http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 1 (2023), pp. 97-108.

http://ui.ac.ir

A STUDY OF HORIZONTALLY WEAKLY CONFORMAL MAPS AND THEIR DISTRIBUTIONS

MEHRAN AMINIAN

Abstract. The aim of this paper is to consider horizontally weakly conformal maps which have been studied in [P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **29**, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003]. We first generalize the results of this book for Euclidean space with arbitrary Riemannian metrics and then we study totally umbilic and totally geodesic integral manifolds of the projection map, when regarded as conformal submersion between Euclidean spaces with arbitrary Riemannian metrics.

1. **Introduction**

The aim of this paper is to consider horizontally weakly conformal maps which have been studied in [3]. Horizontally weakly conformal maps are generalization of Riemannian submersions in a sense that at the point where $d\psi_x \neq 0$, where $d\psi_x$ denotes the differential of the map $\psi : (M^n, g) \to (\overline{M}^m, h)$, $d\psi_x$ preserves horizontal angels [6]. This is equivalent to the existence of a function Λ on M such that $\langle d\psi_x(X), d\psi_x(Y)\rangle_h = \Lambda(x)\,\langle X, Y\rangle_g$, for any horizontal vectors X, Y.

In section 2 of this paper, we study horizontally weakly conformal maps from a Riemannian manifold into an Euclidean space equipped with an arbitrary Riemannian metric and obtain some generalizations

Keywords: Horizontally weakly conformal maps, square dilation, distribution

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Research Paper.

Received: 21/03/2022, Accepted: 07/06/2023, Published Online: 29-08-2023.

Cite this article: M. Aminian, A study of horizontally weakly conformal maps and their distributions, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 1 (2023) 97–108.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567 .

of some results of [3] for Euclidean spaces with the canonical metric. We also give some results regarding the relationship between these maps and two dimensional Riemannian manifolds.

Finally, we study the horizontal and vertical distributions of the projection map between the Euclidean spaces equipped with an arbitrary Riemannian metrics, under the condition of conformality, and obtain some generalizations of the results in [3] which have been proved there in the setting of the Euclidean spaces equipped with their canonical metric.

2. Main Results

Definition 2.1. [3] *Let $\psi : (M^n, g) \to (\overline{M}^m, h)$ be a smooth map from Riemannian manifold (M, g) into Riemannian manifold $(\overline{M}, h)$. The map ψ is called horizontally weakly conformal when*

- $d\psi_x = 0$, *or*
- *the linear transformation $d\psi_x : T_xM \to T_{\psi(x)}\overline{M}$ is surjective and there is a number $\Lambda(x)$, which is called square dilation, such that for any $X, Y \in \mathcal{H}_x$,*

$$\langle d\psi_x(X), d\psi_x(Y)\rangle_h = \Lambda(x)\,\langle X, Y\rangle_g\,,$$

where $\mathcal{H}_x = \{\ker d\psi_x\}^\perp$ is the horizontal space.

Lemma 2.2. *Let $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$ be a smooth map from Riemannian manifold (M, g) into the Euclidean space $\mathbb{R}^m$ (with or without a Riemannian metric). Then $\ker d\psi = \cap_{i=1}^m \ker d\psi^i$ and $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_{\psi^1} + \cdots + \mathcal{H}_{\psi^m}$ which for every $i = 1, \ldots, m$, $\mathcal{H}_{\psi^i} = \langle \nabla\psi^i\rangle$. In particular, if ψ is a submersion then $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_{\psi^1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{\psi^m}$.*

Theorem 2.3. *Let $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$ be a smooth map from Riemannian manifold (M, g) into Riemannian manifold $(\mathbb{R}^m, h)$. Then ψ is a horizontally weakly conformal map with the square dilation Λ if and only if for any $i, j = 1, \ldots, m$, $\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j\rangle_g = \Lambda(h^{ij} \circ \psi)$.*

Proof. By Lemma 2.2 and for any $i, j = 1, \ldots, m$, we have

$$\left\langle d\psi(\nabla\psi^i), d\psi(\nabla\psi^j)\right\rangle_h = \Lambda\left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j\right\rangle_g\,,$$

and so

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^m d\psi^k(\nabla\psi^i)(h_{kl}\circ\psi)d\psi^l(\nabla\psi^j) &= \sum_{k,l=1}^m \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^k\right\rangle_g (h_{kl}\circ\psi)\left\langle \nabla\psi^l, \nabla\psi^j\right\rangle_g\\ &= \Lambda\left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j\right\rangle_g\,,\end{aligned}$$

which yields the conclusion. □

Theorem 2.4. *Let $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$ be a smooth map from Riemannian manifold (M, g) into Riemannian manifold $(\mathbb{R}^m, fh_{can})$, where f is a positive smooth function on the Euclidean space $\mathbb{R}^m$.*

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

Then ψ is a horizontally weakly conformal map with the square dilation Λ if and only if for any $i, j = 1, \ldots, m$, $\Lambda\delta_{ij} = (f \circ \psi) \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j \right\rangle_g$.

