Mechanics of Advanced and Smart Materials Journal 4(1) (2024) 1 – 19

Mechanics of Advanced and Smart Materials Journal

http://masm.araku.ac.ir

ISSN: 2783-4220

The Effect of porosity distribution on the free vibration of tapered nanocomposite sandwich beam

Mostafa Teymouri [a], Mostafa Talebitooti [a*], Ali Ghorbanpour Arani [b]

[a] Department of Mechanical Engineering, Qom University of Technology, Qom, 3718146645, Iran
[b] Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, 8731753153, Iran

Original Article

Use your device to scan and read the article online

Citation: Teymouri M, Talebitooti M, Ghorbanpour Arani A. The Effect of porosity distribution on the free vibration of tapered nanocomposite sandwich beam. Mechanics of Advanced and Smart Materials. 2024; 4(1): 1-19

https://10.61186/masm.4.1.1

KEYWORDS

Vibration,
Porous foam,
Timoshenko theory,
Differential quadrature method,
Sandwich beam.

ABSTRACT

In this research, free vibration of tapered sandwich beam with variable thickness is investigated. The core is made of porous aluminum foam, which is included by two composite skins reinforced with carbon nanotubes. In order to derive the equations of motion, first the constitutive equations of the core and skins are expressed. Then the kinetic and strain energies of the beam are calculated. Formerly, with the aid of applying Hamilton's principle, the equations of motion of the beam, which are of the type of partial differential equations, and also the equations of the boundary conditions are derived. Next, using the differential quadrature method, the equations of motion and boundary conditions are discretized in the form of algebraic equations and rewritten in the form of the standard eigenvalue equation. By solving the eigenvalue problem, the natural frequency is evaluated. In order to validation of modeling and solution method, the present results are compared with those available in the literature. Finally, the effect of porosity distribution, porosity coefficient, core thickness and beam length on the natural frequency is investigated.

Extended Abstract

1. Introduction

Porous metal foam beams, sheets and shells have special properties such as low density, energy absorption, heat resistance and high specific strength, which have led to their use in aerospace industries and sound absorption systems. Recently, in order to discover the practical needs of industries, they have become a global focus of attention in the fields of engineering between research communities [1-3]. In order to address the high practical needs of engineering industries, understanding the dynamic properties of porous metal foam beams, sheets and shells is important. Analysis of dynamic and vibration behavior of porous metal foam structures is a new area of study.

K. Magnucki. and P. Stasiewicz in [4] focused on the buckling of a simply supported isotropic porous beam with variable thickness and tensile stiffness. D. Chen et al. [5] analyzed the bending and buckling of a functionally graded (FG) porous beam based on the Timoshenko beam theory. An analytical solution was proposed by H. A Atmane et al. [8] to address the problem of bending, free vibration and the buckling of an FG porous beam while considering shear deformation and tensile thickness. S. Kitipornchai et al. [10] studied the free vibration and buckling of graphene-reinforced minor FG porous beams using the Timoshenko beam theory and the Rayleigh-Ritz method. Phuong et al. [13] analyzed the bending behavior of a Timoshenko FG porous beam. H. Tang et al.

* Corresponding author. Tel.: 09124708858; Fax: 02536641604
E-mail address: talebi@qut.ac.ir
DOI: https://10.61186/masm.4.1.1
Received: February 26, 2024; Received in revised form: March 16, 2024; Accepted: April 27, 2024

[14] proposed a nonlocal integrated strain gradient model to investigate the bending behavior of FG porous beams at micro/nanoscales, considering the influence of beam thickness. M. Derikvand et al. [16] investigated the buckling behavior of FG porous sandwich beams using a differential transformation method. A. AlNujaidi et al. [17] utilized a finite element method to analyze the forced vibration of a thick FG porous beam, employing a 12-node plate element to study its dynamic behavior. N.D. Nguyen et al. [18] proposed a novel beam deformation theory to analyze the buckling, vibration, and bending behavior of FG porous beams.

Based on the literature review, it has been identified that the vibrational behavior of sandwich beams with porous cores and nanocomposite layers has not been studied. Additionally, modeling the porous core with variable porosity is another novelty of this research. In this study, a beam with nanocomposite layers and a porous core with variable porosity is mathematically modeled, and then the differential quadrature method (DQM) is used to solve the governing equations. Ultimately, the effects of porosity and engineering parameters on the vibrational behavior of the beam are investigated. The advantage of using DQM is its ability to model variable beam porosity at any desired cross-section without requiring a specific function for this purpose, facilitating the optimization process for achieving the desired vibrational response in future studies.

2. Mathematical modeling

Figure 1 depicts a sandwich beam with length L, initial core thickness h_b, final core thickness h_e, and face thickness h_s. Additionally, the discretization scheme of the beam, intended for use in the differential quadrature method, has been presented schematically. According to Equation 1, the core thickness of the beam varies linearly along its length, while its width remains constant. Consequently, the cross-sectional area of the core changes linearly and its second moment of inertia varies with a degree of 3 along the beam's length.

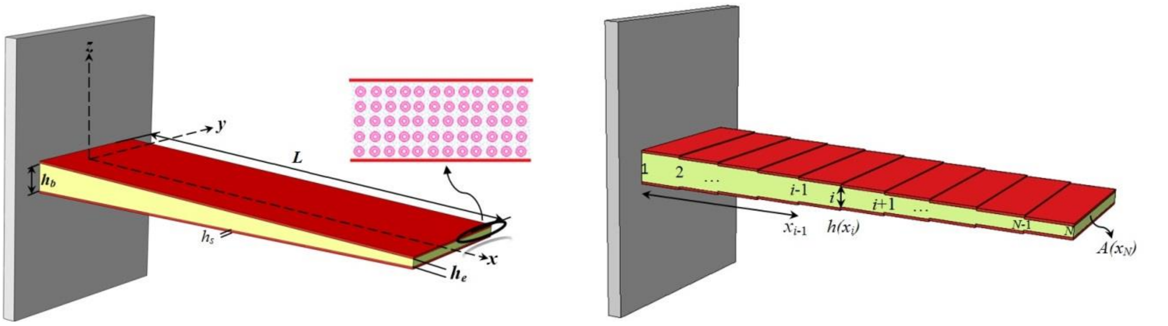


Figure 1. Geometrical parameters of integrated and discretized sandwich beam

$$h_c(x) = h_e\left[1 - c\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] \quad ; \quad \frac{h_b}{h_e} = c \tag{1}$$

According to Figure 2, three types of pore distributions are considered along the thickness of the aluminum porous core for the sandwich beam. These types include: Type U, featuring a uniform pore distribution across the thickness; Type X, characterized by a non-uniform but symmetrical distribution relative to the core's mid-plane, where pores become smaller as they get closer to the mid-plane; and Type O, which has a symmetrical distribution, but the pores become smaller as they approach the mid-plane.

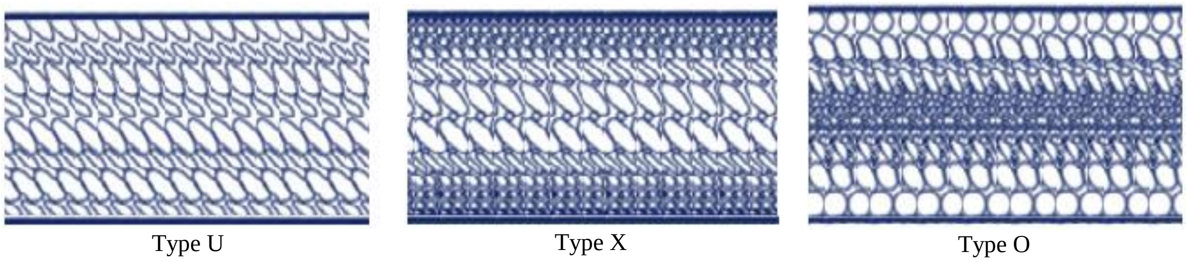


Figure 2. Different types of porosity used in sandwich beam core

For example, the effective material properties for the Type U, such as Young's modulus E and mass density ρ, are estimated using Equation 2. It is assumed that the core's Poisson's ratio remains constant [19].

$$\begin{cases} E_{TU}^{c} = E_{max}[1 - N_c\lambda] \\ \rho_{TU}^{c} = \rho_{max}[1 - \rho_c^*\lambda] \end{cases} \tag{2}$$

The sandwich beam faces are composed of a nanocomposite material, wherein single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) are uniformly distributed within a methyl methacrylate matrix. According to the rule of mixtures, the mechanical properties of these faces can be obtained.

