‌های مختلف ارتباط زیادی با دنیای واقعی دارند و تفاوت آن‌ها در گستره عملکردشان است. بنابراین نوع دیگری از هندسه مورد نیاز است که در دروس مدرسه‌ای کمتر ظاهر شده است اما در دروس دانشگاهی بیشتر به آن پرداخته می‌شود و آن را هندسه اصل موضوعی رسمی [۷] می‌نامند. در این پارادایم هندسی، دستگاه اصول موضوعه به‌طور کامل خارج از دنیای واقعی است و این نوع از هندسه بیشتر با منطق و استنتاج سر و کار دارد [۶]. به منظور درک تفاوت پارادایم‌های ذکر شده، جدول ۱ ارائه شده است که در آن تفاوت مفاهیمی مانند فضا، استنتاج، تجربه و...، در سه پارادایم گفته شده مشاهده می‌گردد.

جدول ۱. مقایسه پارادایم‌های هندسی

Table 1: Comparing the geometrical paradigms

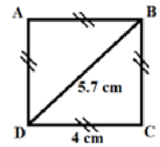
	پارادایم هندسی ۱ (هندسه طبیعی)	پارادایم هندسی ۲ (هندسه اصل موضوعی طبیعی)	پارادایم هندسی ۳ (هندسه اصل موضوعی رسمی)
شهود	محسوس، مرتبط با ادراک و تجربه	مرتبط با اشکال هندسی	مرتبط با ارتباطات درونی ریاضی
تجربه	مرتبط با فضای فیزیکی	مرتبط با طرحواره‌های واقعی	منطقی
استنتاج	مرتبط با تجربه و جهان واقعی	نمایش بر اساس اصول موضوعه	نمایش بر اساس سیستم کاملی از اصول موضوعه
فضا	فضای فیزیکی و شهودی	فضای فیزیکی و هندسی	فضای انتزاعی اقلیدسی
ماهیت ترسیم	ابزار مطالعه و اعتباربخشی	حمایت‌کننده استدلال	ابزاری اکتشافی
امتیاز	استفاده از ترسیم و بی‌نیازی از اثبات	نمایش خصوصیات هندسی	نمایش ارتباطات بین مفاهیم و اشیاء

با توجه به جدول ۱، همان‌طور که پیشتر نیز گفته شد، در پارادایم هندسی۱ استدلال‌ها بر پایه شهود صورت می‌گیرند و شیوه‌هایی مانند اندازه‌گیری به کمک خط‌کش یا تا کردن کاغذ مورد پذیرش هستند. در این پارادایم می‌توان یک ترسیم را به عنوان یک اثبات پذیرفت. در مقابل، در پارادایم هندسی ۲ اثبات‌ها به کمک استدلال استنتاجی ساخته می‌شوند و استفاده از ترسیم برای توجیه یک ادعای هندسی قابل قبول نیست اما می‌توان از آن به عنوان ابزاری برای راستی‌آزمایی یک ادعا استفاده کرد. در پارادایم هندسی ۳ نیز ارتباط با جهان فیزیکی و قابل لمس به‌طور کامل قطع می‌شود و در این پارادایم، فرد تنها با اصول موضوعه سر و کار دارد. نکته‌ای که درباره سه پارادایم هندسی حائز اهمیت است آن است که سلسله‌مراتبی نیستند بلکه محدوده کاربرد آن‌ها متفاوت است و در مورد هر مسئله‌ای، تشخیص راه‌حل و روش حل، با توجه به هدف مسئله و دیدگاه حل‌کننده تعیین می‌شود و گاهی لازم است به‌صورت رفت و برگشتی بین پارادایم‌های مختلف حرکت نمود [۴]. در شکل ۱ مسئله‌ای مشاهده می‌شود که برای پاسخ به آن می‌توان دو پارادایم هندسی مختلف را به کار برد.

[6]natural axiomatic geometry [7]formal axiomatic geometry

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

سارا معتقد است که چهارضلعی ABCD یک لوزی است و مربع نیست. اما مریم خلاف این نظر را دارد. با کدامیک موافق هستید؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



شکل ۱. مسئله اول جهت بررسی پارادایم هندسی دانش‌آموزان [۶]

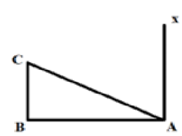
Figure 1: The first problem to assess students' geometrical paradigm [6]

یک دانش‌آموز پایه نهم به این مسئله به‌صورت زیر پاسخ داده است:

لوزی است. زیرا اگر قطر دیگر چهارضلعی را رسم کنیم و پاره‌خط‌های ایجاد شده را اندازه بگیریم، مشاهده می‌شود که قطرها یکدیگر را نصف کرده‌اند. از طرفی با استفاده از گونیا مشخص می‌شود که قطرها بر یکدیگر عمود نیز هستند.

این دانش‌آموز به کمک شهود و همچنین با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری به مسئله پاسخ داده است و در حالت کلی، پاسخ او فاقد استدلال‌های دقیق بوده و بنابراین این پاسخ نشان می‌دهد که تنها پارادایم هندسی۱ به کار رفته است. دانش‌آموز دیگری از پایه نهم برای پاسخ به این مسئله، از عکس قضیه فیثاغورس استفاده کرده و در مثلث BCD با توجه به اینکه $۵/۷ \neq \sqrt{۳۲}$ نتیجه گرفته است که زوایای شکل ۹۰ درجه نبوده و بنابراین چهارضلعی مربع نیست. پاسخ این دانش‌آموز نشان‌دهنده به‌کارگیری پارادایم هندسی۲ است. در شکل ۲ مثال دیگری مشاهده می‌شود که به منظور شناسایی پارادایم هندسی دانش‌آموزان پایه نهم مورد استفاده قرار گرفته است.

