



تحلیل احتمالاتی پایداری یک سد با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو مبتنی بر روش تعادل حدی

هادی فتاحی^۱، فاطمه جیریایی شراهی^۲

پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۲۲

دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۲۳

چکیده

بررسی پایداری شیروانی‌ها یا شیب‌های خاکی از نظر داشتن پتانسیل ایجاد زمین لغزش‌های عظیم و تخریب مسیرها و سازه‌های مهم، از حساس‌ترین و مهم‌ترین مسائل ژئوتکنیک می‌باشند. تعیین ضریب اطمینان این شیروانی‌ها در پی تحلیل پایداری آن‌ها، با وجود تغییرپذیری بسیار پارامترهای خاک، در بسیاری از موارد وجود دارد. در این صورت به منظور پوشش دادن اثر عدم قطعیت‌های موجود ناچار به اعمال یک ضریب اطمینان نسبتاً بزرگ شده که هزینه‌های زیادی را به دنبال خواهد داشت. در ارزیابی‌های احتمالاتی بویژه ارزیابی قابلیت اعتماد، تلاش می‌شود تا با بکارگیری دامنه‌ای از مقادیر ممکن برای متغیرها، دامنه تغییرات تابع هدف تعیین شود و احتمال شکست به جای ضریب اطمینان محاسبه شود. هدف از نگارش این مقاله ارائه یک روش جهت تحلیل احتمالاتی پایداری یک سد خاکی است. در این مقاله با استفاده از ترکیب روش شبیه‌سازی مونت کارلو به عنوان یک الگوریتم محاسباتی در نرم افزار Slide و روابط روش بیشاپ (یکی از روش‌های تعادل حدی)، پایداری شیب یک سد خاکی (بعنوان مطالعه موردی) مورد بررسی قرار گرفت. نتایج مدلسازی نشان داد که احتمال شکست سد خاکی در بحرانی‌ترین سطح لغزش با ضریب اطمینان ۲/۳۳۶ معادل صفر برآورد می‌شود. همچنین نتایج تحلیل حساسیتی که بر اساس ارزیابی‌های احتمالاتی انجام شد نشان می‌دهد که متغیر زاویه اصطکاک داخلی مؤثرترین متغیر در تخمین احتمال شکست است. بررسی سد موردنظر در تحقیقات دیگر نشان می‌دهد، ارزیابی این سد در تحقیق حاضر از دقت خوبی برخوردار است. درحالی که استفاده از نرم‌افزار Slide ارزیابی‌ها را آسان‌تر کرده و به آن سرعت بخشیده است.

کلیدواژه‌ها: تحلیل احتمالاتی، شبیه‌سازی مونت کارلو، روش تعادل حدی، نرم‌افزار Slide

^۱ عضو هیات علمی دانشکده مهندسی علوم زمین، دانشگاه صنعتی اراک h.fattahi@arakut.ac.ir

^۲ دانشجوی دانشکده مهندسی علوم زمین، دانشگاه صنعتی اراک

* مسئول مکاتبات

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر با توجه به کارکردهای مناسب تحلیل‌های احتمالاتی در مسائل ژئوتکنیکی، مطالعات زیادی در زمینه شیروانی‌ها انجام گرفته است. در مورد بکارگیری روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو تحقیقی انجام شده که بر روی یک شیروانی خاکی صورت گرفته است. همچنین در این تحقیق تغییرات فشار حفره‌ای آب را مورد بررسی قرار داده شده و به این نتیجه رسیده‌اند که حساس‌ترین متغیر در تحلیل پایداری شیروانی‌ها است (Tobutt 1982). در تحقیقی با انجام یکسری تحلیل‌های نیمه احتمالاتی، ریسک گسیختگی شیروانی در یک پروژه واقعی را محاسبه شده و نشان داده‌اند که حاصل شدن ضریب اطمینان بالا در تحلیل‌های قطعی دلیلی بر پایین بودن احتمال شکست نیست و وقوع خرابی کاملاً محتمل است (Duncan 2000). روش اجزای محدود در پژوهشی با تحلیل احتمالاتی تلفیق شده و تراوش آب در زیر سدها، ظرفیت باربری، نشست پی‌ها و پایداری پایه‌های معدنی را مورد بررسی قرار گرفته است (Griffiths and Fenton 2007). تحلیل قابلیت اعتمادی برای بررسی شکست گوه‌ای مورد استفاده قرار داده شده و در آن حالت‌های مختلف شکست گوه‌ای را بررسی شده است (Li et al. 2009). تحلیل احتمالاتی برای یک شیروانی را انجام شده و به این نتیجه رسیده‌اند که با افزایش ضریب همبستگی بین زاویه اصطکاک داخلی و چسبندگی، احتمال شکست افزایش می‌یابد (Li et al. 2011). در مورد یک شکست صفحه‌ای با انتگرال‌گیری مستقیم توابع چگالی احتمال به صورت تحلیلی، احتمال شکست محاسبه شده است و با مقایسه آن با روش شبیه‌سازی مونت کارلو به نتایج مشابه رسیده‌اند (Johari et al. 2013). در تحقیقی تحلیل مرتبه اول قابلیت اعتماد را برای شیروانی خاکی به کار گرفته شده است و در مقایسه آن با روش‌های قطعی به این نتیجه رسیده‌اند که سطح لغزش بحرانی احتمالاتی لزوماً منطبق بر سطح لغزش بحرانی قطعی نیست (Ji et al. 2012). با استفاده از دو روش تقریب اول ممان دوم و روش المان محدود تصادفی تأثیر عدم قطعیت و تغییرپذیری پارامترهای خاک بر قابلیت اعتماد شیروانی‌ها را بررسی شده است (Jha 2015). در پژوهشی با ترکیب روش