2.1 Structural equations and strain- displacement relation

According to Timoshenko beam theory, the displacements at any point along the beam in the x and z directions, represented by the parameters u(x,z,t) and w(x,y,t), can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u_0(x,t) + z\psi(x,t) \\ w(x,y,t) &= w_0(x,t) \end{aligned} \tag{3}$$

In the aforementioned equations, u_0 and w_0 represent the displacement components at the reference surface of the beam, while ψ denotes the normal slope of the beam's cross-section with respect to the x-axis and time t. Consequently, the linear normal strain ε_x and the shear strain γ_{xz} can be expressed in terms of the displacement field components as follows:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_0}{dx} + z\frac{d\psi}{dx} \\ \gamma_{xz} &= \frac{dw_0}{dx} + \psi \end{aligned} \tag{4}$$

According to Hooke's law and assuming the beam is symmetrical with respect to the reference plane, the stress-strain relationships for different layers of the sandwich beam can be expressed as follows:

$$\begin{aligned} \sigma_x^k &= Q_{11}^k(z)\varepsilon_x \\ \tau_{xz}^k &= Q_{55}^k(z)\gamma_{xz} \quad ; \quad k = b,c,t \end{aligned} \tag{5}$$

Applying Hamilton's principle to the energy functions yields the differential equations of motion and the associated boundary conditions.

$$\delta\int_0^t (T - \Pi)dt = 0 \tag{6}$$

Which the governing equations are as bellow:

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = I_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ &KA_{55}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = I_1\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ &D_{11}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi\right) = I_2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_3\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{7}$$

2.2 differential quadrature method (DQM)

The differential quadrature method (DQM) is a numerical approximation technique in which any continuous function can be represented by a set of (N-1)th order polynomials over its entire domain. For instance, the partial derivative of a function $f(x)$ at a point x_i can be expressed as follows [21]:

$$\left.\frac{\partial^q f(x)}{\partial x^q}\right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} c(i,j,q)f(x_j) \tag{8}$$

where N represents the number of grid points, and $c(i,j,q)$ denotes the weighting coefficients associated with the qth-order derivative.

2.3 Free vibration analysis

Considering the conservatism of the system and focusing on the analysis of free vibrations, the time-dependent response will be harmonic. Consequently, the displacement field can be expressed as follows:

$$u_0(x,t) = U(x)e^{-i\omega t}$$

$$w_0(x,t) = W(x)e^{-i\omega t}$$
$$\psi(x,t) = \Psi(x)e^{-i\omega t} \tag{9}$$

Consequently, the equations of motion at the grid point i can be discretized as follows:

$$A_{11}(x_i)\sum_{j=1}^{N} c(i,j,2)U(x_j) = -I_1(x_i)\omega^2 U(x_i) - I_2(x_i)\omega^2\Psi(x_i)$$
$$KA_{55}(x_i)\left(\sum_{j=1}^{N} c(i,j,2)W(x_j) + \sum_{j=1}^{N} c(i,j,1)\Psi(x_j)\right) = -I_1(x_i)\omega^2 W(x_i) \tag{10}$$
$$D_{11}(x_i)\sum_{j=1}^{N} c(i,j,2)\Psi(x_j) - KA_{55}(x_i)\left(\sum_{j=1}^{N} c(i,j,1)W(x_j) + \Psi(x_i)\right) = -I_2(x_i)\omega^2 U(x_i) - I_3(x_i)\omega^2\Psi(x_i)$$

As an example, for a cantilever sandwich beam (C-F), the boundary conditions are discretized using the DQ method as follows:

$$U(x_1) = W(x_1) = \Psi(x_1) = 0$$
$$N_x(x_N) = A_{11}(x_N)\sum_{j=1}^{N} c(N,j,1)U(x_j) = 0$$
$$M_x(x_N) = D_{11}(x_N)\sum_{j=1}^{N} c(N,j,1)\Psi(x_j) = 0 \tag{11}$$
$$Q_x(x_N) = KA_{55}(x_N)\left(\sum_{j=1}^{N} c(N,j,1)W(x_j) + \Psi(x_N)\right) = 0$$

To simplify the application of the DQ method, the displacement vectors related to the boundary conditions {b}and the domain {d} are arranged. With this definition, the 3(N-2) equations of motion pertaining to the domain and the 6 boundary condition equations can be collectively rewritten in the following matrix form:

$$[S_{dd}]\{d\} + [S_{db}]\{b\} - \omega^2[M]\{d\} = 0$$
$$[S_{bd}]\{d\} + [S_{bb}]\{b\} = 0 \tag{12}$$

By eliminating the boundary vactor {b} from the two equations, the standard form of the eigenvalue problem can be obtained as follows:

$$([K] - \omega^2[M])\{d\} = 0 \;\; ; \;\; [K] = [S_{dd}] - [S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}] \tag{13}$$

Finally, the eigenvalues of the matrix product $[M]^{-1}[K]$ represent the natural frequencies of the system.

3. Results and discussion

To validate the accuracy of the modeling and solution method, a comparison between the results obtained from the present method and those available in the research literature is conducted in Table 1. This comparative analysis serves to confirm the effectiveness and reliability of the proposed approach in capturing the vibrational behavior of sandwich beams with porous cores.

Table 1. Comparison of dimensionless frequency parameter $f = \omega L\sqrt{I_{10}/A_{10}}$ of nanocomposite beam reinforced with nanotube (L/h=10)

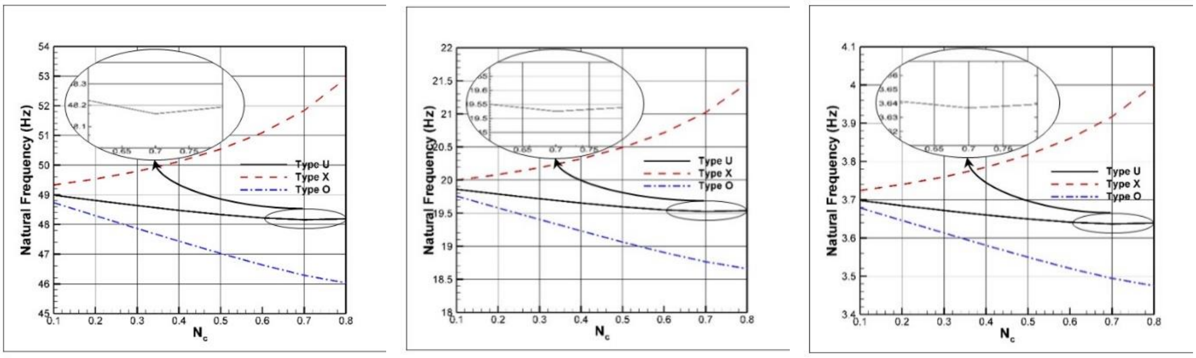
Uniform distribution of nanotubes			X-shaped symmetric distribution			$V_{cnt}^* = 0.12$
Present study	Ref [20]	Ref [22]	Present study	Ref [20]	Ref [23]	
1.2552	1.2581	1.2576	1.3817	1.3859	1.3852	SS-SS
1.4514	1.4565	1.4556	1.5332	1.5394	1.5385	C-SS
1.6622	1.6691	1.6678	1.7162	1.7242	1.7230	C-C

Table 2 illustrates the influence of the porosity coefficient on the natural frequency of a cantilever sandwich beam with various Porosity distributions. As the porosity coefficient increases in the X-type configuration, the natural frequency also increases due to the beam's increased stiffness at sections farther away from the reference surface. A reverse trend is observed for the porosity coefficient in type O, which is attributed to the increased concentration of pores at sections farther from the reference surface, resulting in reduced beam stiffness.

Table 2: Effect of porosity coefficient and types of porosity distribution on the first 5 natural frequencies of a cantilever beam beams (L=2 m, h_s=1 mm, h_b=3 mm, h_e=1 mm, N_x=1)

Mode No.					Porosity types distribution	N_c
1	2	3	4	5		
3.237	8.901	17.430	28.800	43.027	type U	0.2
3.279	9.014	17.652	29.166	43.574	type X	
3.205	8.812	17.257	28.515	42.601	type O	
3.228	8.873	17.375	28.708	42.888	type U	0.5
3.351	9.212	18.038	29.803	44.525	type X	
3.143	8.641	16.921	27.958	41.770	type O	
3.250	8.934	17.493	28.901	43.175	type U	0.8
3.510	9.647	18.887	31.204	46.614	type X	
3.103	8.531	16.706	27.602	41.237	type O	

Figure 3 depicts the effect of the porosity coefficient on the first, third, and fifth natural frequencies of a cantilever sandwich beam for various porosity distributions. As the porosity coefficient increases, the beam's frequency also increases for the X-shaped distribution, with a more pronounced effect observed at higher ratios.



c b a

Figure 3. Natural frequency variations of a cantilever beam in a) first, b) third and c) fifth modes according to the porosity coefficient for different types of porosity distributions(L=2 m, h_s=1 mm, h_b=4 mm, h_e=1mm)

4. Conclusion

In this study, the vibration analysis of a porous aluminum foam core sandwich beam reinforced with nanocomposite layers containing carbon nanofibers of varying core thicknesses was investigated. In summary, the following key findings can be drawn from this research:

- The differential quadrature method (DQM) proved effective and demonstrated good agreement in modeling and solving the vibration problem of sandwich beams with varying cross-sectional areas.
- As the porosity coefficient increases, the frequency of the sandwich beam with X-shaped and O-shaped porosity distributions increases and decreases, respectively. However, for the uniform porosity distribution, an initial decrease is observed, followed by an increase in frequency.
- As the beam length increases, the influence of the porosity distribution on the sandwich beam becomes negligible.
- For sandwich beams with varying cross-sectional areas but constant weight, the configuration with the lowest height at the clamped end and the highest height at the free end, with a simple support, exhibits the highest frequency compared to other configurations.

مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند، دوره ۴ شماره ۱ سال ۱۴۰۳ صفحات ۱ تا ۱۹

M.A.S.M
مجله علمی مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند

مکانیک مواد پیشرفته و هوشمند

شاپا: ۴۲۲۰-۲۷۸۳

دانشگاه اراک
۱۳۵۰

تأثیر هسته متخلخل بر ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی نانوکامپوزیتی با ضخامت متغیر

مصطفی تیموری[الف]، مصطفی طالبی توتی[ب]*، علی قربانپور آرانی[ج]

[الف] دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران، teymouri@qut.ac.ir

[ب] دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران، talebi@qut.ac.ir

[ج] استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه کاشان، کاشان، ایران، aghorban@kashanu.ac.ir

واژگان کلیدی

ارتعاش، فوم متخلخل، تئوری تیموشنکو، روش تفاضل مربعات، تیر ساندویچی.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۰۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۱۲/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۰۸

چکیده

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد تیر ساندویچی با ضخامت متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. هسته از جنس فوم آلومینیومی متخلخل می‌باشد که توسط دو رویه کامپوزیتی که به کمک نانولوله‌های کربنی تقویت شده، دربرگرفته شده است. جهت استخراج معادلات حرکت، ابتدا معادلات ساختاری هسته و رویه‌ها نوشته می‌شود. سپس انرژی جنبشی و کرنشی تیر بیان می‌گردد. سپس به کمک اعمال اصل همیلتون، معادلات حرکت تیر که از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است، و همچنین معادلات شرایط مرزی استخراج می‌گردد. در ادامه به کمک روش تفاضل مربعات، معادلات حرکت و شرایط مرزی به شکل معادلات جبری گسسته‌سازی می‌گردد و در شکل معادله مقدار ویژه استاندارد بازنویسی می‌گردد. با حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس طبیعی سیستم استخراج و جهت صحه‌سنجی مدل‌سازی و روش حل مسئله، نتایج حاضر با نتایج موجود در ادبیات تحقیق مقایسه می‌گردد. در انتها، اثر پارامترهایی از قبیل چگونگی توزیع تخلخل، ضریب تخلخل، ضخامت هسته و طول تیر بر فرکانس طبیعی بررسی می‌گردد.

۱- مقدمه

تیر، ورق و پوسته‌های ساخته‌شده از مواد فوم فلزی متخلخل دارای خواص ویژه‌ای از جمله چگالی کم، جذب انرژی، مقاومت در برابر حرارت و استحکام ویژه بالا هستند که باعث شده است کاربرد آن در صنعت هوافضا و سیستم‌های جاذب صدا اهمیت پیدا کنند و اخیراً در زمینه مهندسی و جامعه تحقیقاتی مورد توجه جهانی قرار گرفته‌اند [۱-۳]. به‌منظور برآورده کردن نیاز عملی بالا در صنایع مهندسی، درک خواص ارتعاشی تیر، ورق و پوسته‌ها با مواد فوم فلزی متخلخل حائز اهمیت است. تحلیل ارتعاشی و رفتار دینامیکی سازه‌های فوم فلزی متخلخل از زمینه‌های جدید مورد مطالعه بوده است.

مگنوسکی و استاسیویز [۴] کمانش یک تیر متخلخل ایزوتروپیک با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو سر و خصوصیات متغیر در راستای ضخامت را بررسی کردند. چن و همکاران [۵] تحلیل کمانش و خمش یک تیر متخلخل FG را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو ارائه کردند. مسئله ارتعاش آزاد یک تیر FG ناقص بر اساس تئوری تیر تیموشنکو توسط واتاناساکولپانگ و چایکیتیراتانا [۶] مورد مطالعه قرار گرفت. ابراهیمی و همکاران [۷] تجزیه و تحلیل ارتعاش حرارتی- مکانیکی یک تیر متخلخل FG را با استفاده از تئوری اویلر و روش حل ناویر بررسی کردند. راه حل تحلیلی برای مسئله خمش، ارتعاش آزاد، و کمانش یک تیر متخلخل FG با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی و کشش ضخامت توسط آتمانه و همکاران [۸] مورد مطالعه قرار گرفت. الرجوب و حمد [۹] ارتعاش آزاد تیرهای متخلخل اویلر- برنولی و تیموشنکو FG را با استفاده از روش ماتریس انتقال مورد بررسی

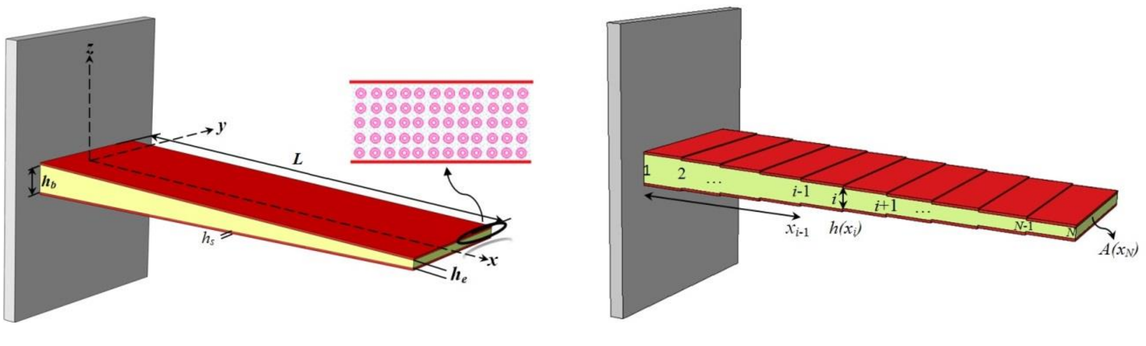
* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۲۴۷۰۸۸۵۸؛ فکس: ۰۲۵۳۶۶۴۱۶۰۴
آدرس پست الکترونیک: talebi@qut.ac.ir

قرار دادند. ارتعاش آزاد و کمانش یک تیر متخلخل FG تقویت شده توسط ورقک‌های گرافن توسط کیتیپورنچای و همکاران [۱۰] با استفاده از نظریه تیر تیموشنکو و روش ریتز مورد بررسی قرار گرفت. سهمانی و همکاران [۱۱]، خمش غیرخطی وابسته به اندازه تیرهای میکرو/نانو متخلخل مدرج تقویت‌شده با ورقک‌های گرافن، و تحت بار عرضی با توزیع یکنواخت همراه با بار فشاری محوری را بررسی کردند. حاجی و همکاران [۱۲] راه حل تحلیلی برای خمش و ارتعاش آزاد یک میکروتیر متخلخل FG را ارائه دادند. تحلیل خمشی یک تیر متخلخل تیموشنکو FG توسط تای و همکاران [۱۳] ارائه شد. تانگ و همکاران [۱۴] یک مدل گرادیان کرنش غیرمحلی یکپارچه با درنظر گرفتن اثر ضخامت برای بررسی رفتار خمشی تیرهای متخلخل FG در مقیاس میکرو/نانو ارائه دادند. تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر متخلخل FG توسط تسکین و دمیرهان [۱۵] با استفاده از روش ناویر مورد بررسی قرار گرفت. ویژگی‌های کمانش تیرهای ساندویچی متخلخل FG توسط دریکوند و همکاران [۱۶] به کمک روش تبدیل دیفرانسیل بررسی شد. النوجائی و همکاران [۱۷] به کمک روش اجزای محدود، تحلیل ارتعاش اجباری یک تیر ضخیم متخلخل FG را با استفاده از یک المان صفحه‌ای با ۱۲ گره را مورد مطالعه قرار دادند. نگوین و همکاران [۱۸] یک نظریه تغییر شکل برشی جدید برای رفتارهای خمشی، کمانشی و ارتعاشی تیرهای متخلخل FG ارائه کردند.

با توجه به مروری بر ادبیات تحقیق مشخص شد که بررسی رفتار ارتعاشی تیر ساندویچی با هسته متخلخل و رویه‌های نانوکامپوزیتی مورد بررسی قرار نگرفته است و همچنین مدل‌سازی هسته متخلخل با ضخامت متغیر از دیگر نوآوری‌های تحقیق حاضر است. در این تحقیق تیر با رویه‌های نانوکامپوزیتی و هسته مدرج متخلخل که ضخامت آن در طول تیر تغییر می‌کند به صورت ریاضی مدل‌سازی می‌شود و سپس جهت حل معادلات دیفرانسیل حاکم از روش تفاضل مربعات استفاده می‌شود. در انتها اثر تخلخل و پارامترهای هندسی بر رفتار ارتعاشی تیر بررسی می‌گردد. استفاده از روش تفاضل مربعات این مزیت را دارد که می‌تواند ضخامت متغیر تیر در هر مقطع را به صورت دلخواه مدل کند و نیازی به پیروی کردن این ضخامت از تابعی مشخص نمی‌باشد که این امر کمک می‌کند تا هندسه بهینه تیر جهت پاسخ ارتعاشی مطلوب در تحقیقات آتی میسر شود.

۲- مدل‌سازی ریاضی

در شکل ۱ تیر ساندویچی با طول L، ضخامت ابتدایی هسته h_b، ضخامت انتهایی هسته h_e و ضخامت رویه h_s نشان داده شده است. همچنین چگونگی گسسته‌سازی تیر به قصد استفاده در روش تفاضل مربعات در این شکل به صورت شماتیک ارائه شده است. دستگاه مختصات متعامد $(x-y-z)$ در شکل نشان داده شده است. مطابق رابطه ۱ ضخامت هسته تیر به صورت خطی در طول تیر تغییر می‌کند، اما عرض آن ثابت است. بنابراین سطح مقطع هسته تیر به صورت خطی و ممان اینرسی سطح با درجه ۳ در طول تغییر می‌کنند.