مثلث ABC در رأس B قائمه و اندازه ضلع AB، ۴ سانتی‌متر، اندازه ضلع BC، ۲ سانتی‌متر و نیم‌خط Ax بر ضلع AB عمود است. آیا می‌توان نقطه M را طوری روی Ax قرار داد که مثلث ACM متساوی‌الاضلاع باشد؟



شکل ۲. مسئله دوم جهت بررسی پارادایم هندسی دانش‌آموزان [۶]

Figure 2: The second problem to assess students' geometrical paradigm [6]

به منظور حل این مسئله، در صورتی‌که یک فرد در پارادایم هندسی۱ باشد احتمالاً پیشنهاد می‌کند که دهانه پرگار را به اندازه ضلع AC باز کنیم و یک بار از رأس A و بار دیگر از رأس C کمان بزنیم و خواهیم دید که رأس سوم روی Ax قرار نمی‌گیرد. ارائه چنین پاسخ و استدلالی که بر اساس آزمایش و تجربه است توسط دانش‌آموزان بزرگتر از پایه هشتم و معلمان در بعضی از کشورها مانند فرانسه قابل قبول نیست و از آن‌ها انتظار می‌رود استدلال‌های دقیق‌تری ارائه کنند و فرضیه‌های مختلف و مفاهیم هندسی را به کار گیرند. در واقع انتظار می‌رود به این مسئله به این‌صورت پاسخ داده شود که فرض می‌کنیم چنین مثلث متساوی‌الاضلاعی به نام ACM وجود داشته باشد. مسلماً زاویه MAC ۶۰، درجه است پس زاویه CAB ۳۰، درجه خواهد

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

بود. با تشکیل مثلث CAC' (C' قرینه نقطه C نسبت به ضلع AB است) خواهیم دید که این مثلث متساوی‌الاضلاع است. زیرا همه زوایای آن ۶۰ درجه هستند. از طرفی اندازه CC'، ۴ سانتیمتر است اما اندازه ضلع AC نمی‌تواند مساوی با ۴ باشد، زیرا AC وتر مثلث ABC است و می‌دانیم که AB ، ۴ سانتیمتر است و چون اندازه AC باید از AB بزرگتر باشد، چنین مثلثی وجود ندارد. از آنجایی‌که در این پاسخ از فرضیه، روابط و مفاهیم هندسی استفاده شده است، نشان‌دهنده پارادایم هندسی۲ است [۶].

به‌طور کلی، حرکت از یک پارادایم به پارادایم دیگر، فرآیند پیچیده‌ای است و مانند یک تکامل و تحول از آن یاد می‌شود. در طی آموزش مدرسه‌ای، دو حرکت مهم اتفاق می‌افتد. ابتدا حرکت از پارادایم هندسی۱ به ۲ که نیاز به درک عمیق از طبیعت و اشکال و فضا دارد و دوم حرکت از پارادایم هندسی۲ به ۳، که یک فرآیند شناختی است. در طول مقطع ابتدایی، زمینه‌های لازم برای حرکت اول پایه‌گذاری می‌شود تا آمادگی لازم برای یادگیری مفاهیم مرتبط با پارادایم هندسی۲ در مقاطع بالاتر فراهم شود [۳]. البته زمان مناسب حرکت از یک پارادایم به دیگری به‌طور دقیق مشخص نشده و در واقع با فراگیری مفاهیم جدید هندسی، حرکت به سمت پارادایم پیچیده‌تر اجتناب‌ناپذیر است. اما به‌طور کلی، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان در مقطع متوسطه دوم، از پارادایم هندسی۱ فراتر رفته و دارای پارادایم هندسی۲ باشند [۳، ۷]. هر یک از این پارادایم‌ها، انسجام کافی برای تعریف و نظام‌مند ساختن هندسه به عنوان یک زمینه دانشی غنی را داراست و همچنین می‌تواند یک فضای کاری هندسی مناسب برای حل بسیاری از مسائل هندسی را ایجاد کند [۷].

۳. فضای کاری هندسی

اگر یادگیری ریاضیات را یک فعالیت اجتماعی در نظر بگیریم که توسط ذهن انسان تجزیه و تحلیل می‌شود، می‌توان دریافت که چطور یک گروه یا تک‌تک افراد، یک پارادایم هندسی خاص دارند یا پارادایم دیگری را اتخاذ می‌کنند. زمانی که ریاضی‌دان‌ها می‌خواهند مسئله‌ای را حل کنند، بین پارادایم‌های مختلف رفت و برگشت دارند و ممکن است که برای مثال، یک بار از شیوه‌ی رسم شکل با هدف ارائه استدلال و یک بار از آن برای بررسی درستی یک ادعا استفاده کنند. به‌طور کلی، فرآیند استدلال هندسی وابسته به تجسم، ابزارهای ترسیم و دانش شخص درباره ویژگی‌ها و تعاریف اشکال هندسی است که تعامل آن‌ها را کار هندسی می‌نامند. برای توصیف پیچیدگی کار هندسی، مدل فضای کاری هندسی تعریف شده است و عبارت است از فضایی که برای توصیف عملکرد افراد در حل مسائل هندسی طراحی شده است و متشکل است از دو سطح به نام‌های سطح شناختی [۸] و سطح معرفت‌شناختی [۹] [۶]. در سطح معرفت‌شناختی، ارتباط میان سه مؤلفه خاص در فعالیت‌های هندسی مشاهده می‌شود که عبارت‌اند از [۸]:

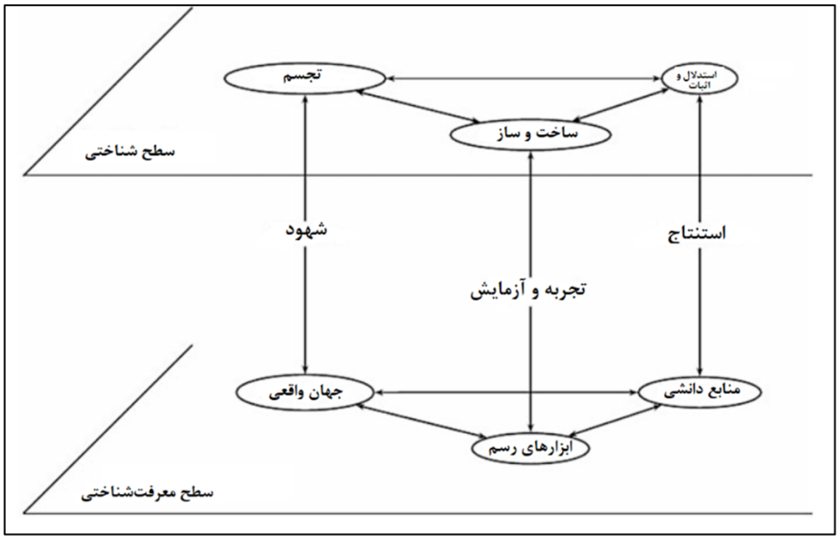
- جهان واقعی که شامل اجسام فیزیکی و واقعی است.
- دست‌سازه‌ها [۱۰] مانند ابزارهای ترسیم دستی (خطکش، پرگار، ...) و یا نرم‌افزارهای هندسی.
- منابع دانشی متشکل از مفاهیم و تعاریف آن‌ها برای ارائه استدلال و اثبات.

این مؤلفه‌ها به خودی خود برای توصیف فضای کاری هندسی کافی نیستند زیرا فضای کاری هندسی به مقدار زیادی به کاربران آن بستگی دارد [۶]. در واقع عملکرد فضای کاری هندسی با توجه به شرایط اجتماعی و اقتصادی که بر کیفیت آموزش تأثیر می‌گذارند، متفاوت خواهد بود. همچنین این عملکرد تا حد زیادی به توانایی شناختی هر کاربر نیز وابسته است [۱۰]. برای اطمینان از استفاده صحیح از مؤلفه‌های معرفت‌شناختی باید بر برخی از فعالیت‌های شناختی در فعالیت‌های

[8] cognitive plane [9] epistemological plane [10] artefacts

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

هندسی تمرکز کنیم [۷]. بنابراین سطح دیگری موردنیاز است که متمرکز بر مؤلفه‌های فضای کاری هندسی بوده و همچنین چگونگی عملکرد گروه‌ها و افراد در استفاده از دانش هندسی را مورد بررسی قرار دهد [۵]. سطح شناختی برای مشخص کردن و توصیف فرآیندها و فعالیت‌های شناختی افراد در هندسه طراحی شده است. برای مشخص کردن مؤلفه‌های سطح شناختی در حل مسائل هندسی، رویکرد دووال [11] [۴] مورد استفاده قرارگرفته است. طبق این رویکرد در هندسه، سه فرآیند شناختی وجود دارد که عبارت‌اند از فرآیندهای تجسم، فرایندهای ساخت و ساز به کمک ابزارها و فرآیندهای استدلال و اثبات. در شکل ۳، ساختار کلی فضای کاری هندسی مشاهده می‌شود.



شکل ۳. ساختار کلی فضای کاری هندسی [۴، ۵]

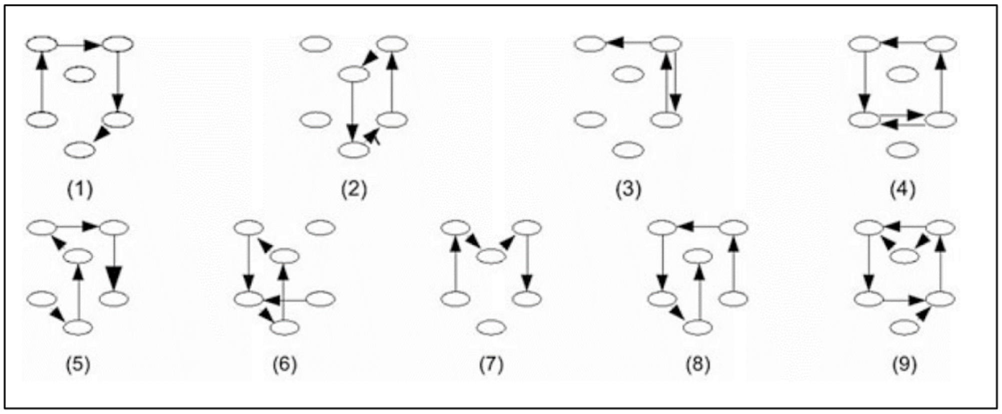
Figure 3: The general structure of the geometrical working space [4, 5]