Corollary 2.5. [3] *Let $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m)$ be a smooth map from Riemannian manifold (M, g) into the Euclidean space $\mathbb{R}^m$. Then, ψ is a horizontally weakly conformal map with square dilation Λ if and only if for any $i, j = 1, \ldots, m$, $\Lambda\delta_{ij} = \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j \right\rangle_g$.*

Theorem 2.6. [3] *Composition of two horizontally weakly conformal maps $\psi : (M^n, g) \to (\overline{M}^m, h)$ and $\varphi : (\overline{M}^m, h) \to (\overline{\overline{M}}^k, l)$ with square dilations $\Lambda : M \to [0, \infty)$ and $\overline{\Lambda} : \overline{M} \to [0, \infty)$, is a horizontally weakly conformal map $\varphi \circ \psi$ with square dilation $\Lambda(\overline{\Lambda} \circ \psi) : M \to [0, \infty)$.*

Two dimensional Riemannian manifolds have locally isothermal coordinates. Therefore by use of Theorems 2.4 and 2.6, we get the following result.

Theorem 2.7. *Consider $\psi : (M^n, g) \to (\overline{M}^2, h)$ is a smooth map from Riemannian manifold (M, g) into two dimensional Riemannian manifold $(\overline{M}, h)$. Then ψ is a horizontally weakly conformal map if and only if for any local isothermal coordinate z (write z in a complex form) on $\overline{M}^2$, ∇z is isotropic, that is $\langle \nabla z, \nabla z \rangle_g = 0$.*

Corollary 2.8. [3] *A smooth map from Riemannian manifold (M, g) into a Riemann surface $\overline{M}^2$, is a horizontally weakly conformal map if and only if for any local complex coordinate z on $\overline{M}^2$, ∇z is isotropic.*

Lemma 2.9. *Suppose (M^n, g) is a smooth Riemannian manifold and $(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n)$ be its local coordinate and consider distributions $\mathcal{H} = \left\langle \nabla x^1, \cdots, \nabla x^m \right\rangle$ and $\mathcal{V} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{m+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle$. Then*

- $\mathcal{H} = \mathcal{V}^\perp$,
- *The distribution $\mathcal{H}$ is integrable if and only if for any $i, j = 1, \ldots, m$, $r = m+1, \ldots, n$,*
$$\sum_{A,B=1}^{n} \left(g^{iB} g^{jA} - g^{jB} g^{iA} \right) \frac{\partial g_{Ar}}{\partial x^B} = 0,$$
- *The distribution $\mathcal{V}$ is integrable,*
- *The maximal integral manifolds of $\mathcal{V}$ are totally geodesic if and only if for any $i = 1, \ldots, m$, $r, s = m+1, \ldots, n$,*
$$\sum_{j=1}^{m} T^{ij} \Gamma^j_{rs} = 0,$$
where $\{\Gamma^j_{rs}\}$ are Christoffel symbols of Levi-Civita connection ∇ and $(T_{ij}) = (g^{ij})$,
- *The maximal integral manifolds of $\mathcal{V}$ are totally umbilic if and only if for any $i = 1, \ldots, m$, $r, s = m+1, \ldots, n$,*
$$\sum_{j=1}^{m} T^{ij} \Big(\Gamma^j_{rs} - \frac{g_{rs}}{n-m} \sum_{t,v=m+1}^{n} L^{tv} \Gamma^j_{tv} \Big) = 0,$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

where $(L_{tv}) = (g_{tv})$.

Theorem 2.10. *Consider the projection map* $\psi : (\mathbb{R}^n, g) \to (\mathbb{R}^m, h)$, $\psi(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$. *In any point* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *vertical space* $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$ *is spanned by* $\{\frac{\partial}{\partial x^{m+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ *and horizontal space* $\mathcal{H}_{\mathbf{x}}$ *is spanned by* $\{\overset{g}{\nabla} x^1, \cdots, \overset{g}{\nabla} x^m\}$. *Then* ψ *is a conformal submersion with the square dilation* Λ *if and only if for any* $i, j = 1, \dots, m$, $g^{ij} = \Lambda(h^{ij} \circ \psi)$, *and so*

- $\mathcal{H} = \mathcal{V}^\perp$,
- *The distribution* $\mathcal{H}$ *is integrable if and only if for any* $i, j = 1, \dots, m$, $r = m+1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
&\Lambda^2 \sum_{k,l=1}^{m} \Big((h^{il}h^{jk} - h^{jl}h^{ik}) \circ \psi\Big) \ \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^l} \\
&+ \Lambda \sum_{s=m+1,\dots,n,\ l=1,\dots,m} \Big((h^{il} \circ \psi)\ g^{js} - (h^{jl} \circ \psi)\ g^{is}\Big) \frac{\partial g_{sr}}{\partial x^l} \\
&+ \Lambda \sum_{s=m+1,\dots,n,\ l=1,\dots,m} \Big(g^{is}(h^{jl} \circ \psi) - g^{js}(h^{il} \circ \psi)\Big) \frac{\partial g_{lr}}{\partial x^s} \\
&+ \sum_{t,s=m+1}^{n} \left(g^{is}g^{jt} - g^{js}g^{it}\right) \frac{\partial g_{tr}}{\partial x^s} = 0,
\end{aligned}$$