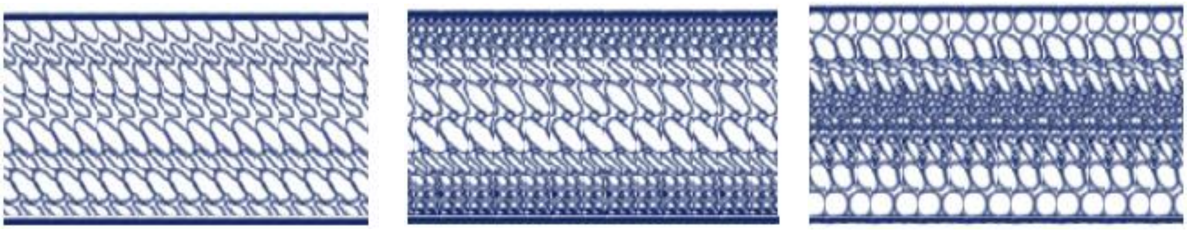


شکل ۱ پارامترهای هندسی تیر ساندویچی یکپارچه و گسسته‌سازی شده

$$h_c(x) = h_e\left[1 - c\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] \quad ; \quad \frac{h_b}{h_e} = c \qquad (۱)$$

۲-۱- توزیع تخلخل و خواص مواد

مطابق شکل ۲ برای تیر ساندویچی با فوم آلومینیوم متخلخل، سه نوع توزیع منافذ در امتداد ضخامت هسته در نظر گرفته می‌شود که عبارتند از: نوع U که توزیع منافذ در راستای ضخامت یکنواخت است، نوع X که دارای توزیع غیریکنواخت اما متقارن نسبت به سطح میانی هسته می‌باشد و منافذ هر چه از سطح میانی فاصله می‌گیرند، کوچکتر می‌شوند و نوع O که دارای توزیع متقارن هست اما منافذ هرچه به سطح میانی نزدیک می‌شود کوچکتر می‌شوند.



نوع U نوع X نوع O

شکل ۲ انواع مختلف تخلخل مورد استفاده در هسته تیر ساندویچی

خواص مواد موثر برای سه نوع توزیع منافذ، مانند مدول یانگ E و چگالی جرمی ρ توسط رابطه ۲ تخمین زده می‌شود و فرض بر این است که ضریب پواسون هسته بدون تغییر باقی می‌ماند [۱۹].

$$\begin{cases} E_{TU}^{c} = E_{max}[1 - N_c\lambda] \\ \rho_{TU}^{c} = \rho_{max}[1 - \rho_c^{*}\lambda] \end{cases} \quad \text{(۲-الف)}$$

$$\begin{cases} E_{TX}^{c} = E_{max}\left[1 - N_c cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right)\right] \\ \rho_{TX}^{c} = \rho_{max}\left[1 - \rho_c cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right)\right] \end{cases} \quad \text{(۲-ب)}$$

$$\begin{cases} E_{TO}^{c} = E_{max}\left[1 - N_c\left(1 - cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right)\right)\right] \\ \rho_{TO}^{c} = \rho_{max}\left[1 - \rho_c\left(1 - cos\left(\frac{\pi z}{h_c}\right)\right)\right] \end{cases} \quad \text{(۲-ج)}$$

که در رابطه ۲، E_{max} و ρ_{max} به ترتیب بیشینه مدول الاستیسیته و بیشینه چگالی جرمی هسته را نشان می‌دهد. N_c و ρ_c به ترتیب ضریب تخلخل و ضریب تخلخل چگالی را بیان می‌کنند و ρ_c^{*} ضریب تخلخل چگالی برای توزیع یکنواخت است که به صورت رابطه ۳ قابل محاسبه‌اند.

$$N_c = 1 - \frac{E_{min}}{E_{max}} \;\; ; \;\; \rho_c = 1 - \frac{\rho_{min}}{\rho_{max}} \;\; ; \;\; \frac{E_{min}}{E_{max}} = \left(\frac{\rho_{min}}{\rho_{max}}\right)^2$$
$$\rho_c^{*} = \frac{1 - \sqrt{1 - N_c\lambda}}{\lambda} \;\; ; \;\; \lambda = \frac{1}{N_c}\left[1 - \left(1 - \frac{2\rho_c}{\pi}\right)^2\right] \quad \text{(۳)}$$

رویه‌های تیر ساندویچی از نانوکامپوزیت تشکیل شده است بدین صورت که نانولوله‌های کربنی تک جداره در زمینه متیل-متاکریلات به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. با توجه به قانون اختلاط، خصوصیات مکانیکی این رویه‌ها به کمک روابط زیر قابل حصول است [۲۰]:

$$E_{11}^{s} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m$$
$$\frac{\eta_2}{E_{22}^{s}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m}$$
$$\frac{\eta_3}{G_{12}^{s}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \quad \text{(۴)}$$
$$G_{13}^{s} = G_{12}^{s} \;\; and \;\; G_{23} = 1.2 G_{12}^{s}$$

که در رابطه ۴، E_{11}^{CN}، E_{22}^{CN} و E^m نشانگر مدول الاستیسیته نانولوله‌ها و زمینه می‌باشند. همچنین G_{12}^{CN} و G^m مدول برشی نانولوله و زمینه می‌باشند. V_{CN} و V_m نیز نسبت حجمی نانولوله و ماتریس را نشان می‌دهند که جمع آن‌ها برابر واحد می‌باشد. برای توزیع یکنواخت نانولوله در زمینه، نسبت حجمی نانولوله با نسبت حجمی نانولوله کل برابر است و به صورت رابطه ۵ محاسبه می‌شود.

$$V_{cn} = V_{cn}^* = \frac{W_{CN}}{W_{CN} + \frac{\rho_{CN}}{\rho_m} - \frac{W_{CN}\rho_{CN}}{\rho_m}} \tag{۵}$$

که W_{CN} نسبت وزنی نانولوله، ρ_{CN} چگالی نانولوله و ρ_m چگالی ماتریس می‌باشد. همچنین چگالی و ضریب پواسون رویه‌های نانوکامپوزیتی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \rho^s &= V_{CN}\rho^{CN} + V_m\rho^m \\ \nu_{12}^s &= V_{CN}\nu_{12}^{CN} + V_m\nu^m \end{aligned} \tag{۶}$$

۲-۲- معادلات ساختاری و رابطه کرنش- جابه‌جایی

مطابق تئوری تیر تیموشنکو، جابه‌جایی در هر نقطه از تیر در راستای محور x و محور z که با پارامترهای $u(x,z,t)$ و $w(x,y,t)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u_0(x,t) + z\psi(x,t) \\ w(x,y,t) &= w_0(x,t) \end{aligned} \tag{۷}$$

که در رابطه فوق، u_0 و w_0 مؤلفه‌های جابه‌جایی سطح مرجع تیر می‌باشند و ψ چرخش بردار نرمال سطح مقطع تیر حول محور x و t بیانگر زمان می‌باشد. بدین ترتیب کرنش نرمال خطی ε_x و کرنش برشی γ_{xz} با توجه به مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_0}{dx} + z\frac{d\psi}{dx} \\ \gamma_{xz} &= \frac{dw_0}{dx} + \psi \end{aligned} \tag{۸}$$

با توجه به قانون خطی هوک و فرض متقارن بودن تیر نسبت به سطح مرجع، رابطه تنش- کرنش برای لایه‌های مختلف تیر مورد نظر به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_x^k &= Q_{11}^k(z)\varepsilon_x \\ \tau_{xz}^k &= Q_{55}^k(z)\gamma_{xz} \quad ; \quad k = b,c,t \end{aligned} \tag{۹}$$

که اندیس‌های b، c و t به ترتیب به لایه پایین، هسته و لایه بالای تیر اشاره دارد. با توجه به توزیع یکنواخت نانولوله در لایه‌های پایین و بالا و جهت حفظ تقارن، درایه‌های سفتی این لایه‌ها Q_{ij}^k با یکدیگر برابر و در راستای ضخامت نامتغیر می‌باشند.