ایمینی یک شیروانی از نظر پایداری یا جابجایی و حرکت بخشی از آن به عنوان سطح لغزش بایستی بررسی شود. زمین‌لغزش که از پایین افتادن یا حرکت یکپارچه و اغلب سریع حجمی از مواد رسوبی در امتداد دامنه‌ها رخ می‌دهد از جمله متداول‌ترین پدیده‌های طبیعی تغییرشکل‌دهنده سطح زمین است. مطالعه علمی و جامع پدیده‌ی زمین لغزش از حساس‌ترین و مهم‌ترین مسائل در پروژه‌های عمرانی است، به این دلیل که محل احداث ساختمان‌های بزرگ، سدها، انتخاب مسیر احداث بزرگراه‌ها، تونل‌های عبور و مرور و هرگونه توسعه‌ی معدنی در گرو مطالعه‌ی پایه‌ای شیب‌های منطقه است. در این میان اهمیت سدها به دلیل ذخیره‌سازی آب و تأمین آب شرب مورد نیاز و بعلاوه جلوگیری از وقوع سیلاب‌ها و کنترل آن‌ها امری بدیهی است. سدهای خاکی از جمله سدهایی هستند که به علت استفاده از مواد طبیعی و سهولت در اجرای آن‌ها بسیار مورد توجه هستند. از این رو تحلیل پایداری شیب این گونه سدها موضوعی است که بایستی در طی مراحل مختلف ساخت و بهره برداری مورد بررسی قرار گیرد (Duncan et al. 2014). از طرفی مصالح بکار رفته در ساختار آن‌ها دارای عدم قطعیت هستند که غالباً از یک توزیع احتمالاتی پیروی می‌کنند. به عبارتی خواص و پارامترهای مقاومتی خاک و سنگ مثل چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی دارای پراکندگی زیادی می‌باشند و در عین حال، مستقیماً در دقت تحلیل پایداری تأثیر می‌گذارند (Whitman 1984). تغییرپذیری یا عدم قطعیت موجب ایجاد خطا در تحلیل‌های قطعی و در نتیجه عدم اعتماد به تصمیم‌گیری‌ها می‌شود. ارزیابی قابلیت اعتماد و روش‌های زیر مجموعه‌ی آن که شامل روش‌های عددی و روش‌های تحلیلی می‌شوند، با به کار گرفتن تمامی مقادیر ممکن یک متغیر در غالب یک توزیع احتمالاتی، عدم قطعیت را وارد تحلیل‌ها کرده و بر اساس آن، طراحی و تصمیم‌گیری‌ها را انجام می‌دهد (Phoon 2008).

اعتماد سیستم طی یک ساختار احتمالاتی را محاسبه شده است (Chowdhury and Xu 1995). در یک تحلیل قطعی ضرایب اطمینان محاسبه شده و از آنجایی که در این تحلیل، عدم اطمینان پارامترهای مؤثر وارد نمی‌شود، شاخص قابلیت اعتماد توسط روش لنگر دوم هاسفر-لیند محاسبه شده است (Low et al. 1998). یک تکنیک جدید برای یافتن سطح لغزش بحرانی احتمالاتی ارائه شده است که اساس آن ترکیب خاصی از پارامترهای خاک می‌باشد (Hassan and Wolff 1999). در تحقیقی از تئوری‌های احتمال و قابلیت اعتماد برای تخمین شاخص قابلیت اعتماد و احتمال گسیختگی یک سد چند لایه بهره برده‌اند و در آن از دو تعرف توزیع نرمال و توزیع لگاریتمی نرمال استفاده کرده‌اند (Liang et al. 1999). با کمک گرفتن از روش‌های لنگر دوم درجه اول FORM و روش شبیه‌سازی مونت کارلو MCS آنالیز قابلیت اعتماد پایداری یک شیب انجام شده است و نتایج آن را با نتایج روش‌های تعادل حدی مقایسه کرده‌اند. در آن نشان داده‌اند که روش‌های احتمالاتی بکار گرفته شده مطابق با دو روش متدوال قطعات و بیشاپ می‌باشد اما با روش‌های جانبو و اسپنسر مقدار کمی تفاوت دارد (Malkawi et al. 2000). با توجه به روش پیدا کردن سطح لغزش با کمترین ضریب اطمینان توسط روش‌های پایداری شیب، یک روش عددی برای یافتن سطح لغزش با کمترین شاخص قابلیت اعتماد ارائه شده است (Bhattacharya et al. 2003). با کمک بهینه‌سازی سطح لغزش یک روش عملی جدید برای انجام روش تعادل حدی ارائه شده که با این بهینه سازی شاخص قابلیت اعتماد را نیز به دست آورده‌اند (Low et al. 2007). در تحقیقی تحلیل قابلیت اعتماد شیب‌های خاکی با استفاده از روش درجه اول قابلیت اعتماد انجام شده است و نشان داده‌اند که قابلیت اعتماد یک سیستم می‌تواند به تابع توزیع احتمال در نظر گرفته شده برای پارامترها حساس باشد (Hong and Roh 2008). شاخص قابلیت اعتماد مربوط به هر ناحیه از منطقه شهری در استرالیا را محاسبه شده است. در آن همچنین برای هر ناحیه با در نظر گرفتن نسبت‌های مختلف از فشار آب حفره‌ای ضریب اطمینان میانگین را به دست آورده‌اند

تعادل حدی ساده و روش‌های المان محدود به یک روش شبیه‌سازی احتمالاتی جدید دست یافته‌اند که برای محاسبه احتمال خرابی شیب‌های خاکی قابل کاربرد است (Li et al. 2016). مقاله‌ای به تحلیل قابلیت اعتماد پایداری شیب‌ها پرداخته است و در آن از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند با صرف نظر از عدم قطعیت پارامترهای خاک ممکن است نتایج، بیش از حد محافظه‌کارانه و یا غیر قابل اعتماد باشند (Cao et al. 2017). تحلیل قابلیت اعتمادی برای یک شیروانی انجام شده است و در آن علاوه بر زاویه اصطکاک داخلی و چسبندگی، عمق ترک کششی، آب موجود در ترک کششی و ضریب زلزله را به عنوان متغیرهای تصادفی فرض شده است. با تغییر زاویه شیب و ارتفاع شیروانی مورد نظر، به یک طرح بهینه از نظر اقتصادی و فنی دست پیدا کرده‌اند (Wang et al. 2013). در تحقیقی برای بیان بهتر گسیختگی در تحلیل پایداری شیروانی به دلیل وجود عدم قطعیت در پارامترهای خاک، عوامل محیطی و روش‌ها از تحلیل قابلیت اعتماد استفاده شده است (Alonso 1976). تخمین احتمال گسیختگی سطح لغزش بحرانی در یک شیروانی انجام شده است و در آن نشان داده‌اند که تعداد قطعات فرض شده برای یک سطح لغزش تأثیر قابل توجهی بر احتمال گسیختگی دارد (Chowdhury et al. 1987). مقایسه قابلیت اعتماد یک سیستم دارای سطوح لغزش بحرانی و یک سطح لغزش بحرانی منفرد انجام شده و نشان داده شده است که احتمال گسیختگی یک سطح لغزش بحرانی کمتر از این احتمال در سیستمی با سطوح دارای پتانسیل لغزش است (Oka and Wu 1990). بررسی شاخص قابلیت اعتماد در پایداری یک شیب انجام شده و یک تعبیر هندسی ساده از آن ارائه داده شده است (Chowdhury and Xu 1992). برای ارزیابی احتمالاتی پایداری یک شیب از داده‌های آزمایشات محلی و آزمایشگاهی استفاده شده و از نتایج آن به شاخص قابلیت اعتماد رسیده‌اند. آن‌ها سطح لغزش بحرانی را به عنوان سطحی با حداقل شاخص قابلیت اعتماد تعریف کرده‌اند (Christian et al. 1994). در تحقیقی با در نظر گرفتن همین موضوع محدوده‌های قابلیت

استفاده از این احتمالات در ارزیابی‌های ریسک می‌باشد. در این تحقیق آنالیز قابلیت اعتماد پایداری شیب یک سد خاکی در حالت پایان ساخت آن مورد بررسی قرار گرفته است که در آن از روش شبیه‌سازی مونت کارلو در قالب نرم افزار پرکاربردی به نام Slide، استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که مبنای محاسبات مربوط به تحلیل‌های احتمالاتی، روابط روش بیشاپ (یکی از روش‌های تعادل حدی) بوده است.