با توجه به شکل ۳ و ساختار کلی فضای کاری هندسی، یادگیری هندسه زمانی اتفاق می‌افتد که بتوان بین تجسم، ساخت‌وساز و استدلال ارتباط برقرار کرد [۱]. به منظور عملی ساختن این سه مؤلفه از منابع دانشی، دست‌سازه‌ها یا همان ابزارهای ترسیم و جهان واقعی بهره می‌جوییم و به این طریق بین دو سطح شناختی و معرفت‌شناختی ارتباط برقرار می‌شود. زمانی که به حل مسئله هندسی پرداخته می‌شود هر شخص باید از منابع دانشی خود برای ارائه استدلال استفاده کند. همچنین به منظور ساخت اشکال هندسی می‌توان دست‌سازه‌هایی مانند نرم‌افزارهای هندسی و یا ابزارهای ترسیم دستی را به کار گرفت و با استفاده از ارتباط دادن داده‌های مسئله با جهان واقعی و اجسام فیزیکی به تجسم پرداخت. بنابراین منابع دانشی، دست‌سازه‌های هندسی و جهان واقعی ابزارهایی هستند که استدلال، ساخت و ساز و تجسم را ممکن می‌سازند. بین همه این عوامل ارتباطی دوطرفه وجود دارد و هر فرد می‌تواند به شکل‌های مختلفی بین آن‌ها حرکت کند و در واقع فضای کاری هندسی هر فرد در حل هر مسئله هندسی از ارتباط بین این عوامل شکل می‌گیرد. برای مثال، در حل مسائل گاهی ممکن است از ساخت و ساز و ترسیم آغاز کرده و در نهایت به استدلال برسیم و یا گاهی به کمک استدلال به تجسم می‌پردازیم. بنابراین فرآیند حل یک مسئله هندسی معمولاً عوامل متعددی از سطوح شناختی و معرفت‌شناختی را درگیر می‌کند. برای مثال، فرض کنید در یک مسئله، وجود داشتنِ مثلثی با طول اضلاع ۲، ۳ و ۶ مورد سؤال باشد. برخی از دانش‌آموزان ممکن است به کمک

[11] Duval

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

خطکش و پرگار اقدام به رسم این مثلث کنند و در نهایت به این نتیجه برسند چنین مثلثی قابل رسم نیست. برخی دیگر نیز بدون نیاز به رسم و با اشاره به این نکته که در هر مثلث باید مجموع طول دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر باشد و درباره این اضلاع چنین قانونی برقرار نیست، به همان نتیجه برسند. لبوت [12] [۹] در پژوهش خود، روش‌های مختلفی که دانش‌آموزان در حل یک مسئله هندسی به کار گرفته بودند را دسته‌بندی کرده و از این طریق فضای کاری هندسی هر یک از این روش‌ها را به کمک نمودارهایی نمایش داده است که در شکل ۴ به ۹ نمونه از این نمودارها اشاره شده است.



شکل ۴. فضاهای کاری مختلف در حل یک مسئله هندسی [۵، ۹]

Figure 4: Different geometrical working spaces to solve a problem [5, 9]

با توجه به شکل ۴، در صورتی که حل یک مسئله هندسی با ترسیم و ساخت اشکال هندسی به کمک ابزارهای دستی یا نرم‌افزارها و با توجه به داده‌های مسئله و قدرت تجسم حل‌کننده آغاز شود، فضای کاری مشابه با نمودار شماره ۵ در شکل ۴ حاصل می‌شود. در واقع در چنین رویکردی، فعالیت یا کار هندسی به‌صورت آزمایش [13]–شهود [14]–استنتاج [15] صورت گرفته است و فرد نگاهی تجربی و آزمایشی به مفاهیم هندسی دارد و می‌توان گفت دارای پارادایم هندسی۱ است که در روش‌های سنتی یاددهی و یادگیری ریاضی معمولاً چنین رویکردی مورد نظر است. برای افرادی که دارای پارادایم هندسی۲ هستند، فضای کاری مشابه با نمودار شماره ۸ حاصل می‌شود که به‌صورت استنتاج–شهود–آزمایش است. در واقع در این فضای کاری، حل مسئله از طریق ارائه استدلال‌های منطقی با توجه به داده‌های مسئله و به کمک مفاهیم، تعاریف و قضایا آغاز می‌شود و سپس از طریق تجسم، شهود، آزمایش و ترسیم، درستی استدلال‌ها مورد تأیید قرار می‌گیرد. در بسیاری از مواقع، انتظار معلم، فضای کاری مشابه با نمودار شماره ۸ است، اما دانش‌آموزان به‌صورت نمودار شماره ۵ به حل مسئله می‌پردازند. فضای کاری دانش‌آموزان گاهی ممکن است مانند نمودار شماره ۶ ناقص باشد و این زمانی است که دانش‌آموزان در رویکرد تجربی باقی بمانند و نتیجه‌گیری‌های استدلالی نداشته باشند و به این‌صورت فضای کاری همراه با استدلال منطقی که مورد انتظار معلمان است حاصل نشود. در حالت کلی، ترسیم اشکال هندسی از دید معلمان نقش حمایتی برای حل مسئله دارد و به تنهایی کافی نیست. گاهی نیز فضای کاری دیگری ایجاد می‌شود که با وجود ناقص بودن مورد پسند معلمان است و در نمودار شماره ۴ مشاهده می‌گردد. در این رویکرد، حل مسئله تنها از تعامل استدلال و تجسم حاصل می‌شود و ترسیم هیچ نقشی ایفا نمی‌کند [۵، ۹]. برای مثال، فرض کنیم در یک مسئله، اثبات برابری اضلاع دو مثلث خواسته شده است. دانش‌آموزی که