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_{11}^s}{1-\nu_{12}^s\nu_{21}^s} \quad ; \quad Q_{55}^k = G_{12}^s \quad , \qquad k = b,t \\ Q_{11}^c &= \frac{E_T(z)}{1-\nu^2} \quad ; \quad Q_{55}^c = \frac{E_T(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

با اعمال اصل همیلتون به صورت زیر به توابع انرژی، معادلات دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی استخراج خواهد شد.

$$\delta\int_0^t (T - \Pi)dt = 0 \tag{۱۱}$$

که T معرف انرژی جنبشی تیر و Π انرژی کرنشی پتانسیل را نشان می‌دهد که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$T=\frac{b}{2}\left\{2\int_0^L\int_{-\frac{h_c}{2}-h_s}^{-\frac{h_c}{2}}\rho^s\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dzdx+\int_0^L\int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\rho_T^c\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dzdx\right\}$$
$$\Pi=\frac{b}{2}\left[2\int_0^L\int_{-\frac{h_c}{2}-h_s}^{-\frac{h_c}{2}}(\sigma_x^b\varepsilon_x+\tau_{xz}^b\gamma_{xz})\,dzdx+\int_0^L\int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}(\sigma_x^c\varepsilon_x+\tau_{xz}^c\gamma_{xz})\,dzdx\right] \quad (۱۲)$$

با جای‌گذاری معادله ۱۲ در معادله ۱۱ و اعمال حساب تغییرات، انتگرال جزء به جزء و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت و سپس برابر صفر قرار دادن ضرایب δu_0، δw_0 و $\delta\psi$، معادلات حرکت به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}=I_1\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}=I_1\frac{\partial^2w_0}{\partial t^2} \quad (۱۳)$$
$$\frac{\partial M_x}{\partial x}-Q_x=I_2\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}+I_3\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

که منتجه‌های نیروی محوری، برشی و ممان خمشی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}N_x\\Q_x\\M_x\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h_c}{2}-h_s}^{\frac{h_c}{2}+h_s}\begin{Bmatrix}\sigma_x^k\\\tau_{xz}^k\\z\sigma_x^k\end{Bmatrix}dz \quad (۱۴)$$

با جای‌گذاری معادلات ۷ الی ۱۰ در معادله ۱۴ خواهیم داشت:

$$N_x=A_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x}\quad;\quad M_x=D_{11}\frac{\partial\psi}{\partial x}\quad;\quad Q_x=KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi\right) \quad (۱۵)$$

که $K=5/6$ به عنوان ضریب تصحیح برشی در نظر گرفته می‌شود و مولفه‌های سفتی و ترم‌های اینرسی به صورت روابط زیر قابل محاسبه است:

$$(A_{11},D_{11})=\int_{-\frac{h_c}{2}-h_s}^{\frac{h_c}{2}+h_s}Q_{11}(1,z^2)dz\quad;\quad A_{55}=\int_{-\frac{h_c}{2}-h_s}^{\frac{h_c}{2}+h_s}Q_{55}dz$$
$$(I_1,I_2,I_3)=\int_{-\frac{h_c}{2}-h_s}^{\frac{h_c}{2}+h_s}\rho^k(1,z,z^2)dz \quad (۱۶)$$

با جاگذاری رابطه ۱۵ در رابطه ۱۳، معادلات حرکت به شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$A_{11}\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}=I_1\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$
$$KA_{55}\left(\frac{\partial^2w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=I_1\frac{\partial^2w_0}{\partial t^2} \quad (۱۷)$$
$$D_{11}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\psi\right)=I_2\frac{\partial^2u_0}{\partial t^2}+I_3\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

در این تحقیق ترکیبی از شرایط مرزی مختلف تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد به قصد صحه‌سنجی و یا بحث بر روی نتایج استفاده شده است که به شرح زیر مدل‌سازی ریاضی می‌گردد:

تکیه‌گاه ساده (SS): $u_0=w_0=M_x=0$

گیردار (C): $u_0=w_0=\psi=0$

آزاد (F): $N_x=M_x=Q_x=0$

۲-۳- روش تفاضل مربعات

تفاضل مربعات یک روش عددی تقریبی است و طبق آن هر تابع هموار را می‌توان به‌صورت یک چند جمله‌ای مرتبه $(N-1)$

ام، در کل دامنه آن بیان نمود. در یک شبکه‌ی گسسته، مشتق این تابع هموار در یک جهت مختصات و در یک نقطه را می‌توان با جمع مقادیر تابع در نقاط دیگر در آن جهت، با احتساب یک ضریب وزنی، محاسبه نمود. به‌طور مثال مشتق جزئی تابع $f(x)$ در نقطه x_i به‌صورت زیر بیان می‌شود [۲۱]:

$$\frac{\partial^q f(x)}{\partial x^q}\bigg|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N} c(i,j,q) f(x_j) \qquad (۱۸)$$

که N تعداد نقاط شبکه گسسته و $c(i,j,q)$ ضرایب وزنی می‌باشند که به مشتق مرتبه q ام وابسته است و به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$q = 1 \longrightarrow \begin{cases} c(a,b,1) = \dfrac{\prod(x_i)}{(x_i - x_j)\prod(x_j)}, & (i,j = 1,2,\dots,N \ \ and \ \ i \neq j) \\ c(i,i,1) = -\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} c(i,j,1), & (i = 1,2,\dots,N) \end{cases}$$

$$1 < q < N \longrightarrow \begin{cases} c(i,j,q) = q\left[c(i,i,q-1)c(i,j,1) - \dfrac{c(i,j,q-1)}{(x_i - x_j)}\right], \\ \qquad (i,j = 1,2,\dots,N \ \ and \ \ i \neq j) \\ c(i,i,q) = -\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} c(i,j,q), \qquad (i = 1,2,\dots,N) \end{cases} \qquad (۱۹)$$

که

$$\prod(x(i)) = \prod_{j=1, j\neq i}^{N} (x_i - x_j) \qquad (۲۰)$$

با توجه به مخیل بودن در انتخاب توزیع نقاط شبکه و به جهت افزایش سرعت همگرایی، در این تحقیق از توزیع چبیشف-گوس مطابق رابطه ۲۱ استفاده می‌شود.

$$x_i = \frac{1 - \cos\left(\dfrac{i-1}{N-1}\right)\pi}{2} L, \quad i = 1,2,\dots,N \qquad (۲۱)$$

۲-۴- تحلیل ارتعاشات آزاد

با توجه به پایستار بودن سیستم و جهت تحلیل ارتعاشات آزاد، پاسخ بر حسب زمان به صورت هارمونیک خواهد بود که در نتیجه میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= U(x)e^{-i\omega t} \\ w_0(x,t) &= W(x)e^{-i\omega t} \\ \psi(x,t) &= \Psi(x)e^{-i\omega t} \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

که ω فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد. با جاگذاری رابطه ۲۲ در رابطه ۱۷ و سپس اعمال روش تفاضل مربعات مطابق رابطه ۱۸، معادلات حرکت تیر در نقطه i ام شبکه، به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$A_{11}(x_i)\sum_{j=1}^{N} c(i,j,2)U(x_j) = -I_1(x_i)\omega^2 U(x_i) - I_2(x_i)\omega^2 \Psi(x_i)$$

$$KA_{55}(x_i)\left(\sum_{j=1}^{N} c(i,j,2)W(x_j)+\sum_{j=1}^{N} c(i,j,1)\Psi(x_j)\right)=-I_1(x_i)\omega^2 W(x_i) \tag{۲۳}$$

$$D_{11}(x_i)\sum_{j=1}^{N} c(i,j,2)\Psi(x_j)-KA_{55}(x_i)\left(\sum_{j=1}^{N} c(i,j,1)W(x_j)+\Psi(x_i)\right)$$
$$=-I_2(x_i)\omega^2 U(x_i)-I_3(x_i)\omega^2\Psi(x_i)$$

دقت شود که درایه‌های سفتی A_{11}، A_{55} و D_{11} و همچنین ترم‌های اینرسی I_i با توجه به تغییر ضخامت تیر، مقادیر مختلفی را در نقاط مختلف شبکه دارا می‌باشند که با توجه به رابطه ۱۶ قابل محاسبه است. همچنین به عنوان مثال برای تیر یک سر گیردار (C-F) معادلات مربوط به شرایط مرزی به صورت زیر به کمک روش تفاضل مربعات گسسته‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned} &U(x_1)=W(x_1)=\Psi(x_1)=0\\ &N_x(x_N)=A_{11}(x_N)\sum_{j=1}^{N} c(N,j,1)U(x_j)=0\\ &M_x(x_N)=D_{11}(x_N)\sum_{j=1}^{N} c(N,j,1)\Psi(x_j)=0\\ &Q_x(x_N)=KA_{55}(x_N)\left(\sum_{j=1}^{N} c(N,j,1)W(x_j)+\Psi(x_N)\right)=0 \end{aligned} \tag{۲۴}$$

جهت ساده‌سازی در استفاده از روش تفاضل مربعات، بردارهای جابه‌جایی مربوط به شرایط مرزی $\{b\}$ و دامنه $\{d\}$ به صورت زیر دسته‌بندی می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\{b\}=\{U(x_1),U(x_N),W(x_1),W(x_N),\Psi(x_1),\Psi(x_N)\}^T\\ &\{d\}=\{U(x_2),U(x_3),\dots,U(x_{N-1}),W(x_2),W(x_3),\dots,W(x_{N-1}),\Psi(x_2),\Psi(x_3),\dots\Psi(x_{N-1})\}^T \end{aligned} \tag{۲۵}$$

که بالانویس T نشانگر ترانهاده بردار می‌باشد. با این تعریف، $3(N-2)$ معادلات حرکت مربوط به دامنه و ۶ معادله مربوط به شرایط مرزی به صورت ماتریسی زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} &[S_{dd}]\{d\}+[S_{db}]\{b\}-\omega^2[M]\{d\}=0\\ &[S_{bd}]\{d\}+[S_{bb}]\{b\}=0 \end{aligned} \tag{۲۶}$$

با حذف بردار $\{b\}$ از دو معادله فوق، فرم استاندارد مقدار ویژه مسئله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$([K]-\omega^2[M])\{d\}=0\ \ ;\ \ [K]=[S_{dd}]-[S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}] \tag{۲۷}$$

جذر مقادیر ویژه ماتریس $[M]^{-1}[K]$، فرکانسهای طبیعی سیستم می‌باشند.