۲. قابلیت اعتماد و روش شبیه سازی مونت کارلو

تحلیل قابلیت اعتماد متشکل از مجموعه روش‌هایی است که عدم قطعیت‌ها را با استفاده از توزیعات آماری متغیرهای تصادفی وارد تحلیل کرده و در نهایت توسط احتمال شکست و توزیع احتمالاتی تابع پایه، ارزیابی‌های احتمالاتی را انجام می‌دهد. در حقیقت روش‌های تحلیل قابلیت اعتماد تغییرپذیری پارامترهای ورودی را به مقدار خروجی تابع انتقال می‌دهند و یا به عبارتی تاثیر عدم قطعیت‌های پارامترهای ورودی بر مقدار خروجی اعمال خواهد شد. قابلیت اعتماد براساس احتمال شکست سیستم به شکل زیر تعریف می‌شود (Malkawi et al. 2000):

$$Re = 1 - P_f \quad (1)$$

که در آن، Re قابلیت اعتماد و P_f احتمال شکست می‌باشد. احتمال شکست در تعریف اصلی توسط محاسبه انتگرال چندگانه احتمالاتی در رابطه ۲ به دست می‌آید.

$$P_f = P(g(X) \leq 0) = \int_{g(X) \leq 0} f(X) dX \quad (2)$$

که در آن $g(X)$ تابع حالت حدی سیستم، $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ بردار متغیرهای تصادفی و $f(X)$ تابع چگالی احتمال مشترک همه‌ی متغیرهای تصادفی است (Fattahi et al. 2018; Fattahi et al. 2013; Fattahi et al. 2019; Fattahi and Zandy Ilghani 2020). حل این انتگرال به دلیل در دسترس نبودن تمام اطلاعات مورد نیاز برای تعیین تابع چگالی احتمال و از آن جایی که معرف یک کمیت بسیار

(Chowdhury and Flentje 2011). با بکار گرفتن روش اجزاء محدود و روش تعادل حدی تحلیل قابلیت اعتماد پایداری یک شیب صورت گرفته است و در آن برای یافتن سطح لغزش بحرانی از یک روش بهینه سازی استفاده شده است. در آن همچنین تحلیل حساسیت تأثیر پارامترهای تصادفی را انجام شده است (Farah et al. 2011). با استفاده از یک روش ارائه شده در تحقیقی، تحلیل قابلیت اعتماد چند مسئله ژئوتکنیکی در قالب یک برنامه تحت نرم‌افزار اکسل انجام شده است. در آن کارایی برنامه ارائه شده را بر یک دیوار حائل نیمه‌وزنی، یک شیب خاکی و یک تیر بارگذاری شده ارزیابی شده است (Low et al. 2011). با هدف یافتن اختلافی در سطح لغزش دارای کمترین ضریب اطمینان و سطح لغزش دارای کمترین قابلیت اعتماد، نشان داده شد تفاوت زیادی بین این دو می‌باشد و شاخص قابلیت اعتماد سطح بحرانی لغزش بیشتر از این مقدار در سطح لغزش با قابلیت اعتماد بحرانی است (Liang and Xue-song 2012). در تحقیقی با در نظر گرفتن زاویه اصطکاک داخلی، چسبندگی و وزن مخصوص به عنوان متغیرهای تصادفی، تحلیل احتمالاتی پایداری شیب‌های نامحدود بدون وجود تراوش انجام شده است (Johari and Javadi 2012). شیب‌های با چندی مود گسیختگی مورد بررسی قرار گرفته و تحلیل قابلیت اعتماد آن‌ها با توجه به لایه‌بندی و تغییرات در خواص خاک ارزیابی شده است (Cho 2013). تحلیل قابلیت اعتماد شیب‌های نامحدودی انجام شده است و در آن پارامترهای مقاومت برشی را که با عمق افزایش خطی می‌یابند مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که این افزایش تأثیر قابل توجهی در قابلیت اعتماد شیب رسی دارد (Li et al. 2014). یک روش رویه پاسخ چندگانه برای تحلیل قابلیت اعتماد یک شیب با در نظر گرفتن تغییرپذیری خواص خاک ارائه شده است (Li et al. 2015). در مقاله‌ای به ارائه‌ی یک روش تصادفی اجزاء محدود برای تحلیل قابلیت اعتماد با در نظر گرفتن متغیر بودن خواص مقاومت برشی پرداخته شده است (Jiang et al. 2014). در نهایت هدف از بکارگیری تحلیل‌های احتمالاتی، ارائه میزان احتمال لغزش شیروانی و

قابلیت اعتماد در این روش‌ها وجود دارد. در این موارد، می‌توان از روش‌های شبیه‌سازی بهره برد. یکی از مهم‌ترین روش‌های شبیه‌سازی بکار گرفته شده در مباحث ژئوتکنیکی روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. برای استفاده از این روش باید تابع توزیع هر متغیر آماری شناخته شود. این روش شامل نمونه‌گیری بصورت تصادفی به منظور شبیه‌سازی تصنعی تعدادی زیادی آزمون می‌باشد. پس از انجام این آزمون‌ها، احتمال شکست براساس نسبت تعداد موردنظر یا $g(X) < 0$ به تعداد کل تیراژ محاسبات، تخمین زده می‌شود (Malkawi et al. 2000). مراحل محاسبه احتمال شکست در روش شبیه‌سازی مونت کارلو را می‌توان بصورت زیر خلاصه نمود:

- ۱- تعیین دامنه و توزیع احتمالاتی متغیرهای تصادفی ورودی
- ۲- تولید مقادیر تصادفی از متغیرهای ورودی و محاسبه معیار مورد نظر یا تابع پایه
- ۳- تکرار مراحل اول و دوم به تعداد بسیار زیاد و سپس تولید یک توزیع احتمالاتی برپایه تابع پایه
- ۴- محاسبه احتمال شکست بر اساس نسبت تعداد مراحل شکست $g(X) < 0$ به کل تعداد مراحل محاسبات.

اگر تابع توزیع متغیرهای $g(X)$ که بعد از این پروسه بدست می‌آید امکان تطابق با یکی از توابع توزیع احتمالاتی شناخته شده را داشته باشد احتمال ریزش می‌تواند دقیق‌تر تخمین زده شود:

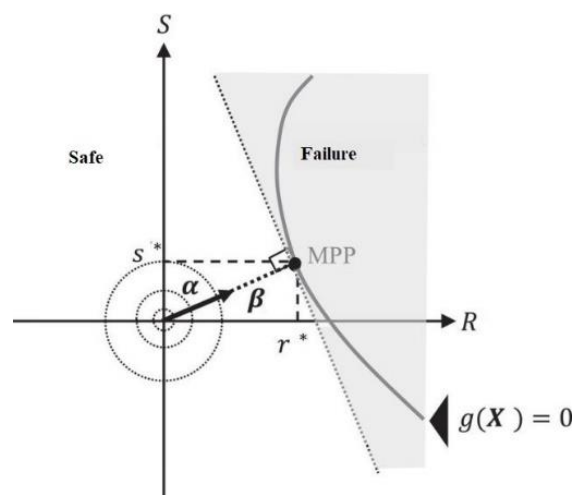
$$P_f = P(g(x) < 0) \quad (3)$$

که در آن P_f ، احتمال شکست، $g(X)$ تابع حالت حدی و P نماد احتمال است.