- *The distribution* $\mathcal{V}$ *is integrable and its maximal integral manifolds are* $(n-m)$*-dimensional planes which are fibers of* ψ,
- *The plane fibers are totally geodesic if and only if for any* $i = 1, \dots, m$, $r, s = m+1, \dots, n$,

$$\sum_{j=1}^{m} (h_{ij} \circ \psi)\Gamma^j_{rs} = 0,$$

  where $\{\Gamma^j_{rs}\}$ *are Christoffel symbols of Levi-Civita connection* $\overset{g}{\nabla}$,
- *The plane fibers are totally umbilic if and only if for any* $i = 1, \dots, m$, $r, s = m+1, \dots, n$,

$$\sum_{j=1}^{m} (h_{ij} \circ \psi)\Big(\Gamma^j_{rs} - \frac{g_{rs}}{n-m} \sum_{t,v=m+1}^{n} L^{tv}\Gamma^j_{tv}\Big) = 0,$$

  where $(L_{tv}) = (g_{tv})$.

Corollary 2.11. [3] *Consider the orthogonal projection* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\psi(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$. *In any point* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *vertical space* $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$ *is spanned by* $\{\frac{\partial}{\partial x^{m+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ *and horizontal space* $\mathcal{H}_{\mathbf{x}}$ *is spanned by* $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$, *and the map* ψ *is a conformal submersion with square dilation one. Distributions* $\mathcal{V}$ *and* $\mathcal{H}$, *are orthogonal to each other, integrable and their maximal integral manifolds are totally geodesic, and respectively are* $(n-m)$*-dimensional and* m*-dimensional planes.*

Theorem 2.12. *Consider the double covering map* $\psi : (\mathbb{S}^n, g) \to (\mathbb{R}P^n, h_{std})$, $\psi(p) = [p]$, $p \in \mathbb{S}^n$, *where* g *is a Riemannian metric on* $\mathbb{S}^n$ *and* h_{std} *is the standard Riemannian metric of* $\mathbb{R}P^n$. *Then* ψ

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

is a conformal submersion if and only if g and the standard Riemannian metric of $\mathbb{S}^n$ are conformally equivalent.

3. Conclusions

In this paper, we considered the horizontally weakly conformal maps which have been studied in [3]. We generalized the results of [3] for Euclidean space with arbitrary Riemannian metrics and then we studied totally umbilic and totally geodesic integral manifolds of the projection map, when regarded as conformal submersion between Euclidean spaces with arbitrary Riemannian metrics.

References

[1] P. Baird, *Harmonic maps with symmetry, harmonic morphism and deformations of matrics*, Research Notes in Mathematics, **87**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1983.

[2] P. Baird and S. Gudmundsson, p-harmonic maps and minimal submanifolds, *Math. Ann.*, **294** (1992) 611–624.

[3] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **29**, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[4] M. P. Do Carmo and J. Flaherty Francis, *Riemannian geometry*, **6**, Springer, 1992.

[5] B. Fuglede, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **28** (1978) 107–144.

[6] E. Ghandour and Y.-L. Ou, Generalized harmonic morphisms and horizontally weakly conformal biharmonic maps, *J. Math. Anal. Appl.*, **464** (2018) 924–938.

[7] A. Kasue and T. Washio, Growth of equivariant harmonic maps and harmonic morphisms, *Osaka J. Math.*, **27** (1990) 899–928.

[8] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, New York, 2013.

[9] B. O'neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, **103**, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[10] G. Yun, Harmonicity of horizontally conformal maps and spectrum of the laplacian, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **30** (2002) 709–715.

Mehran Aminian

Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

mehran.aminian@vru.ac.ir

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

http://www.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۸، شماره ۱ (۱۴۰۲)، صص. ۹۷-۱۰۸.

http://math-sci.ui.ac.ir

بررسی نگاشت‌های همدیس ضعیف افقی و توزیع آنها

مهران امینیان

چکیده. هدف از این مقاله بررسی نگاشت‌های همدیس ضعیف افقی مطرح شده در [۳] است. در ابتدا سعی می‌کنیم با درنظر گرفتن متریک‌های ریمانی دلخواه روی فضای اقلیدسی نتایج این کتاب را تعمیم دهیم و سپس به بررسی خمینه‌های انتگرال تماماً نافی و تماماً ژئودزیک از توزیع‌های نگاشت تصویر، و فرابری همدیس بین فضاهای اقلیدسی با متریک‌های ریمانی دلخواه می‌پردازیم.