۳- بحث بر روی نتایج

در این تحقیق برای مدل‌سازی فوم آلومینیومی مقدار ۷۰ گیگاپاسکال، ۲۷۰۷ کیلوگرم بر متر مکعب و ۰/۳ به ترتیب برای مدول یانگ، چگالی و ضریب پواسون آن در نظر گرفته شده است. همچنین برای محاسبه خصوصیات مکانیکی لایه‌های نانوکامپوزیتی از $E_{11}^{CN}=600$ GPa، $E_{22}^{CN}=10$ GPa، $G_{12}^{CN}=17.2$ GPa، $\nu_{12}^{CN}=0.19$، $\rho^{CN}=1400\ \mathrm{kg/m^3}$، $E^m=2.5$ GPa، $\nu^m=0.34$، $\rho^m=1150\ \mathrm{kg/m^3}$، $\eta_1=0.137$، $\eta_2=1.022$ و $\eta_3=0.715$ استفاده شده است. همگرایی ۵ فرکانس طبیعی اول تیر ساندویچی با هسته متخلخل نسبت به نقاط شبکه در روش تفاضل مربعات در جدول ۱ بررسی شده است. نتایج نشان از آن دارد که برای محاسبه دقیق ۵ فرکانس اول تیر، تعداد ۲۰ نقطه شبکه کفایت می‌کند. بنابراین از این پس جهت استخراج نتایج از ۲۰ نقطه شبکه استفاده شده است، هرچند که با افزایش شماره مود، همگرایی پاسخ در نقاط بیشتر امکان‌پذیر است.

جدول ۱ همگرایی ۵ فرکانس طبیعی اول تیر دوسر گیردار با هسته متخلخل از نوع X نسبت به نقاط شبکه در روش تفاضل مربعات
(L=2 m, h_s=1 mm, h_b=2 mm, h_e=4 mm, N_x=1)

شماره مود N	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲
۱	۴/۴	۴/۴	۵/۴	۵/۴	۵/۴	۵/۴	۵/۴	۵/۴	۵/۴
۲	۰/۱۳	۳/۱۲	۴/۱۲	۴/۱۲	۵/۱۲	۵/۱۲	۵/۱۲	۵/۱۲	۵/۱۲
۳	۹/۱۶۱۸	۴/۲۶	۲/۲۴	۴/۲۴	۵/۲۴	۶/۲۴	۶/۲۴	۶/۲۴	۶/۲۴
۴	۱/۲۱۶۶	۴/۴۹	۳/۴۱	۴/۴۰	۵/۴۰	۶/۴۰	۷/۴۰	۸/۴۰	۸/۴۰
۵	۳/۲۲۹۳۰۳	۳/۳۳۹۰	۶/۷۴	۸/۶۰	۵/۶۰	۷/۶۰	۸/۶۰	۹/۶۰	۹/۶۰

به قصد بررسی صحت مدل‌سازی و روش حل، دو مقایسه بین نتایج حاصل از روش حاضر با نتایج موجود در ادبیات تحقیق صورت می‌گیرد. در قیاس اول که نتایج آن در جدول ۲ ارائه شده است، پارامتر فرکانسی بی‌بعد تیر نانوکامپوزیتی تقویت شده حاصل از تحقیق حاضر با نتایج مرجع [۲۰]، [۲۲] و [۲۳] مقایسه شده است. تیر دارای شرایط مرزی مختلف دوسر تکیه‌گاه ساده، یک سر درگیر- یک سر تکیه‌گاه ساده و دو سر گیردار می‌باشد و توزیع نانولوله‌ها به دو صورت یکنواخت و X شکل می‌باشد. نزدیکی نتایج نشان از صحت مدل‌سازی نانوکامپوزیت و روش حل دارد. لازم به ذکر است که A_{10} در پارامتر فرکانسی بی‌بعد f، سفتی کششی A_{11} برای تیری است که کاملاً از جنس زمینه باشد و در آن از هیچ نانولوله‌ای استفاده نشده باشد.

جدول ۲ مقایسه پارامتر فرکانسی بی‌بعد $f = \omega L\sqrt{I_{10}/A_{10}}$ تیر نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله (L/h=10)

$V^*_{cnt}=۰/۱۲$	توزیع متقارن به شکل X			توزیع یکنواخت نانولوله		
	مرجع [۲۳]	مرجع [۲۰]	تحقیق حاضر	مرجع [۲۲]	مرجع [۲۰]	تحقیق حاضر
SS-SS	۱/۳۸۵۲	۱/۳۸۵۹	۱/۳۸۱۷	۱/۲۵۷۶	۱/۲۵۸۱	۱/۲۵۵۲
C-SS	۱/۵۳۸۵	۱/۵۳۹۴	۱/۵۳۳۲	۱/۴۵۵۶	۱/۴۵۶۵	۱/۴۵۱۴
C-C	۱/۷۲۳۰	۱/۷۲۴۲	۱/۷۱۶۲	۱/۶۶۷۸	۱/۶۶۹۱	۱/۶۶۲۲

در مطالعه دوم، نتایج تحقیق حاضر با نتایج مرجع [۲۴] مقایسه شده که در جدول ۳ ارائه شده است. تیر مورد نظر دارای خواص ایزوتروپیک با شرایط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده و دو سر گیردار با سطح مقطع متغیر می‌باشد. نزدیکی نتایج در ۵ پارامتر فرکانس طبیعی اول نشان از کارآمدی روش تفاضل مربعات در مدل‌سازی تیر با سطح مقطع متغیر می‌باشد.

جدول ۳ مقایسه پارامتر فرکانسی بی‌بعد $f = \omega\sqrt{\rho A_h L^4/EI_h}$ تیر مخروطی شکل با شرایط مرزی مختلف

شماره مود	C-C				Sc-Sc			
	c=۴		c=۱		c=۴		c=۱	
	تحقیق حاضر	مرجع [۲۴]	تحقیق حاضر	مرجع [۲۴]	تحقیق حاضر	مرجع [۲۴]	تحقیق حاضر	مرجع [۲۴]
۱	۱۱/۹۹۴	۱۱/۸۴۱	۱۶/۳۴۷	۱۶/۳۳۵	۵/۴۵۳	۴/۹۱۹	۷/۲۷۶	۷/۱۲۱
۲	۳۲/۶۹۳	۳۲/۵۱۱	۴۵/۰۳۴	۴۴/۹۸۰	۲۱/۰۵۰	۲۱/۳۴۴	۲۸/۹۷۷	۲۸/۹۵۱
۳	۶۳/۳۸۱	۶۳/۵۱۱	۸۸/۱۰۹	۸۸/۱۳۸	۴۶/۷۷۲	۴۷/۴۸۲	۶۵/۰۶۸	۶۴/۹۷۸
۴	۱۰۳/۴۷۹	۱۰۴/۸۶۷	۱۴۵/۵۳۲	۱۴۵/۶۶۵	۸۲/۲۴۰	۸۳/۸۲۱	۱۱۵/۴۷۴	۱۱۵/۳۵۱
۵	۱۵۲/۴۲۰	۱۵۶/۵۵۴	۲۱۶/۷۸۷	۲۱۷/۵۷۲	۱۲۶/۹۵۳	۱۳۰/۴۳۶	۱۸۰/۲۹۳	۱۸۰/۰۸۹

به قصد صحه‌سنجی مدل‌سازی رفتار ماده متخلخل، پارامتر فرکانسی پایه تیر متخلخل از نوع X، بدون رویه و با شرایط مرزی مختلف با مراجع [۱۸] و [۱۹] مقایسه که در جدول ۴ ارائه شده است. نزدیکی فوق‌العاده نتایج نشان از صحت مدل‌سازی ماده متخلخل و روش حل دارد.

در جدول ۵ اثر ضریب تخلخل بر فرکانس طبیعی تیر ساندویچی یک سر گیردار با انواع توزیع تخلخل نشان داده است. با افزایش ضریب تخلخل در نوع X، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که علت آن استحکام بیشتر تیر در سطوح دورتر از سطح مرجع می‌باشد. روند برعکس اثر ضریب تخلخل در نوع O مشاهده می‌شود که علت آن نیز تمرکز بیشتر حفره‌های تخلخل در سطوح دور نسبت به سطح مرجع می‌باشد که نتیجه آن کاهش استحکام تیر است. اثر ضریب تخلخل در تیر با هسته نوع U متفاوت است. بدین گونه ابتدا با افزایش ضریب تخلخل، فرکانس تیر در نتیجه کاهش سفتی کاهش می‌یابد اما با افزایش بیشتر این

ضریب، فرکانس افزایش می‌یابد که در نتیجه غلبه اثر کاهشی ترم‌های اینرسی در قیاس با ترم‌های سفتی می‌باشد.