۳. روش تعادل حدی بیشاپ

در روش‌های تعادل حدی یک سطح گسیختگی قوسی یا غیر قوسی یعنی قطعه‌ای انتخاب و سپس نیروهای محرک و مقاوم به لغزش مقایسه شده و با توجه به شرایط مفروض، ضریب

کوچک است، یکی از مشکلات اساسی تئوری قابلیت اعتماد به حساب می‌آید. لذا تخمین احتمال شکست از طریق روش‌های مختلفی از جمله روش‌های ممان‌های آماری و روش‌های شبیه‌سازی انجام می‌گیرد. همانطور که در شکل ۱ برای دو متغیر بار (S) و مقاومت (R) نشان داده شده است، در همه‌ی این روش‌ها هدف، محاسبه حجم احتمال مشترک قرار گرفته در ناحیه‌ای است که بعنوان شکست تعریف شده است. رویه‌ی حالت حدی ($g(X) = 0$) مانند یک مرز جدا کننده، دو ناحیه‌ی شکست و ایمن را تفکیک می‌کند.



شکل ۱. تفکیک ناحیه شکست و ایمن در صفحه نمودار رویه حالت حدی (Bagheri et al. 2017)

در روش‌های تحلیلی شاخص قابلیت اعتماد (β) به عنوان معیاری برای بیان پایداری سیستم و قضاوت مهندسی درباره‌ی آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. این شاخص در تعریف هندسی کوتاه‌ترین فاصله بین مبدأ و رویه‌ی حالت حدی است. ابتدا بایستی محتمل‌ترین نقطه (Most Probability Point) یا نزدیک‌ترین نقطه از رویه‌ی حالت حدی به مبدأ که دارای مختصات (r^*, s^*) است، پیدا شود. سپس از طریق آن شاخص قابلیت اعتماد محاسبه می‌شود. در شکل ۱، α بردار یکه‌ی بردار β است.

زمانیکه تابع پایه پیچیده و تعداد زیادی متغیر را شامل می‌شود امکان ورود خطا در محاسبه‌ی احتمال شکست و شاخص

که در آخرین مرتبه در معادله بکار رفته است مساوی گردد. به عبارتی:

$$FS_n - FS_{n-1} \leq (0/01) \quad (5)$$

۴. معرفی نرم افزار Slide

راک ساینس (Rocscience) مجموعه‌ای کامل از نرم افزارهای لازم برای مهندسی ژئوتکنیک است. شرکت سازنده از سال ۱۹۹۶ تاکنون با ارائه نرم افزارهای تخصصی زیادی جایگاه مناسبی در این زمینه کسب کرده است. اسلاید، نرم‌افزاری جامع در تحلیل پایداری شیب است که در حالت دوبعدی به ارزیابی ضریب اطمینان و احتمال شکست سطوح لغزش دایره‌ای و غیر دایره‌ای می‌پردازد. همچنین تحلیل آب زیرزمینی به روش المان محدود، تحلیل نفوذپذیری، افت ناگهانی سطح آب، طراحی سیستم نگهداری، تحلیل احتمالاتی و تحلیل حساسیت از دیگر قابلیت‌های این نرم‌افزار است. تمامی انواع شیب‌های خاکی و سنگی، سدهای خاکی، خاکریزها، دیواره‌های حائل، می‌توانند در این نرم‌افزار مورد تحلیل قرار گیرند. برخی ویژگی‌های این نرم‌افزار عبارتند از:

- جستجوی سطح لغزش بحرانی برای سطوح لغزش دایره‌ای و غیر دایره‌ای.
- استفاده از انواع روش‌های آنالیز بیشاپ، جانبو، اسپنسر، GLE.
- امکان آنالیز شیوانی با ساختار چندگانه از مواد، ناهمسانگرد بودن آن‌ها و وجود رابطه‌ی غیر خطی موهر-کولمب.
- امکان مشاهده هر سطح یا تمام سطوحی که توسط جستجو ایجاد می‌شود.

۵. تحلیل و نتایج

۵.۱. معرفی منطقه مورد مطالعه

اطمینان پایداری محاسبه می‌شود. از آنجا که در بیشتر موارد خاک دارای مقاومت اصطکاکی نیز می‌باشد و نیز در شرایطی که توزیع فشار منفذی آب در سطح لغزش یکنواخت نیست و یا در شرایطی که اصلاً توده خاکی یکنواخت و همگن نیست نتیجه محاسبه براساس تصور یک بخش لغزنده به صورت یکنواخت دارای خطا و تقریب نامعلومی خواهد بود. از این رو در تحلیل‌های دقیق، مقطع بخش لغزنده یا محتمل گسیختگی به قطعاتی تقسیم می‌شود که بتوان برای هر قطعه شرایط آن قطعه را منظور نمود. معمولاً این قطعات با فصل مشترک قائم در نظر گرفته می‌شوند و برای هر کدام، تعادل نیروها و گشتاورها برای واحد طول (عمود بر صفحه) مورد بررسی قرار می‌گیرد و آنگاه در مجموع مقطع مورد بررسی ضریب اطمینان محاسبه می‌شود. تحلیل‌های «فلنیوس»، «بیشاپ»، «اسپنسر»، روش سوئدی اصلاح شده، روش «جانبو» و یا بعضی تحلیل‌های دیگر از این گروه‌اند. روشی که بیشاپ پیشنهاد می‌کند مبتنی بر این فرض است که مؤلفه‌های عمودی نیروهای بین باریکه‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند، به عبارت دیگر برآیند آنها در جهت قائم صفر است و فقط مؤلفه افقی آنها تأثیر دارد. در این صورت محاسبه ضریب اطمینان به ترتیب زیر انجام می‌گیرد (Duncan et al. 2014):

$$FS = \frac{1}{\sum W \cdot \sin \alpha} \times \frac{[c'b + (W - ub) \tan \phi']}{\cos \alpha [1 + (\tan \alpha \cdot \tan \phi') / FS]} \quad (4)$$