۱. مقدمه

در این مقاله، در مورد یک شرط ویژه بر روی یک نگاشت خواهیم پرداخت که دوگان شرط همدیس ضعیف است. تلاش می‌کنیم تا با تعاریف، مثال‌ها و قضایا، این دوگانی را بررسی کنیم. این شرط در دسته‌بندی مورفیسم‌های همساز حیاتی است. این شرط همان همدیس ضعیف افقی بودن است و این نگاشت‌های همدیس افقی توسط نویسندگان بسیاری مطالعه شده است [۱، ۲، ۵، ۷، ۱۰].

هدف از این مقاله بررسی نگاشت‌های همدیس ضعیف افقی مطرح شده در کتاب پال برد و جان سی وود است، [۳]. نگاشت‌های همدیس ضعیف افقی تعمیمی از فرابری‌های ریمانی هستند درحالتی که دیفرانسیل نگاشت $\psi : (M^n, g) \to (\overline{M}^m, h)$ در نقطه‌ای ناصفر است، $d\psi_x \neq 0$، $d\psi_x$ زوایای افقی را حفظ می‌کند [۶]. این مطلب معادل با وجود تابعی مانند Λ روی خمینه دامنه است به‌طوری‌که $\langle d\psi_x(X), d\psi_x(Y)\rangle_h = \Lambda(x)\,\langle X, Y\rangle_g$ ، برای هر دو بردار افقی X, Y.

در ابتدای بخش دوم مقاله، پیش‌نیازهای مقاله را بیان می‌کنیم. در بخش سوم نگاشت‌های همدیس ضعیف افقی از یک خمینه ریمانی به فضای اقلیدسی با متریک ریمانی دلخواه در نظر می‌گیریم که تعمیمی از نتیجه کتاب [۳]، برای فضای اقلیدسی با متریک متعارف آن است. سپس در این راستا، نتایج دیگری مانند ارتباط این نگاشت‌ها و خمینه‌های ریمانی دو-بعدی را مطرح می کنیم.

در بخش چهارم، توزیع‌های عمودی و افقی نگاشت تصویر، با شرط همدیس بودن، را بین فضاهای اقلیدسی با متریک‌های ریمانی دلخواه بررسی می‌کنیم؛ که تعمیمی از مثال مطرح شده در کتاب [۳]، برای نگاشت تصویر بین فضاهای اقلیدسی با متریک متعارف آنها است؛ و در این زمینه نتایج جذابی را ارائه می‌کنیم.

عبارات و کلمات کلیدی: نگاشت همدیس افقی، اتساع مربع، توزیع.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۱۷ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۶/۰۷
ارجاع به مقاله: م. امینیان، بررسی نگاشت‌های همدیس ضعیف افقی و توزیع آنها، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره. ۱ (۱۴۰۲) ۹۷–۱۰۸.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567 .

۲. پیش‌نیازها

در این بخش پیش‌نیازهایی از [۳، ۴، ۹] را بیان می‌کنیم که در این مقاله از آن‌ها استفاده می‌کنیم. یک متریک ریمانی g روی خمینه هموار n–بعدی M تناظری است که به هر نقطه x از M، یک ضرب داخلی (یعنی یک فرم دوخطی، متقارن و مثبت معین) $\langle,\rangle_{g_x}$ روی فضای مماس T_xM نسبت می‌دهد که به‌طور هموار تغییر می‌کند یعنی اگر $(x^1,\dots,\dots,x^n)$ مختصات موضعی M در همسایگی U حول نقطه x باشد آنگاه برای هر $i,j=1,\dots,n$،

$$g_{ij}(q)=\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle_{g_q},$$

$q\in U$، تابعی هموار روی U است. بدیهی است که این تعریف وابسته به انتخاب دستگاه مختصات نیست. (M,g) را یک خمینه ریمانی نامند.

یک هموستار آفین روی خمینه هموار M نگاشتی است

$$\nabla:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$$

که دارای خواص پایین است:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \nabla_{fX+lY}Z=f\nabla_XZ+l\nabla_YZ,\\
&\text{(ii)} && \nabla_X(Y+Z)=\nabla_XY+\nabla_XZ,\\
&\text{(iii)} && \nabla_X(fY)=f\nabla_XY+X(f)Y,
\end{aligned}$$

که $X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$ (میدان‌های برداری هموار روی M) و f,l توابعی هموار روی M هستند. هر خمینه ریمانی (M,g) را می‌توان به یک هموستار آفین یکتا (لوی–چویتا) مجهز کرد به‌طوری‌که متقارن و سازگار با متریک ریمانی g باشد یعنی به‌ترتیب دو شرط پایین برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
&\text{(iv)} && \nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y],\\
&\text{(v)} && Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle.
\end{aligned}$$

نمادهای کریستوفل هموستار لوی–چویتا با رابطه

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},$$

تعریف می‌شوند. چون ماتریس (g_{ij}) دارای وارون (g^{ij}) است، نتیجه می‌شود

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jm}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{mi}-\frac{\partial}{\partial x^m}g_{ij}\right\}g^{km}.$$

برای فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با متریک ریمانی متعارف آن داریم $\Gamma_{ij}^k=0$.