[12]Lebot [13]experiment [14]intuition [15]deduction

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

در مقطع ابتدایی است احتمال دارد که به کمک اندازه‌گیری اضلاع مثلث‌ها با استفاده از خطکش به مسئله پاسخ دهد اما از یک دانش‌آموز در مقطع متوسطه انتظار می‌رود که به کمک بررسی حالات همنهشتی مثلث‌ها و به کمک استدلال استنتاجی به مسئله پاسخ دهد. در حالت کلی به دلیل تنوع بالای مسائل هندسی و اهدافی که هر یک از آن‌ها دنبال می‌کنند، باید هر دو پارادایم هندسی۱ و ۲ در یادگیری هندسه مدرسه‌ای حضور داشته باشند و در واقع برای بررسی پارادایم هندسی دانش‌آموزان باید به پایه تحصیلی آن‌ها و هدف مسئله داده شده توجه نمود.

۴. اهمیت مطالعه و بررسی پارادایم‌های هندسی و فضای کاری هندسی

طبق پیشینه پژوهش، به‌منظور تسهیل فرآیند یاددهی و یادگیری هندسه، مطالعه و بررسی پارادایم‌های هندسی و فضاهای کاری هندسی دانش‌آموزان سودمند است. به محض آنکه نوعی از فضای کاری در چارچوب آموزشی مدارس ایجاد می‌شود، باید روش‌های آموزشی گوناگونی نیز ارائه و توصیف گردد [۶]. زمانی که به یک فرد (دانش‌آموز یا معلم) یک مسئله هندسی ارائه می‌گردد، نحوه برخورد او با مسئله در یک فضای کاری هندسی قرار دارد که مطالعه آن سودمند خواهد بود [۴]. یک فضای کاری هندسی تنها به واسطه کاربرانش وجود دارد و تشکیل آن وابسته به مؤلفه‌های حل مسائل هندسی، فعالیت‌های شناختی یک کاربر حرفه‌ای یا تازه‌وارد و همچنین وابسته به شکلی است که کاربران، دو سطح شناختی و معرفت‌شناختی را ترکیب می‌کنند. ساختار یک فضای کاری نیز با توجه به سیستم آموزشی (فضای کاری هندسی قصد شده)، وضعیت مدارس (فضای کاری هندسی اجرا شده) و کاربران (فضای کاری هندسی کسب شده) متغیر است. در واقع، تشکیل یک فضای کاری هندسی تنها به یک پارادایم خاص وابسته نیست. بلکه بیشتر وابسته به تعامل و ارتباط میان پارادایم‌ها است. هر شخص با فضای کاری مختص به خود، اقدام به حل مسئله می‌کند که به دانش شخصی و همچنین کیفیت آموزشی مکانی که در آن تحصیل می‌کند، بستگی دارد [۲]. بنابراین تنها دانش‌آموزان درگیر این مفهوم نیستند بلکه سامانه‌ی آموزشی و معلمان نیز در شکل‌گیری آن نقش دارند. معلمان باید درک درستی از ماهیت فضای کاری هندسی داشته باشند تا از بسیاری از بدفهمی‌هایی که نتیجه مدیریت نادرست پارادایم‌هاست، جلوگیری نمایند [۶]. علاوه بر معلمان، کتاب‌های درسی نیز به عنوان مهمترین محتوای آموزشی ارائه شده به دانش‌آموزان، در شکل‌گیری پارادایم هندسی آن‌ها و فضای کاری که در آن به حل مسئله می‌پردازند، تأثیرگذار هستند. در شکل ۵ مسئله‌ای از کتاب هندسه پایه دهم در کشور شیلی مشاهده می‌شود.

مسئله: یک زمین کشاورزی داریم که به شکل چهارضلعی است و می‌خواهیم مساحت آن را محاسبه کنیم. اضلاع آن را اندازه گرفتیم و مقادیر ۳۰۰، ۹۰۰، ۶۱۰ و ۴۴۰ متر به دست آمد. آیا می‌توانید مساحت این زمین را محاسبه کنید؟ آیا با دانستن قطر این چهارضلعی، مسئله قابل حل است؟

راهنمایی: قطر چهارضلعی را اندازه گرفتیم و مقدار ۶۳۰ متر به دست آمد. می‌توانید چهارضلعی را با مقیاسی مشخص روی کاغذ رسم کنید و ارتفاع مثلث‌های ایجاد شده را اندازه بگیرید.