که در آن α زاویه مماس بر وسط قوس هر باریکه با امتداد افق، b عرض افقی هر باریکه، C' و ϕ' چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی هر قطعه، u فشار منفذی آب و W وزن هر قطعه است. محاسبه FS (ضریب اطمینان) در این رابطه به شکل سعی و خطا است. ابتدا مقداری برای F تصور شده و پس از حل معادله FS جدید به دست آید، آنگاه مقدار جدید FS اگر با مقدار اولیه آن مساوی نباشد در طرف راست رابطه قرار داده می‌شود و مجدداً مقدار FS محاسبه می‌شود، این سعی و خطا آنقدر ادامه می‌یابد تا ضریب اطمینان حاصل با ضریب اطمینانی

بیشترین احتمال شکست نباشد. در این تحقیق به کمک روش شبیه‌سازی مونت کارلو یک رویکرد کاملاً احتمالاتی به کار گرفته شده است. به این صورت که یک مساحت محدود شامل بی‌نهایت مرکز دایره در بالای سر شیروانی و در سمت دامنه‌ی آن در نظر گرفته می‌شود. سپس از این مراکز تعداد بسیار زیادی دایره رسم شده و کمان‌هایی از این دوایر که شیروانی را در بر می‌گیرد، نقش یک سطح لغزش دایره‌ای را دارد. در همه‌ی سطوح لغزش رسم شده در دامنه‌ی شیروانی، یک بار شبیه‌سازی مونت کارلو انجام می‌شود.

همانطور که پیش از این گفته شد، اساس کار شبیه‌سازی مونت کارلو، نمونه‌گیری به صورت تصادفی از متغیرهای ورودی است. در اینجا چهار متغیر چسبندگی فاز رسی اول، زاویه اصطکاک داخلی فاز رسی اول، چسبندگی فاز رسی دوم و زاویه اصطکاک داخلی فاز رسی دوم، به عنوان متغیرهای ورودی، وارد شبیه‌سازی می‌شوند و چون تنها همین چهار متغیر به صورت احتمالاتی هستند، شبیه‌سازی مونت کارلو از آن‌ها به تعداد زیاد نمونه‌برداری می‌کند. به عبارتی در هر بار نمونه‌برداری از هر متغیر در دامنه‌ی تغییرات آن با توزیع لاگ‌نرمال، به صورت تصادفی یک مقدار انتخاب کرده و با مقادیر به دست آمده، محاسبات تعادل حدی را انجام می‌دهد و یک مقدار از ضریب اطمینان را به دست می‌آورد. پس از نمونه‌برداری‌ها، به تعداد نمونه‌ها، ضریب اطمینان حاصل می‌شود که می‌توان بر مقادیر به دست آمده از آن یک توزیع احتمالاتی رسم کرد.

بنابراین در هر یک از سطوح لغزش رسم شده ضریب اطمینان به صورت احتمالاتی محاسبه شده و با مشخص کردن حد آستانه ضریب اطمینان بر روی توزیع آن، احتمال ضریب اطمینان با مقادیر کوچکتر از حد آستانه یا همان احتمال شکست تعیین می‌شود. در نهایت سطح لغزشی که دارای کمترین ضریب اطمینان و بیشترین احتمال شکست باشد به عنوان سطح لغزش بحرانی مشخص می‌شود. با در نظر گرفتن $FS=1$ به عنوان حد

در تحلیل پایداری شیروانی ملزم به استفاده از روش‌های قابلیت اعتماد هستیم، زیرا تغییرات همزمان متغیرهای مختلف باعث تغییر در شرایط پایداری سازه خواهد شد و در برخی موارد ممکن است با تغییر یک سری از متغیرها برخی دیگر از متغیرها نیز تغییر کنند. مطالعه موردی در این تحقیق مربوط به ارزیابی ثبات و پایداری سد کانن (Cannon) (Hassan et al. 1999) است که در مرحله‌ی پایانی ساخت می‌باشد. در تحقیق دیگری، این سد با روش شبکه عصبی مصنوعی بر اساس رویه پاسخ به صورت احتمالاتی بررسی شده است (Cho 2009). اما مقایسه نتایج آن با نتایج تحقیق حاضر نشان از برتری روش ارائه شده در این مقاله را می‌دهد. همچنین استفاده آسان‌تر از نرم‌افزار Slide برای تحلیل احتمالاتی از ویژگی‌های برتری مقاله حاضر است. این سد در شمال غربی میسوری (Missouri) در ایالت متحده آمریکا قرار دارد. ساختار این سد در پروفیل شکل ۲، از دو بخش خاک رس فشرده شده تشکیل شده است که بر روی لایه‌های ماسه و سنگ آهک قرار گرفته است. پارامترهای مقاومت برشی دو لایه‌ی رسی یعنی چسبندگی و زاویه اصطکاک داخلی، به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده‌اند. خصوصیات آماری این متغیرها با برازش توزیع لاگ نرمال بر آن‌ها در جدول ۱ آورده شده است. در این تحقیق به منظور تعیین سطح لغزش بحرانی و تحلیل پایداری مبتنی بر قابلیت اعتماد، از نرم‌افزار Slide کمک گرفته شده است. این برنامه برای انجام تحلیل احتمالاتی قابلیت اعتماد از روش شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده می‌کند.

۵.۲. مدل‌سازی و آنالیز احتمالاتی

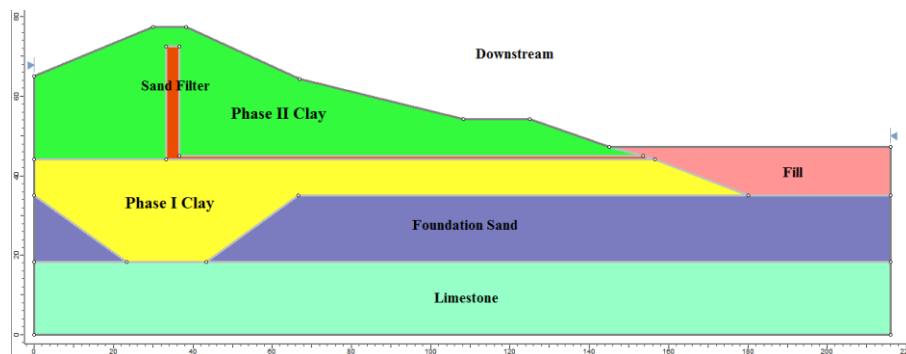
یک رویکرد رایج در آنالیز احتمالاتی شیروانی‌ها به این صورت است که ابتدا سطح لغزش بحرانی در یک تحلیل قطعی مشخص شده و سپس احتمال شکست در این سطح، محاسبه می‌شود. اما این رویکرد نیز از تحلیل‌های قطعی جدا نیست و می‌توان گفت با خطا و عدم قطعیت مواجه است. به عبارتی ممکن است سطح لغزش با کمترین ضریب اطمینان دارای

در شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای سطح لغزش بحرانی است. بعلاوه پارامترهای RI(normal) و RI(lognormal) شاخص‌های قابلیت اعتمادی هستند که با در نظر گرفتن توزیع‌های نرمال و و لاگ‌نرمال برای متغیرها به دست می‌آید. احتمال شکستی که برای این سطح برآورد شده است تقریباً معادل صفر است و می‌توان گفت از ایمنی بالایی برخوردار است. بعلاوه ضریب اطمینان میانگین محاسبه شده ۲/۳۳ می‌باشد که از این نظر نیز ایمنی شیب سد تأیید شده است. با توجه به طیف رنگی مشخص شده، تمام سطوح بررسی شده به روش تعادل حدی بیشاپ دارای ضریب اطمینان بالای ۲ بوده‌اند. نتایج دو تحقیق دیگر که بر روی سد کانن ارزیابی پایداری شیب انجام داده‌اند در جدول ۲ آورده شده است. نتایج ضریب اطمینان و احتمال شکست آن‌ها با تحقیق حاضر تقریباً مشابه است.