گرادیان یک تابع هموار f روی خمینه ریمانی (M,g) ، یک میدان برداری هموار ∇f روی M است که با رابطه

$$\left\langle\nabla f(x),v\right\rangle_{g_x}=df_x(v),\quad x\in M,\ v\in T_xM,$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

تعریف می‌شود. در مختصات موضعی، گرادیان f به شکل

$$\nabla f=\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j},$$

نمایش داده می‌شود.

روی خمینه M دو متریک ریمانی g و h هم‌ارز همدیس نامیده می‌شوند اگر $h=ag$ ، برای یک تابع a هموار و مثبت روی M، که بوضوح یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد. این مفهوم به‌ویژه اگر M یک خمینه ریمانی دو–بعدی باشد اهمیت دارد و برای آنها مختصات مفید تک‌دمایی[1] را داریم. فرض کنید (M^2,g) یک خمینه ریمانی دو–بعدی باشد. حول هر نقطه از M یک نقشه $\{U,(x,y)\}$ وجود دارد طوری‌که

$$g=\mu^2(dx^2+dy^2),$$

برای یک تابع هموار، حقیقی–مقدار و مثبت μ روی U. چنین مختصاتی (x,y)، را مختصات تک‌دمایی نامند. اگر M را با یک مجموعه از مختصات تک‌دمایی $\{(x_\alpha,y_\alpha)\}$ بپوشانیم، آنگاه توابع گذر $\psi_{\alpha\beta}:(x_\alpha,y_\alpha)\to(x_\beta,y_\beta)$ نگاشت‌های همدیس بین مجموعه‌های باز از $\mathbb{R}^2$ هستند، یعنی آن‌ها زوایا را حفظ می‌کنند. به‌علاوه اگر M جهت‌پذیر باشد، می‌توان نقشه‌ها را حافظ جهت انتخاب کرد و هم‌ارز آن، توابع گذر $\psi_{\alpha\beta}:x_\alpha+\mathrm{i}y_\alpha\to x_\beta+\mathrm{i}y_\beta$ تمام‌ریخت می‌باشند و بنابراین M ساختار یک خمینه مختلط یک–بعدی را داراست که اغلب رویه ریمان نامیده می‌شود. با قرار دادن $z_\alpha=x_\alpha+\mathrm{i}y_\alpha$ مختصات مختلط موضعی برای M به‌دست می‌آید.

۳. نگاشت‌های همدیس ضعیف افقی

برای هر نگاشت هموار $\psi:(M^n,g)\to(\overline{M}^m,h)$ بین خمینه‌های ریمانی دلخواه و هر نقطه $x\in M$، قرار دهید

$$\mathcal{H}_x=\mathcal{H}_x(\psi)=\mathcal{V}_x^{\perp} \text{ و } \mathcal{V}_x=\mathcal{V}_x(\psi)=\ker d\psi_x$$

که $\mathcal{V}_x$ فضای عمودی و $\mathcal{H}_x$ فضای افقی ψ در x نامیده می‌شوند. یک نقطه بحرانی از ψ نقطه‌ای مانند $x\in M$ است که

$$\texttt{rank}\ d\psi_x<\min\{m,n\}.$$

مجموعه نقاط بحرانی ψ را با C_ψ نمایش می‌دهیم. تخصیص $x\to\mathcal{H}_x$ و $x\to\mathcal{V}_x$ توزیع‌های هموار $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\psi)$ و $\mathcal{V}=\mathcal{V}(\psi)$ روی $M\setminus C_\psi$ تعریف می‌کنند که به‌ترتیب، توزیع افقی و توزیع عمودی نامیده می‌شوند. $\mathcal{V}$ همچنین کلاف مماس عمودی نامیده می‌شود؛ برای $M\setminus C_\psi$، این توزیع، فضای مماس به تار ψ در x را می‌دهد.

تعریف ۳.۱. [۳] فرض کنیم $\psi:(M^n,g)\to(\overline{M}^m,h)$ یک نگاشت هموار از خمینه ریمانی (M,g) به خمینه ریمانی $(\overline{M},h)$ باشد. نگاشت ψ را همدیس ضعیف افقی در $x\in M$ گویند هرگاه

- $d\psi_x=0$، یا
- تبدیل خطی $d\psi_x:T_xM\to T_{\psi(x)}\overline{M}$ پوشا باشد و عددی مانند $\Lambda(x)$ موجود باشد، اتساع مربع نامیده می‌شود، طوری‌که برای هر $X,Y\in\mathcal{H}_x$،

$$\langle d\psi_x(X),d\psi_x(Y)\rangle_h=\Lambda(x)\left\langle X,Y\right\rangle_g,$$

[1]isothermal

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

که $\mathcal{H}_x = \{\ker d\psi_x\}^\perp$ فضای افقی است.