شکل ۵. مسئله کتاب هندسه پایه دهم کشور شیلی [۴]

Figure 5: A problem of Chilean tenth grade geometry textbook [4]

روش پیشنهادی در صورت این مسئله برای حل، تبدیل چهارضلعی موردنظر به دو مثلث است. در قسمت راهنمایی مسئله به راهبرد خاصی اشاره شده و از دانش‌آموزان خواسته شده است که اضلاع چهارضلعی را با یک مقیاس مشخص، کوچکتر

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

کنند و شکل آن را بر روی کاغذ رسم نمایند و سپس ارتفاع مثلث‌ها را از روی شکل اندازه بگیرند و در نهایت با استفاده از آن، مساحت مثلث‌ها را محاسبه کنند. این شیوه حل در مقطع متوسطه در برخی از کشورها مانند فرانسه غیرقابل‌قبول است. در واقع، روش پیشنهادی کتاب هندسه شیلی آن است که فعالیت هندسی روی برگه کاغذ و به کمک مقیاس، ابزارهای ترسیم و فرمول مساحت مثلث انجام شود که می‌توان آن را فضای کاری هندسی اندازه‌گیری [۱۶] نامید و مشخص است که پارادایم هندسی۱ به کار گرفته شده است. به‌منظور حل این مسئله، فضای کاری دیگری نیز می‌تواند به کار گرفته شود. در پژوهشی در کشور فرانسه مسئله‌ای مشابه با این مسئله به دانش‌آموزان پایه دهم ارائه شده است. در فرانسه فضای کاری قابل قبول برای حل چنین مسائلی در پایه دهم و بالاتر را فضای کاری هندسی محاسباتی[۱۷] در نظر می‌گیرند که توسط پارادایم هندسی۲ حمایت می‌شود. در واقع می‌توان مسئله را به کمک فرمول هرون حل کرد. با استفاده از این فرمول می‌توان مساحت یک مثلث را با دانستن اضلاع آن و بدون نیاز به اندازه‌گیری ارتفاع، محاسبه نمود. در ارتباط با این مسئله، هر دو فضای کاری در شروع حل، راهبرد مشابهی را به کار می‌گیرند و آن تقسیم چهارضلعی به دو مثلث است اما اقدامات هندسی بعدی و طریقه توجیه آن‌ها متفاوت است. به‌طور کلی، فضای کاری که بر اساس پارادایم هندسی۱ شکل می‌گیرد، این امکان را می‌دهد که مسئله با استفاده از مفاهیم و روابط ساده‌تری حل شود. اما فضای کاری که بر اساس پارادایم هندسی۲ است، ترسیم و اندازه‌گیری را مجاز نمی‌داند و بنابراین صحت آن وابسته و محدود به دقت اندازه‌گیری و ترسیم نیست [۴].

۵. بحث و نتیجه‌گیری

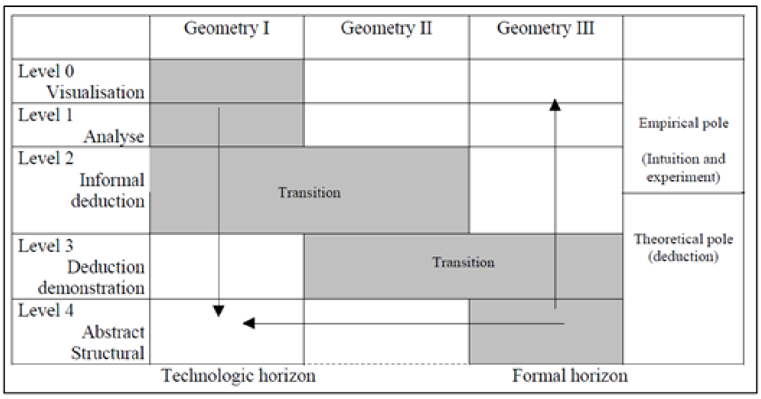
بسیاری از آموزگاران ریاضی معتقدند که آموزش هندسه در عمل بسیار پیچیده‌تر و دشوارتر از آموزش جبر و حساب است و شاید علت اصلی این دشواری به ماهیت خود هندسه برمی‌گردد. به همان میزان که تدریس هندسه دشوار است، یادگیری آن نیز دانش‌آموزان را با چالش‌های متعددی همراه می‌سازد. بسیاری از این مشکلات در مواجهه با مسائل هندسی و در انتخاب راهبرد مناسب برای حل یا اثبات، نمایان می‌شود. به‌طور کلی، نحوه برخورد دانش‌آموزان با مسائل هندسی و راهبردهایی که برای حل یا اثبات به کار می‌گیرند، اطلاعات مهمی از نگاه آن‌ها به هندسه را آشکار می‌سازد. برای توصیف نوع نگاه دانش‌آموزان و همچنین شیوه‌هایی که در حل‌مسئله استفاده می‌کنند مفاهیم پارادایم‌های هندسی و فضای کاری هندسی تعریف می‌شوند.