آستانه ضریب اطمینان، تابع حالت حدی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$G(X) = FS(X) - 1 \quad (6)$$

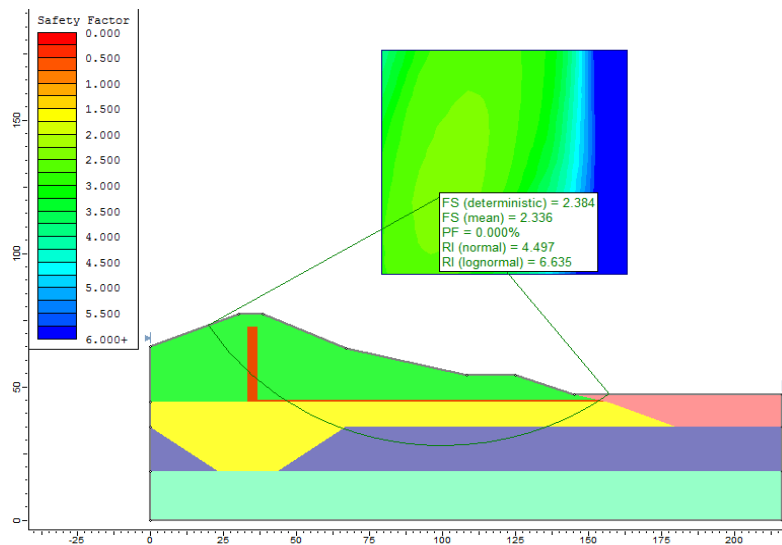
در این رابطه FS(X) به عنوان ضریب اطمینان سطح لغزش، با استفاده از روش بیشاپ محاسبه شده است. شکل ۳ سطح لغزش بحرانی رسم شده در نرم‌افزار slide را نشان می‌دهد. این سطح لغزش از همی لایه‌ها عبور می‌کند و به عبارتی کل شیب را در بر می‌گیرد. در این شکل FS (deterministic) ضریب اطمینانی است که در تحلیل قطعی محاسبه شده است و در آن متغیرها دارای یک مقدار ثابت هستند. همانطور که توضیح داده شد در شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای ضریب اطمینان، یک توزیع احتمال حاصل می‌شود که پارامتر FS (mean) میانگین ضریب اطمینان در این توزیع است. (PF) احتمال شکست محاسبه شده



شکل ۲. نمایش مقطع مورد مطالعه از سد کانن با معرفی مشخصات لایه‌بندی و هندسی

جدول ۱. پارامترهای احتمالاتی متغیرهای تصادفی در هر لایه خاکی

Variables	Statistical Parameter	Phase 1 Clay	Phase 2 Clay	Sand Filter	Foundation Sand	Fill
Cohesion (Kpa)	Mean	117.79	143.64	0	0	0
	COV	0.5	0.55	-	-	-
Friction Angle (°)	Mean	8.5	15	35	18	35
	COV	1	0.6	-	-	-
Unit Weight (KN/m ³)	-	22	22	22	20	25



شکل ۳. تحلیل احتمالاتی شیروانی خاکی و تخمین سطح لغزش بحرانی با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو در نرم‌افزار Slide

شده می‌باشد. یکی از راه‌های تفسیر نتایج احتمالاتی شیروانی و تصمیم‌گیری در مورد آن‌ها، استفاده از جدول ارائه شده توسط Priest و Brown می‌باشد. این جدول یکی از معروف‌ترین معیارهای طراحی احتمالاتی است (Popescu et al. 1998). با استفاده از نتایج شکستی که به دست آمد و با توجه به جداول ۳ و ۴، هر ۳ معیار پذیرفته می‌شود. همانطور که در جدول بررسی عملکرد شیروانی ذکر شده است، شیروانی یا شیب سد پایدار است.

جدول ۲. مقایسه‌ی نتایج تحقیقات پیشین بر روی سد کانن

Researcher	FS (mean)	PF (%)
Hassan and Wolf (1999)	2.647	7.053×10^{-13}
Cho (2009)	2.49	7×10^{-4}
Present Study	2.33	0

به طور کلی هدف از تحلیل قابلیت اعتماد در لغزش شیروانی، محاسبه احتمال گسیختگی و مقایسه آن با مقادیر مجاز ارائه

جدول ۳. معیار طراحی احتمالاتی شیروانی‌ها بر اساس تحقیقات Priest و Brown در سال ۱۹۸۳ (Popescu et al. 1998).

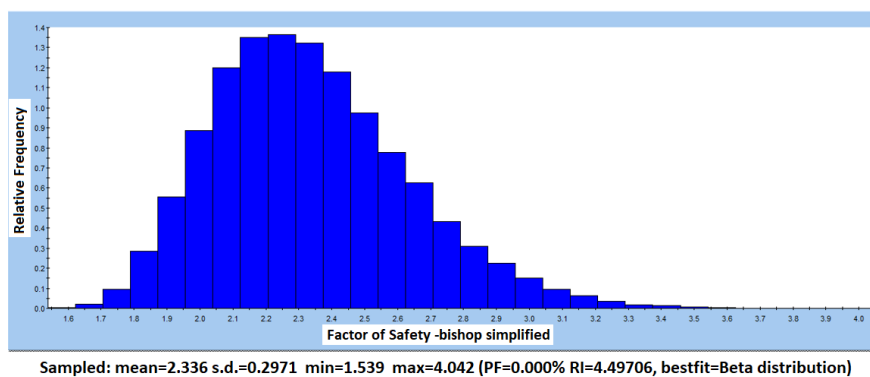
Slope Classification	Significance of Failure Results	Description	Acceptable values		
			Minimum Amount of FS (mean)	Maximum Amount of PF	
				PF(FS<1)	PF(FS<1.5)
1	Low	Single bench with low height (less than 50m) Temporary slop that are not close to transport roads	1.3	10%	20%
2	Medium	Any natural permanent or semi-permanent slope	1.6	1%	10%
3	High	Medium (50 to 100m) and high (more than 150m) slope height close to major transport roads or mining facilities	2	0.30%	5%

جدول ۴. بررسی عملکرد شیروانی‌ها بر اساس معیار Priest و Brown (Popescu et al. 1998).