جدول ۴ مقایسه پارامتر فرکانسی پایه $f = \omega L\sqrt{\rho_{max}(1-\nu^2)/E_{max}}$ تیر متخلخل نوع X با شرایط مرزی مختلف

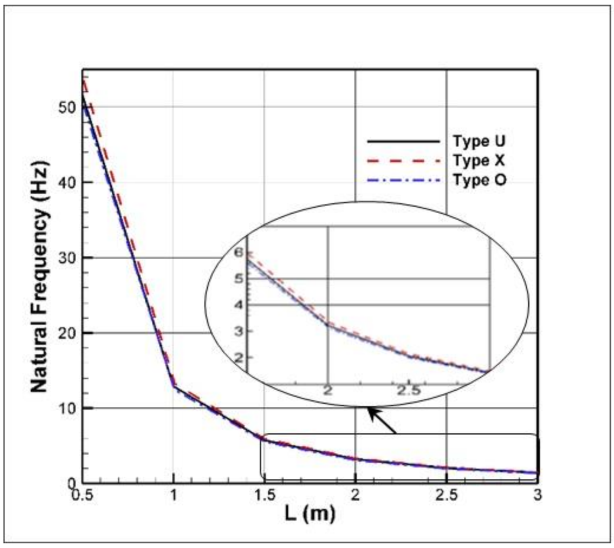
(h_s=0, h_e=h_b, N_c=0.5, $\nu = 1/3$)

شرایط مرزی	L/h	تحقیق حاضر	مرجع [۱۸]	مرجع [۲۵]
SS-SS	۱۰	۰/۲۷۹۸	۰/۲۷۹۱	۰/۲۷۹۸
	۲۰	۰/۱۴۲۲	۰/۱۴۲۱	۰/۱۴۲۲
	۵۰	۰/۰۵۷۱	۰/۰۵۷۱	۰/۰۵۷۱
C-C	۱۰	۰/۵۹۴۷	۰/۵۹۰۸	۰/۵۹۴۴
	۲۰	۰/۳۱۶۷	۰/۳۱۶۰	۰/۳۱۶۶
	۵۰	۰/۱۲۹۱	۰/۱۲۹۱	۰/۱۲۹۱
C-SS	۱۰	۰/۴۲۴۳	۰/۴۲۵۲	۰/۴۲۴۲
	۲۰	۰/۲۲۰۳	۰/۲۲۰۴	۰/۲۲۰۳
	۵۰	۰/۰۸۹۱	۰/۰۸۹۱	۰/۰۸۹۱

جدول ۵ تاثیر ضریب تخلخل و انواع توزیع تخلخل بر ۵ فرکانس طبیعی اول تیر یک سر گیردار

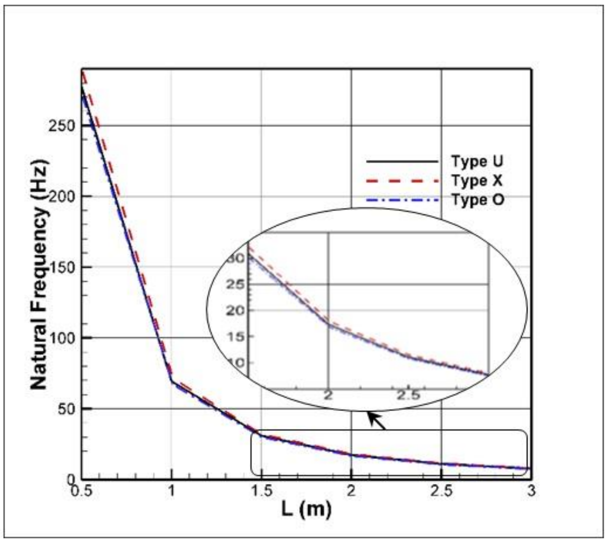
(L=2 m, h_s=1 mm, h_b=3 mm, h_e=1 mm, N_x=1)

N_c	توزیع انواع تخلخل	شماره مود				
		۵	۴	۳	۲	۱
۰/۲	نوع U	۴۳/۰۲۷	۲۸/۸۰۰	۱۷/۴۳۰	۸/۹۰۱	۳/۲۳۷
	نوع X	۴۳/۵۷۴	۲۹/۱۶۶	۱۷/۶۵۲	۹/۰۱۴	۳/۲۷۹
	نوع O	۴۲/۶۰۱	۲۸/۵۱۵	۱۷/۲۵۷	۸/۸۱۲	۳/۲۰۵
۰/۵	نوع U	۴۲/۸۸۸	۲۸/۷۰۸	۱۷/۳۷۵	۸/۸۷۳	۳/۲۲۸
	نوع X	۴۴/۵۲۵	۲۹/۸۰۳	۱۸/۰۳۸	۹/۲۱۲	۳/۳۵۱
	نوع O	۴۱/۷۷۰	۲۷/۹۵۸	۱۶/۹۲۱	۸/۶۴۱	۳/۱۴۳
۰/۸	نوع U	۴۳/۱۷۵	۲۸/۹۰۱	۱۷/۴۹۳	۸/۹۳۴	۳/۲۵۰
	نوع X	۴۶/۶۱۴	۳۱/۲۰۴	۱۸/۸۸۷	۹/۶۴۷	۳/۵۱۰
	نوع O	۴۱/۲۳۷	۲۷/۶۰۲	۱۶/۷۰۶	۸/۵۳۱	۳/۱۰۳

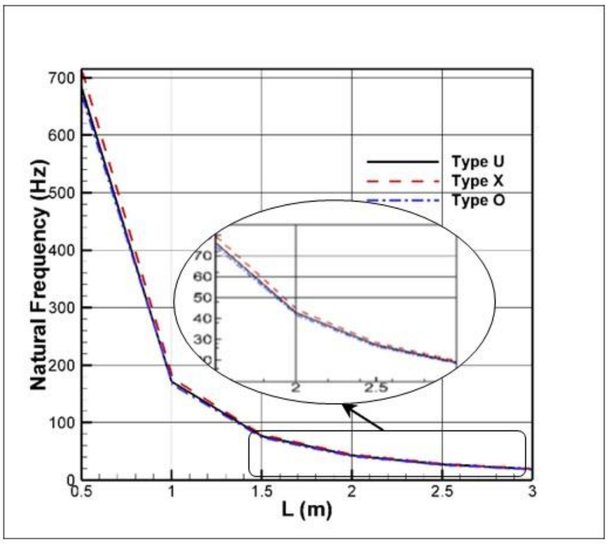


(الف)

شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی تیر یک سر گیردار در مود الف) اول بر حسب طول آن برای انواع توزیع تخلخل (hs=1 mm, hb=3 mm, he=1mm, Nc=0.5)



(ب)

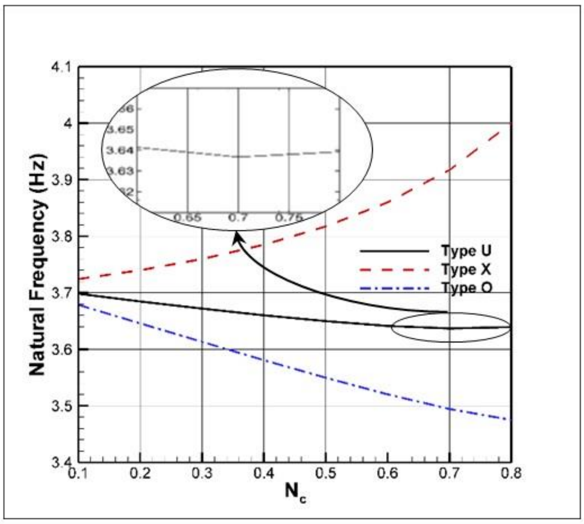


(ج)

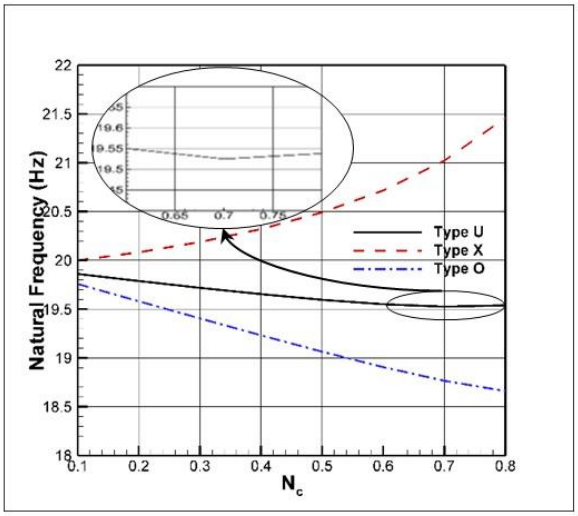
شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی تیر یک سر گیردار در مود ب) سوم، ج) پنجم بر حسب طول آن برای انواع توزیع تخلخل (h_s=1 mm, h_b=3 mm, h_e=1mm, N_c=0.5)

در شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی در سه مود اول، سوم و پنجم بر حسب طول تیر برای سه توزیع مختلف تخلخل نشان داده شده است. در تمام طول‌ها و مودها، تیر دارای توزیع تخلخل X شکل و O شکل به ترتیب دارای بیشترین فرکانس و کمترین فرکانس است. با افزایش طول تیر اثر توزیع تخلخل بر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و فرکانس طبیعی تیر با انواع توزیع تخلخل به هم نزدیک می‌شوند.