با صفر قراردادن $\Lambda(x)$ در نقاط بحرانی، اتساع مربع به یک تابع هموار روی M گسترش می‌یابد طوری‌که $\Lambda : M \to [0, \infty)$ و $\Lambda(x) = \frac{1}{m}|d\psi_x|^2$. نگاشت ψ را همدیس ضعیف افقی گویند هرگاه در هر نقطه M همدیس ضعیف افقی باشد و اگر ψ نقطه بحرانی نداشته باشد آن را فرابری همدیس نامند و در این‌حالت Λ همواره ناصفر است.

لم ۲.۳. فرض کنیم $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ یک نگاشت هموار از خمینه ریمانی (M, g) به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ باشد. آنگاه $\ker d\psi = \cap_{i=1}^m \ker d\psi^i$ و $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_{\psi^1} + \cdots + \mathcal{H}_{\psi^m}$ که برای هر $i = 1, \dots, m$، $\mathcal{H}_{\psi^i} = \langle \nabla\psi^i \rangle$. به‌ویژه اگر ψ یک فرابری باشد، آنگاه $\mathcal{H}_\psi = \mathcal{H}_{\psi^1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{\psi^m}$.

قضیه ۳.۳. فرض کنیم $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ یک نگاشت هموار از خمینه ریمانی (M, g) به خمینه ریمانی $(\mathbb{R}^m, h)$ باشد. آنگاه ψ یک نگاشت همدیس ضعیف افقی با اتساع مربع Λ است اگر و تنها اگر برای هر $i, j = 1, \dots, m$، $\left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j \right\rangle_g = \Lambda(h^{ij} \circ \psi)$، و بنابراین $\Lambda = \frac{1}{m} \sum_{k,l=1}^m (h_{lk} \circ \psi) \left\langle \nabla\psi^k, \nabla\psi^l \right\rangle_g$.

اثبات. با استفاده از لم ۲.۳، برای هر $i, j = 1, \dots, m$، خواهیم داشت

$$\left\langle d\psi(\nabla\psi^i), d\psi(\nabla\psi^j) \right\rangle_h = \Lambda \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j \right\rangle_g ,$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^m d\psi^k(\nabla\psi^i)(h_{kl} \circ \psi) d\psi^l(\nabla\psi^j) &= \sum_{k,l=1}^m \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^k \right\rangle_g (h_{kl} \circ \psi) \left\langle \nabla\psi^l, \nabla\psi^j \right\rangle_g \\ &= \Lambda \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j \right\rangle_g , \end{aligned}$$

و با در نظر گرفتن معادله فوق بمانند ضرب ماتریسی به نتیجه مطلوب می‌رسیم. □

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ یک نگاشت هموار از خمینه ریمانی (M, g) به خمینه ریمانی $(\mathbb{R}^m, fh_{can})$ باشد که f یک تابع مثبت هموار روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ است. آنگاه ψ یک نگاشت همدیس ضعیف افقی با اتساع مربع Λ است اگر و تنها اگر برای هر $i, j = 1, \dots, m$، $\Lambda\delta_{ij} = (f \circ \psi) \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j \right\rangle_g$.

نتیجه ۵.۳. [۳] فرض کنیم $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$ یک نگاشت هموار از خمینه ریمانی (M, g) به فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ باشد. آنگاه ψ یک نگاشت همدیس ضعیف افقی با اتساع مربع Λ است اگر وتنها اگر برای هر $i, j = 1, \dots, m$، $\Lambda\delta_{ij} = \left\langle \nabla\psi^i, \nabla\psi^j \right\rangle_g$.

قضیه ۶.۳. [۳] ترکیب دو نگاشت همدیس ضعیف افقی $\psi : (M^n, g) \to (\overline{M}^m, h)$ و $\varphi : (\overline{M}^m, h) \to (\overline{\overline{M}}^k, l)$ با اتساع مربع‌های $\Lambda : M \to [0, \infty)$ و $\overline{\Lambda} : \overline{M} \to [0, \infty)$، یک نگاشت همدیس ضعیف افقی $\varphi \circ \psi$ با اتساع مربع $\Lambda(\overline{\Lambda} \circ \psi) : M \to [0, \infty)$ است.

خمینه‌های ریمانی دو–بعدی موضعاً دارای مختصات تک‌دمایی هستند. بنابراین با بهره‌گیری از قضیه ۴.۳ و قضیه ۶.۳، به نتیجه پایین می‌رسیم.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

قضیه ۷.۳. فرض کنیم $\psi:(M^n,g)\to(\overline{M}^{۲},h)$ یک نگاشت هموار از خمینه ریمانی (M,g) به خمینه ریمانی دو–بعدی $(\overline{M},h)$ باشد. آنگاه ψ یک نگاشت همدیس ضعیف افقی است اگر و تنها اگر برای هر مختصات تک‌دمایی موضعی z (به شکل مختلط z در نظر بگیرید) روی $\overline{M}^{۲}$، ∇z همسان‌گرد[۲] باشد، یعنی $\langle\nabla z,\nabla z\rangle_g=\circ$.