در پارادایم هندسی۱ به‌منظور حل یک مسئله هندسی، افراد از ادراک، آزمایش و ارتباط دادن مفاهیم هندسی با جهان مادی و فیزیکی استفاده می‌کنند. در پارادایم هندسی۲ اصول موضوعه ظاهر می‌شوند اما همچنان ارتباط با جهان فیزیکی حفظ می‌شود، و در نهایت در پارادایم هندسی۳، استدلال‌ها حالت کاملاً انتزاعی به خود می‌گیرند و ارتباطی با جهان فیزیکی وجود ندارد. به همین دلیل این پارادایم بیشتر در دروس دانشگاهی موردنیاز است و در هندسه مدرسه‌ای کاربرد چندانی ندارد. به‌منظور شناسایی پارادایم هندسی دانش‌آموزان، لازم است تا شیوه‌هایی که در حل مسئله به کار می‌گیرند را مورد بررسی قرار داد. در واقع باید فضای کاری هندسی آن‌ها را زیر نظر گرفت. در حالت کلی، افراد مؤلفه‌هایی مانند منابع دانشی، اجسام فیزیکی و ابزارهای ترسیم را برای ارائه اثبات، تجسم و ترسیم به کار می‌گیرند و گاهی از بیش از یک مؤلفه استفاده می‌کنند تا به پاسخ صحیح دست یابند و مجموعه این اقدامات نشان‌دهنده فضای کاری هندسی آن‌هاست. به‌منظور ملموس‌تر ساختن تفاوت‌های پارادایم‌های هندسی، می‌توان ارتباط آن‌ها با سطوح تفکر هندسی فن‌هیلی را مورد بررسی قرار داد. فن‌هیلی [۱۱] تفکر هندسی افراد را در پنج سطح به‌صورت سلسله مراتبی طبقه‌بندی کرده است. در سطح صفر (تجسم[۱۸])، شناخت کلی

[16] measuring GWS [17] calculation GWS [18] visualization

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

مفاهیم هندسی مدنظر است و به جزییات آن‌ها پرداخته نمی‌شود. در سطح اول (تجزیه و تحلیل[۱۹])، توصیف و شناخت اشکال مورد توجه است. درسطح دوم (استنتاج غیررسمی[۲۰])، روابط میان ویژگی‌های یک شکل و نیز روابط میان اشکال مختلف درک می‌شود. در سطح سوم (استنتاج[۲۱])، کاربرد اصول موضوعه و تعریف‌ها و اثبات‌ها مدنظر است و در نهایت در سطح چهارم (دقت[۲۲])، شخص این توانایی را پیدا می‌کند تا قضیه‌ها را در سیستم‌های اصل موضوعی مختلف تجزیه و تحلیل کند. درواقع در سطح چهارم شخص قادر به درک مفاهیم انتزاعی هندسه خواهد بود. البته رسیدن به این سطح از تفکر هندسی فن‌هیلی، از اهداف هندسه مدرسه‌ای نیست. اگر بخواهیم بین پارادایم‌های هندسی و سطوح تفکر فن‌هیلی ارتباط برقرار کنیم، روابط آن‌ها به‌صورت ارائه شده در شکل ۶ تعریف می‌شود.



شکل ۶. ارتباط بین سطوح فن‌هیلی و پارادایم‌های هندسی [۳]

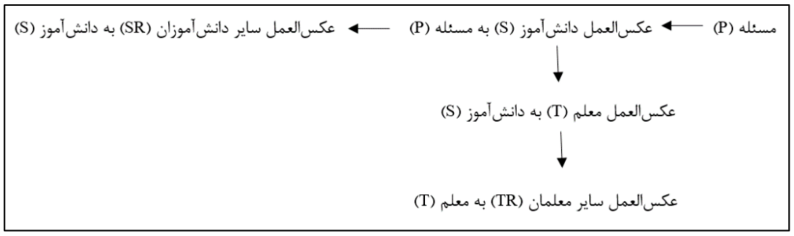
Figure 6: The relation between Van Hiele's levels and geometrical paradigms [3]

با توجه به شکل ۶، پارادایم هندسی۱ مربوط به سطح صفر (تجسم) و سطح اول (تجزیه و تحلیل) از سطوح تفکر فن‌هیلی است. در سطح دوم (استنتاج غیررسمی) گذر از پارادایم هندسی۱ به ۲ رخ می‌دهد و در سطح سوم (استنتاج) گذر از پارادایم هندسی۲ به ۳ مشاهده می‌شود و در نهایت، در سطح چهارم فن‌هیلی (دقت) پارادایم هندسی۳ مشاهده می‌شود. تفاوتی که بین پارادایم‌های هندسی و سطوح فن‌هیلی وجود دارد آن است که سطوح فن‌هیلی در بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل هندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما منظور از پارادایم‌های هندسی، نوع نگاه و طرز تفکری است که در شروع پاسخ‌دهی به مسائل هندسی به کار گرفته می‌شود و در راه‌حل نیز نمود پیدا می‌کند و همان‌طور که پیشتر نیز ذکر گردید در حل مسائل مختلف لازم است بین پارادایم‌ها به‌صورت رفت و برگشت حرکت نمود و نمی‌توان گفت که یک پارادایم بر دیگری ارجحیت دارد [۴، ۸]. زمانی که یک دانش‌آموز در پارادایم هندسی۱ قرار دارد، ممکن است در یک فضای کاری به حل مسئله بپردازد که مورد قبول پایه تحصیلی وی نباشد. برای مثال، اگر دانش‌آموزی که در مقطع متوسطه است، تنها با استفاده از شهود و ظاهر شکل یا به کمک اندازه‌گیری طول اضلاع به استدلال بپردازد احتمالاً از نظر معلم وی قابل پذیرش نیست. اما اگر همان روش استدلال توسط یک دانش‌آموز در مقطع ابتدایی صورت گیرد، قابل قبول است. بنابراین هیچ یک از پارادایم‌ها بر دیگری برتری ندارد بلکه هر یک از آن‌ها در موقعیت‌های خاصی به کار گرفته می‌شوند. از آنجایی که بسیاری از مشکلات فرآیند تدریس و یادگیری هندسه به دلیل تفاوت پارادایم و فضای کاری دانش‌آموزان و معلمان است، در صورتی که معلمان با این مفاهیم