Slopes performance in relation to acceptable criteria	Considerations
All three criteria are accepted.	The slope is stable.
The minimum amount of FS (mean) and one of the probability criteria is accepted.	Slope stability is risky, which may or may not be acceptable. The level of risk can be reduced by instrumentation programs.
The minimum amount of FS (mean) is rejected and both probabilistic criteria are accepted.	Minor correction of the slope geometry is necessary to increase the FS (mean).
The minimum amount of FS (mean) and one of the probability criteria are rejected.	The slope is unstable. There is a need for serious modification of slope geometry and instrumentation.

وجود دارد. در این تحقیق مقدار ضریب اطمینان انتخابی، یک بوده است که احتمال ضریب اطمینان کوچکتر از این مقدار با توجه به توزیع احتمالاتی ضریب اطمینان، صفر بوده است.

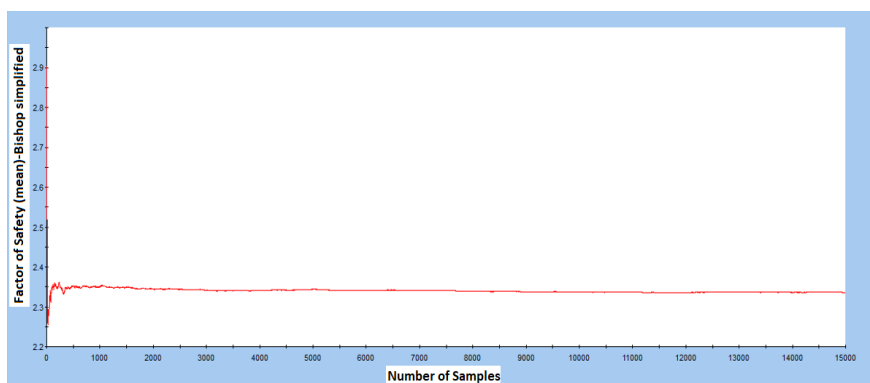
پس از محاسبه تعداد زیادی ضریب اطمینان در شبیه‌سازی، توزیع احتمالاتی مقادیر آن رسم شده است. در شکل ۴ با مشخص نمودن ضریب اطمینان انتخابی بر روی توزیع، امکان برآورد احتمال ضرایب اطمینان بالاتر و پایین‌تر از آن مقدار



شکل ۴. توزیع احتمالاتی ضریب اطمینان در شیروانی خاکی

احتمال شکست در تعداد نمونه‌برداری بالاتر از ۶۰۰۰ نمونه، تقریباً همگرا می‌شود و تغییرات به حداقل می‌رسد. علاوه بر انجام شبیه‌سازی که تنها سطح لغزش بحرانی و احتمال شکست را ارائه می‌دهد تحلیل حساسیت نیز عملیات مهمی را در روشن شدن اهمیت متغیرها انجام می‌دهد. نرم افزار Slide از شیب تغییرات ضریب اطمینان نسبت به دامنه‌ی متغیرهای تصادفی برای تحلیل حساسیت کمک می‌گیرد. به این صورت که متغیرها با توجه به پراکندگی آن‌ها در مقادیر مختلف، در محاسبه‌ی ضریب اطمینان وارد شده و از انجام این عملیات یک خط با یک شیب مشخص به دست می‌آید. هرچه شیب خط حاصل تندتر باشد نشان دهنده‌ی تأثیر بیشتر آن بر مقدار ضریب اطمینان است.

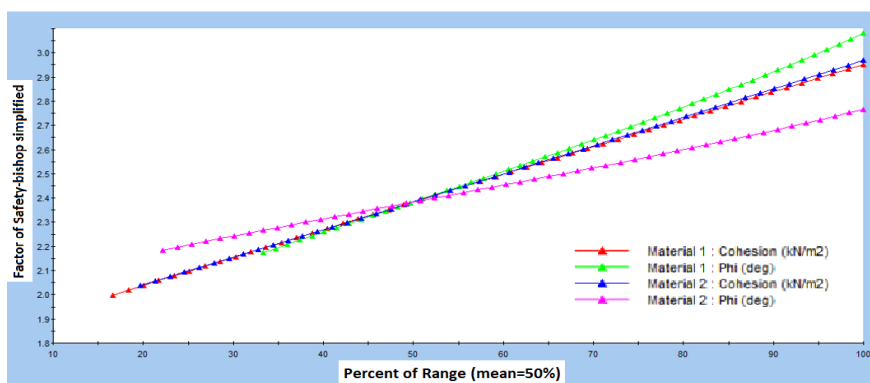
یک موضوع مهم در فرآیند شبیه‌سازی مونت کارلو، تعیین تعداد مناسب برای نمونه‌برداری از متغیرهای تصادفی است. یک راه برای انتخاب تعداد نمونه‌برداری‌ها، استفاده از آزمون همگرایی است. در این آزمون، نمونه‌برداری را از تعداد کم شروع کرده و شبیه‌سازی انجام می‌شود و مقدار احتمال شکست به دست می‌آید. سپس تعداد نمونه‌برداری را افزایش داده و شبیه‌سازی تکرار می‌شود و آنقدر این روند ادامه می‌یابد تا احتمال شکست به یک مقدار ثابت برسد و با افزایش تعداد نمونه‌برداری دیگر احتمال شکست تغییر نکند یا به اصطلاح همگرا شود. برای همگرایی نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو از ۱۵۰۰۰ نمونه‌برداری استفاده شده است. شکل ۵ آزمون همگرایی احتمال شکست شیب موردنظر را نشان می‌دهد. مطابق این شکل



شکل ۵. نمودار روند همگرایی احتمال شکست در شبیه‌سازی مونت کارلو نسبت به افزایش تعداد نمونه‌ها در نرم‌افزار Slide

تقریباً به یک اندازه مؤثر هستند. شکل ۷ پراکندگی متغیر زاویه اصطکاک داخلی نسبت به ضریب اطمینان را نشان می‌دهد. در این شکل نیز مشخص است که ϕ در لایه اول دارای جهت‌گیری بهتری نسبت به ϕ در لایه دوم است.