نتیجه ۸.۳. [۳] یک نگاشت هموار از یک خمینه ریمانی (M,g) به یک رویه ریمان $\overline{M}^{۲}$، همدیس ضعیف افقی است اگر و تنها اگر برای هر مختصات مختلط موضعی z روی $\overline{M}^{۲}$، ∇z همسان‌گرد باشد.

۴. خمینه‌های انتگرال تماماً نافی و تماماً ژئودزیک از توزیع‌های یک فرابری همدیس

تعریف ۱.۴.
- یک توزیع k–بعدی را انتگرال‌پذیر گویند هرگاه در هر نقطه خمینه پایه، یک خمینه انتگرال (یکتا، بیشینه، همبند و k–بعدی) از توزیع موجود باشد و این معادل است با اینکه کروشه لی هر دو میدان برداری توزیع، متعلق به توزیع باشد (رجوع کنید به [۸]).
- زیرخمینه یک خمینه ریمانی را تماماً نافی گویند هرگاه در هر نقطه x نافی باشد یعنی برای تمام بردارهای U,V در فضای مماس زیرخمینه در نقطه x، $\mathrm{II}(U,V)=\langle U,V\rangle_g\vec{H}$ که II فرم اساسی دوم و $\vec{H}$ بردار خمیدگی میانگین در x است (رجوع کنید به [۹]).
- زیرخمینه یک خمینه ریمانی را تماماً ژئودزیک گویند هرگاه در هر نقطه x، فرم اساسی دوم صفر باشد.

لم ۲.۴. فرض کنیم (M^n,g) یک خمینه ریمانی هموار و $(x^۱,\dots,x^m,x^{m+۱},\dots,x^n)$ مختصات موضعی آن باشد. توزیع‌های $\mathcal{H}=\langle\nabla x^۱,\cdots,\nabla x^m\rangle$ و $\mathcal{V}=\langle\frac{\partial}{\partial x^{m+۱}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\rangle$ را در نظر بگیرید. آنگاه
- $\mathcal{H}=\mathcal{V}^{\perp}$،
- $\mathcal{H}$ انتگرال‌پذیر است اگر تنها اگر برای هر $i,j=۱,\dots,m$ و هر $r=m+۱,\dots,n$،

$$\sum_{A,B=۱}^{n}\left(g^{iB}g^{jA}-g^{jB}g^{iA}\right)\frac{\partial g_{Ar}}{\partial x^B}=\circ,$$

- توزیع $\mathcal{V}$ انتگرال‌پذیر است،
- خمینه‌های بیشینه انتگرال $\mathcal{V}$ تماماً ژئودزیک هستند اگر و تنها اگر برای هر $i=۱,\dots,m$ و هر $r,s=m+۱,\dots,n$،

$$\sum_{j=۱}^{m}T^{ij}\Gamma^j_{rs}=\circ,$$

که $\{\Gamma^j_{rs}\}$ نمادهای کریستوفل هموستار لوی–چویتا ∇ می‌باشد و $(T_{ij})=(g^{ij})$،
- خمینه‌های بیشینه انتگرال $\mathcal{V}$ تماماً نافی هستند اگر و تنها اگر برای هر $i=۱,\dots,m$ و هر $r,s=m+۱,\dots,n$،

$$\sum_{j=۱}^{m}T^{ij}\left(\Gamma^j_{rs}-\frac{g_{rs}}{n-m}\sum_{t,v=m+۱}^{n}L^{tv}\Gamma^j_{tv}\right)=\circ,$$

که $(L_{tv})=(g_{tv})$.

---
[2] isotropic

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

قضیه ۳.۴. نگاشت تصویر $\psi:(\mathbb{R}^n,g)\to(\mathbb{R}^m,h)$، $\psi(x^1,\dots,x^m,x^{m+1},\dots,x^n)=(x^1,\dots,x^m)$ را در نظر بگیرید. در هر نقطه $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$، فضای عمودی $\mathcal{V}_{\mathrm{x}}$ توسط $\{\frac{\partial}{\partial x^{m+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ و فضای افقی $\mathcal{H}_{\mathrm{x}}$ توسط $\{\overset{g}{\nabla}x^1,\cdots,\overset{g}{\nabla}x^m\}$ تولید می‌شود. آنگاه ψ یک فرابری همدیس با اتساع مربع Λ است اگر و تنها اگر برای هر $i,j=1,\dots,m$، $g^{ij}=\Lambda(h^{ij}\circ\psi)$ و بنابراین