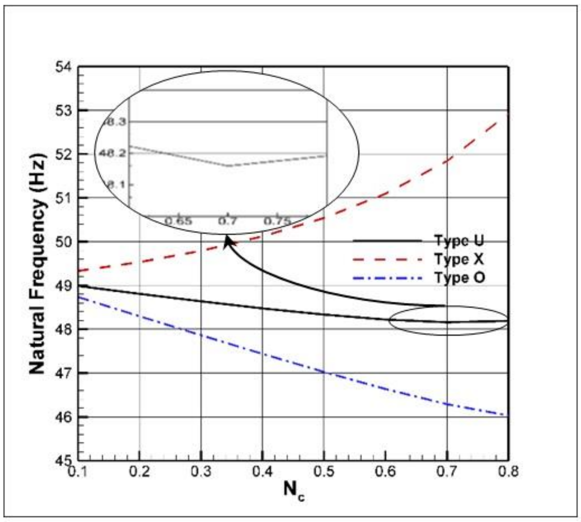
در شکل ۴ اثر مقدار ضریب تخلخل بر فرکانس طبیعی اول، سوم و پنجم تیر یک سر گیردار در انواع توزیع تخلخل نشان داده شده است. با افزایش ضریب تخلخل، فرکانس تیر با توزیع تخلخل X شکل افزایش می‌یابد به گونه‌ای که شیب این افزایش در ضرایب بالاتر بیشتر است. افزایش ضریب تخلخل در توزیع نوع O شکل باعث کاهش فرکانس طبیعی می‌شود و این کاهش تقریباً رفتار خطی از خود نشان می‌دهد. تاثیر ضریب تخلخل در توزیع نوع یکنواخت، ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است اما این اثر خیلی محسوس نمی‌باشد.



(الف)

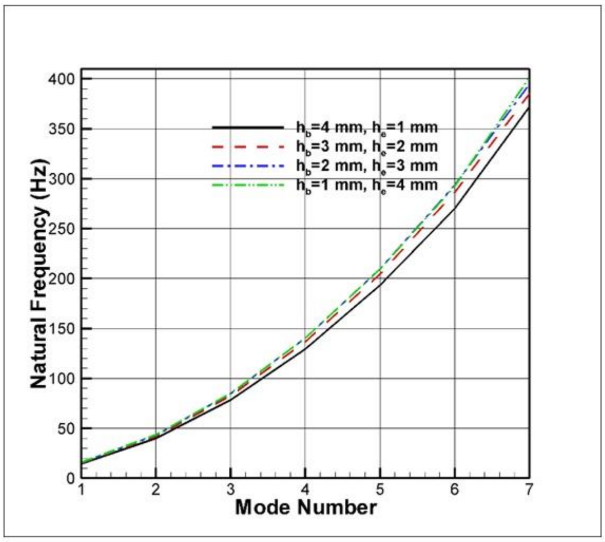


(ب)



(ج)

شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی تیر یک سر گیردار در مود الف) اول، ب) سوم و ج) پنجم بر حسب ضریب تخلخل برای انواع توزیع تخلخل (L=2 m, h_s=1 mm, h_b=4 mm, h_e=1mm)



شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی تیر یک سر گیردار با هسته متخلخل یکنواخت بر حسب شماره مود برای تیربا سطح مقطعهای مختلف (L=1 m, h_s=1 mm, N_c=0.5)

Archive of SID.ir

در شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی تیر یک سر گیردار با توزیع تخلخل یکنواخت بر حسب شماره مود برای سطح مقطع‌های مختلف نشان داده شده است. ارتفاع سطح مقطع در طول تیر به صورت خطی تغییر می‌کند. در مودهای ابتدایی تأثیر سطح مقطع بر فرکانس تقریباً ناچیز است اما در مودهای بالا، فرکانس تیری که در تکیه‌گاه گیردار دارای کوچکترین ارتفاع و در انتهای دیگر تیر با تکیه‌گاه ساده بزرگترین ارتفاع را دارد، بیشتر از بقیه حالت‌ها می‌باشد.

۴- نتیجه‌گیری

در این تحقیق ارتعاشات تیر ساندویچی با هسته متخلخل از جنس فوم آلومینیومی و رویه‌های نانوکامپوزیتی تقویت شده به کمک نانولوله‌های کربنی با ضخامت متغیر هسته پرداخته شده است. به کمک تئوری تیر تیموشنکو و اصل همیلتون، معادلات حرکت استخراج و به کمک روش تفاضل مربعات معادلات گسسته و حل گردید. به طور خلاصه می‌توان به نتایج زیر حاصل از این مطالعه اشاره کرد:

- روش تفاضل مربعات به خوبی و با همگرایی مناسب می‌تواند تیر با سطح مقطع متغیر را مدل و مسئله ارتعاش آن را حل کند.
- با افزایش ضریب تخلخل، فرکانس تیر با توزیع تخلخل X شکل و O شکل به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد اما در توزیع نوع یکنواخت، ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است.
- با افزایش طول تیر، اثر توزیع تخلخل در تیر نامحسوس می‌شود.
- در تیر با سطح مقطع‌های مختلف اما وزن یکسان، تیر با ارتفاع کمتر در سرگیردار و ارتفاع بیشتر در سر با تکیه‌گاه ساده دارای بیشترین فرکانس نسبت به حالت‌های دیگر است.

Authorship Contribution Statement

Mostafa Teymouri

Biography: Phd Student at Qom University of Technology

Contribution Statement: Validation, Formal analysis, Investigation, Software, Visualization, Writing – original draft.

Dr. Mostafa Talebitooti

Biography: Associate Professor in the Department of Mechanical Engineering at Qom University of Technology

Contribution Statement: Conceptualization, Methodology, Writing – review & editing.

Dr. Ali Ghorbanpour Arani

Biography: Professor in the Department of Mechanical Engineering at University of Kashan

Contribution Statement: Conceptualization, review & editing

۵- مراجع

[1] Gao W, Qin Z, Chu F. Wave propagation in functionally graded porous plates reinforced with graphene platelets. Aerospace Science and Technology. 2020; 102:105860.

[2] Toan Thang P, Nguyen-Thoi T, Lee J. Mechanical stability of metal foam cylindrical shells with various porosity distributions. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020; 27:295-303.

[3] Li Q, Wu D, Chen X, Liu L, Yu Y, Gao W. Nonlinear vibration and dynamic buckling analyses of sandwich functionally graded porous plate with graphene platelet reinforcement resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. International Journal of Mechanical Sciences. 2018; 148:596-610.

[4] Magnucki K, Stasiewicz P. Elastic buckling of a porous beam. Journal of theoretical and applied mechanics. 2004; 42:859-68.

[5] Chen D, Yang J, Kitipornchai S. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. Composite Structures. 2015; 133:54-61.

[6] Wattanasakulpong N, Chaikittiratana A. Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method. Meccanica. 2015; 50:1331-42.

[7] Ebrahimi F, Ghasemi F, Salari E. Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities. Meccanica. 2016; 51:223-49.

[8] Ait Atmane H, Tounsi A, Bernard F. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. International Journal of Mechanics and Materials in Design. 2017; 13:71-84.

[9] Al Rjoub YS, Hamad AG. Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method. KSCE Journal of Civil Engineering. 2017; 21:792-806.

[10] Kitipornchai S, Chen D, Yang J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets. Materials & Design. 2017; 116:656-65.

[11] Sahmani S, Aghdam MM, Rabczuk T. Nonlinear bending of functionally graded porous micro/nano-beams reinforced with graphene platelets based upon nonlocal strain gradient theory. Composite Structures. 2018; 186:68-78.

[12] Hadji L. An analytical solution for bending and free vibration responses of functionally graded beams with porosities: Effect of the micromechanical models. Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal. 2019; 69:231-41.

[13] Phuong NTB, Tu TM, Phuong HT, Van Long N. Bending analysis of functionally graded beam with porosities resting on elastic foundation based on neutral surface position. Science and Technology in Civil Engineering (JSTCE)-HUCE. 2019; 13:33-45.

[14] Tang H, Li L, Hu Y. Coupling effect of thickness and shear deformation on size-dependent bending of micro/nano-scale porous beams. Applied Mathematical Modelling. 2019; 66:527-47.

[15] TAŞKIN V, DEMİRHAN PA. Fonksiyonel derecelendirilmiş gözenekli kirişlerin serbest titreşim analizi. Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler. 2020; 8:49-60.

[16] Derikvand M, Farhatnia F, Hodges DH. Functionally graded thick sandwich beams with porous core: Buckling analysis via differential transform method. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2023; 51:3650-77.

[17] Alnujaie A, Akbas SD, Eltaher MA, Assie AE. Damped forced vibration analysis of layered functionally graded thick beams with porosity. Smart Structures and Systems.2021; 27:679-89.

[18] Nguyen N-D, Nguyen T-N, Nguyen T-K, Vo TP. A new two-variable shear deformation theory for bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded porous beams. Composite Structures. 2022; 282:115095.

[19] Chen D, Yang J, Kitipornchai S. Buckling and bending analyses of a novel functionally graded porous plate using Chebyshev-Ritz method. Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2019; 19:157-70.

[20] Yas M, Samadi N. Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2012; 98:119-28.

[21] Shu C. Differential quadrature and its application in engineering: Springer Science & Business Media, 2012.

[22] Shen H-S. Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part II: Pressure-loaded shells. Composite Structures. 2011; 93:2496-503.

[23] Ke L-L, Yang J, Kitipornchai S. Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams. Composite Structures. 2010; 92:676-83.

[24] Banerjee J, Ananthapuvirajah A. Free flexural vibration of tapered beams. Computers & Structures. 2019; 224:106106.

[25] Chen D, Yang J, Kitipornchai S. Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. International journal of mechanical sciences. 2016; 108-109:14-22.