[19]analyze [20]informal deduction [21]deduction demonstration [22]abstract structural

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

آشنایی داشته باشند می‌توانند این شکاف را از بین ببرند. رویکردی را که در ارتباط با تعامل معلم و دانش‌آموزان مدنظر است می‌توان به‌صورت رابطه زیر (شکل ۷) خلاصه کرد.



شکل ۷. بازخوردهای مهم در فرآیند تدریس هندسه [۶]

Figure 7: Important reactions in the process of teaching geometry [6]

همان‌طور که در شکل نیز مشاهده می‌شود در قدم اول، نحوه برخورد دانش‌آموز با یک مسئله و بازخورد سایر دانش‌آموزان به او باید مورد توجه قرار گیرد. سپس بازخورد معلم به پاسخ آن‌ها تعیین‌کننده است. در نهایت نیز موضوعی که کمتر به آن توجه می‌شود تعامل و مشورت معلمان با یکدیگر است که در بسیاری از کشورها این تعامل بسیار کمرنگ است. در واقع اشتراک‌گذاری تجربیات معلمان از نحوه نگاه و پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسائل هندسی می‌تواند به آن‌ها در روند حل مشکلات یادگیری دانش‌آموزان و شناسایی علل اشتباهات آن‌ها یاری رساند. پس به‌طور کلی، معلمان باید ضمن آگاهی از مفاهیم پارادایم‌های هندسی و فضاهای کاری با توجه به پایه تحصیلی دانش‌آموزان و همچنین هدفی که هر مسئله به دنبال آن است و با توجه به عکس‌العمل‌های دریافتی از دانش‌آموزان و سایر معلمان، دانش‌آموزان را به درستی راهنمایی کرده و با ارائه بازخوردهای مناسب، آن‌ها را به سمت فضای کاری موردنظر سوق دهند.

مراجع

[1] R. Duval, *Geometry from a cognitive point of view*, InC. Mammana and V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998 37–52.

[2] C. Houdement, Geometrical Working space, a tool for Comparison, *Proceedings of CERME5*, Larnaka, Cyprus, (2007) 972–982

[3] C. Houdement and A. Kuzniak, Elementary geometry split into different geometrical paradigms, In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME3*, Bellaria: Italy, **3** (2003).

[4] A. Kuzniak, *Thinking about the teaching of geometry through the lens of the theory of geometric working spaces*, In P. Herbst, U. H. Cheah, K. Jones, & P. Richard (Eds.), International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools, ICME-13 monographs, Cham, Switzerland: Springer, 2018 5–21.

[5] A. Kuzniak, *Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformation*, In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter–Koop (Eds.), Transformation: a fundamental idea of mathematics education, New York: Springer, 2013 311–325.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524

[6] A. Kuzniak and J. C. Rauscher, How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties?, *Educ. Stud. Math.*, **77** (2011) 129–147.

[7] A. Kuzniak and L. Vivier, A French look on the Greek Geometrical Working Space at secondary school level, *Proceeding of CERME 6*, Lyon: France, (2010) 686–695.

[8] A. Kuzniak, *Personal geometrical working space: a didactic and statistical approach*, In R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet, F. Spagnolo and (Eds.), Statistical Implicative Analysis: theory and applications studies in computational intelligence, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008 185–202.

[9] D. Lebot, *Mettre en place le concept d'angle et de sa grandeur à partir de situations ancrées dans l'espace vécu: Quelles influences sur les ETG? Master de didactique des mathématiques*, Paris: Irem P7, Université Paris-Diderot, 2011.

[10] P. Michael, *Geometrical figure apprehension: cognitive processes and structure (Unpublished doctoral thesis)*, The University of Cyprus, Cyprus, 2013.

[11] P. M. Van Hiele, *The child's thought and geometry*, In D. Geddes, D. Fuys, R. Tischler and (Eds.), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, Washington, D. C.: NSF, 1959 243–252.

نرگس یافتیان

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

yaftian@sru.ac.ir

نرگس یافتیان کارشناسی خود را در رشته دبیری ریاضی و کارشناسی ارشد را در رشته ریاضی‌کاربردی از دانشگاه خوارزمی اخذ نمود و مقطع دکترای ریاضی را در دانشگاه علم و صنعت گذراند و در حال حاضر استادیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی است. علائق پژوهشی و مطالعاتی وی در زمینه آموزش ریاضی است.

لادن پازوکی

دبیر ریاضی متوسطه دوم، استان تهران

pazokiladan@yahoo.com

لادن پازوکی کارشناسی خود را در رشته دبیری ریاضی از دانشگاه فرهنگیان پردیس نسیبه تهران و کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را از دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی اخذ نمود و در حال حاضر دبیر ریاضی مقطع متوسطه دوم در استان تهران است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.134772.1524