- $\mathcal{H}=\mathcal{V}^\perp$،
- $\mathcal{H}$ انتگرال‌پذیر است اگر تنها اگر برای هر $i,j=1,\dots,m$ و هر $r=m+1,\dots,n$،

$$\begin{aligned}&\Lambda^2\sum_{k,l=1}^{m}\Big((h^{il}h^{jk}-h^{jl}h^{ik})\circ\psi\Big)\ \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^l}\\&+\Lambda\sum_{s=m+1,\dots,n,\ l=1,\dots,m}\Big((h^{il}\circ\psi)\ g^{js}-(h^{jl}\circ\psi)\ g^{is}\Big)\frac{\partial g_{sr}}{\partial x^l}\\&+\Lambda\sum_{s=m+1,\dots,n,\ l=1,\dots,m}\Big(g^{is}(h^{jl}\circ\psi)-g^{js}(h^{il}\circ\psi)\Big)\frac{\partial g_{lr}}{\partial x^s}\\&+\sum_{t,s=m+1}^{n}\left(g^{is}g^{jt}-g^{js}g^{it}\right)\frac{\partial g_{tr}}{\partial x^s}=0,\end{aligned}$$

- توزیع $\mathcal{V}$ انتگرال‌پذیر است و خمینه‌های بیشینه انتگرال آن صفحات $(n-m)$–بعدی، تارهای ψ، هستند،
- صفحات تار تماماً ژئودزیک هستند اگر و تنها اگر برای هر $i=1,\dots,m$ و هر $r,s=m+1,\dots,n$،

$$\sum_{j=1}^{m}(h_{ij}\circ\psi)\Gamma^j_{rs}=0,$$

که $\{\Gamma^j_{rs}\}$ نمادهای کریستوفل هموستار لوی–چویتا $\overset{g}{\nabla}$ می‌باشد،
- صفحات تار تماماً نافی هستند اگر و تنها اگر برای هر $i=1,\dots,m$ و هر $r,s=m+1,\dots,n$،

$$\sum_{j=1}^{m}(h_{ij}\circ\psi)\Big(\Gamma^j_{rs}-\frac{g_{rs}}{n-m}\sum_{t,v=m+1}^{n}L^{tv}\Gamma^j_{tv}\Big)=0,$$

که $(L_{tv})=(g_{tv})$.

نتیجه ۴.۴. [۳] نگاشت تصویر متعامد $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$، $\psi(x^1,\dots,x^m,x^{m+1},\dots,x^n)=(x^1,\dots,x^m)$ را در نظر بگیرید. در هر نقطه $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$، فضای عمودی $\mathcal{V}_{\mathrm{x}}$ توسط $\{\frac{\partial}{\partial x^{m+1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ و فضای افقی $\mathcal{H}_{\mathrm{x}}$ توسط $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m}\}$ تولید می‌شود و نگاشت ψ یک فرابری همدیس با اتساع مربع یک است، که در این حالت آن را فرابری ریمانی نامند. توزیع‌های $\mathcal{V}$ و $\mathcal{H}$، متمم متعامد یکدیگر و انتگرال‌پذیر و خمینه‌های بیشینه انتگرال آن‌ها تماماً ژئودزیک (و بنابراین تماماً نافی) هستند و به‌ترتیب، صفحات $(n-m)$–بعدی و m–بعدی می‌باشند.

قضیه ۵.۴. نگاشت پوشش دوگانه $\psi:(\mathbb{S}^n,g)\to(\mathbb{R}P^n,h_{std})$، $\psi(p)=[p]$، $p\in\mathbb{S}^n$، را در نظر می‌گیریم که g یک متریک ریمانی روی $\mathbb{S}^n$ و h_{std} متریک ریمانی استاندارد $\mathbb{R}P^n$ است. در این‌صورت ψ یک فرابری همدیس است اگر و تنها اگر g و متریک ریمانی استاندارد $\mathbb{S}^n$، هم‌ارز همدیس باشند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567

مراجع

[1] P. Baird, *Harmonic maps with symmetry, harmonic morphism and deformations of matrics*, Research Notes in Mathematics, **87**, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1983.

[2] P. Baird and S. Gudmundsson, p-harmonic maps and minimal submanifolds, *Math. Ann.*, **294** (1992) 611–624.

[3] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **29**, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[4] M. P. Do Carmo and J. Flaherty Francis, *Riemannian geometry*, **6**, Springer, 1992.

[5] B. Fuglede, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **28** (1978) 107–144.

[6] E. Ghandour and Y.-L. Ou, Generalized harmonic morphisms and horizontally weakly conformal biharmonic maps, *J. Math. Anal. Appl.*, **464** (2018) 924–938.

[7] A. Kasue and T. Washio, Growth of equivariant harmonic maps and harmonic morphisms, *Osaka J. Math.*, **27** (1990) 899–928.

[8] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, New York, 2013.

[9] B. O'neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics, **103**, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[10] G. Yun, Harmonicity of horizontally conformal maps and spectrum of the laplacian, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **30** (2002) 709–715.

مهران امینیان

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج)، رفسنجان، ایران

mehran.aminian@vru.ac.ir

مهران امینیان متولد اسفند ماه ۱۳۶۱ در شهر رفسنجان است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه شهید باهنر شد و در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف شد و در سال‌های ۱۳۹۳-۱۳۹۰ مدرک دکتری را در رشته ریاضی گرایش هندسه از دانشگاه تربیت مدرس دریافت کرد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137212.1567