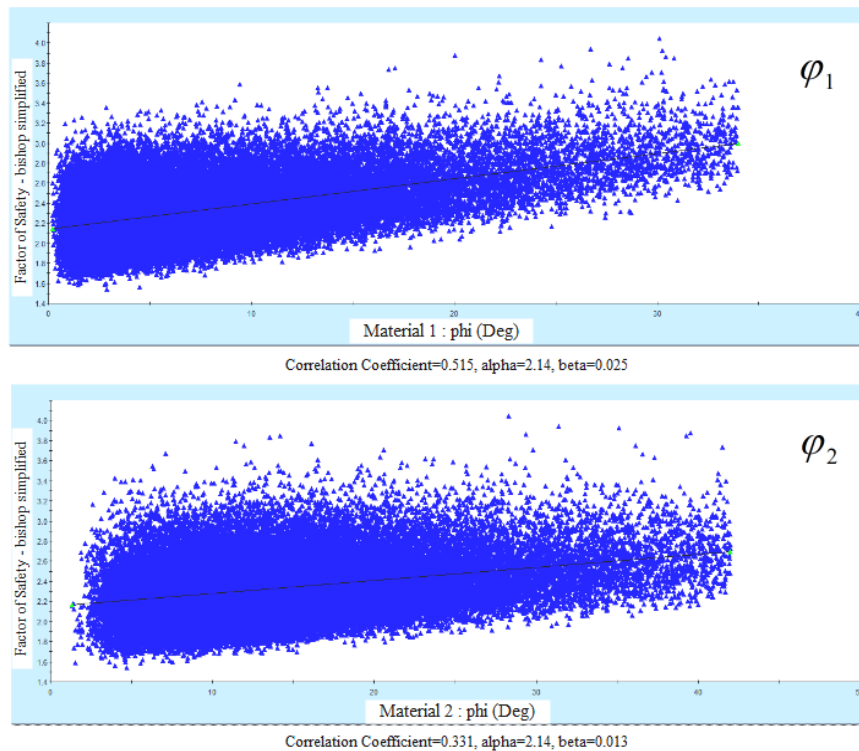
. عدم قطعیت هر متغیر در هر لایه ممکن است تأثیر متفاوتی بر احتمال شکست محاسبه شده داشته باشد. شکل ۶ تحلیل حساسیت انجام شده بر روی متغیرهای تصادفی را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل متغیر زاویه اصطکاک داخلی در فاز رسی ۱ دارای بیشترین تأثیرگذاری بر پایداری شیب در این مسئله است. همچنین زاویه اصطکاک داخلی در فاز رسی ۲ کمترین تأثیرگذاری را دارد. متغیر چسبندگی نیز در هر دو لایه



شکل ۶. بردار حساسیت متغیرهای تصادفی نسبت به ضریب اطمینان

بررسی کرد. همانطور که در شکل ۷ مشخص است، ارتباط ضریب اطمینان نسبت به ϕ در فاز رسی ۱ دارای یک نظم و جهت‌گیری است. همچنین این نمودار برای متغیر ϕ در فاز رسی ۲ رسم شده که نظم و جهت‌گیری کمتری در آن مشاهده می‌شود.

یکی از راه‌های بررسی رفتار و ارتباط دو متغیر نسبت به یکدیگر، رسم نمودار پراکندگی دویه‌دوی متغیرها است. این نمودار چگونگی وابستگی و اینکه آیا ارتباط خطی یا غیر خطی بین دو متغیر وجود دارد یا نه را نشان می‌دهد. این ارتباط از طریق تجمع و قرارگیری داده‌های آن‌ها نمایان می‌شود. پس از تحلیل حساسیت متغیرهای تصادفی، مشخص شد که متغیر ϕ در فاز رسی ۱ مؤثرترین متغیر است. این امر را می‌توان در نمودار پراکندگی ضریب اطمینان نسبت به ϕ در فاز رسی ۱



شکل ۷. پراکندگی مقادیر نمونه‌های زاویه اصطکاک داخلی در دو لایه رسی نسبت به ضریب اطمینان

نتیجه‌گیری

بعلاوه عدم قطعیت متغیرهای تصادفی در لایه‌ها در نظر گرفته شد و موجب یک تحلیل احتمالاتی شد که نسبت به تحلیل قطعی آن یعنی محاسبه ضریب اطمینان قطعی، می‌توان با اطمینان خاطر در مورد خروجی و اهمیت آن نظر داد. تحلیل حساسیتی که براساس قابلیت اعتماد بر روی متغیرها انجام شد نشان داد، که به طور کلی متغیر چسبندگی در لایه‌ها به یک اندازه بر روی نتایج مؤثر هستند اما از آن مهم‌تر متغیر زاویه اصطکاک داخلی در لایه اول است که با کمی اختلاف از سایر متغیرها، دارای بیشترین تأثیر گذاری می‌باشد. بعلاوه مقایسه‌ی نتایج این تحقیق با تحقیقاتی که بر روی مطالعه موردی مد نظر یعنی سد کانن انجام شده است نشان می‌دهد، روش مورد استفاده در نرم‌افزار اسلاید به خوبی قابلیت ارزیابی پایداری شیب‌ها را دارا می‌باشد و این کار را با دقت بالایی انجام می‌دهد. در عین حال این نرم‌افزار ارزیابی‌ها را به صورت قابل فهم، آسان و سریع انجام می‌دهد و نیازی به کدنویسی و تحلیل‌های پیچیده ندارد.

به‌کارگیری تحلیل احتمالاتی در بررسی پایداری شیروانی‌ها علاوه بر محاسبه یک ضریب اطمینان میانگین، یک احتمال گسیختگی به‌یازای این ضریب اطمینان ارائه می‌دهد. این ویژگی به طراحان کمک می‌کند با در نظر گرفتن هر دو مقدار احتمال شکست و ضریب اطمینان به یک طرح بهینه از نظر فنی و اقتصادی دست پیدا کنند. به این منظور تحلیل قابلیت اعتماد پایداری شیب یک سد خاکی با چهار لایه متفاوت با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو و با کمک گرفتن از نرم‌افزار Slide انجام شده است. پس از ۱۵۰۰۰ نمونه‌برداری در شبیه‌سازی، سطح لغزش بحرانی تخمین زده شده دارای احتمال شکستی معادل صفر و ضریب اطمینان ۲/۳۳۶ است. بالا بودن ضریب اطمینان و مقدار بسیار کوچک احتمال شکست نشان می‌دهد شیب پایین دست سد کانن از پایداری خوبی برخوردار بوده و نیازی به کاهش شیب ندارد. همچنین مقایسه نتایج احتمالاتی با جداول نشان داد که سد خاکی پایدار و ایمن است.

منابع

- Alonso E.E., 1976, Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays, *Geotechnique*, 26: 453-472.
- Bagheri M., Miri M., Shabakhty N., 2017, Fuzzy time dependent structural reliability analysis using alpha level set optimization method based on genetic algorithm, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 32: 4173-4182.
- Bhattacharya G., Jana D., Ojha S., Chakraborty S., 2003, Direct search for minimum reliability index of earth slopes, *Computers and Geotechnics*, 30: 455-462.
- Cao Z., Wang Y., Li D. (2017) Practical reliability analysis of slope stability by advanced Monte Carlo simulations in a spreadsheet. In: *Probabilistic approaches for geotechnical site characterization and slope stability analysis*. Springer, pp 147-167
- Cho S.E., 2009, Probabilistic stability analyses of slopes using the ANN-based response surface, *Computers and Geotechnics*, 36: 787-797.
- Cho S.E., 2013, First-order reliability analysis of slope considering multiple failure modes, *Engineering Geology*, 154: 98-105.
- Chowdhury R., Flentje P., 2011, Practical reliability approach to urban slope stability :
- Chowdhury R., Tang W., Sidi I., 1987, Reliability model of progressive slope failure, *Geotechnique*, 37: 467-481.
- Chowdhury R., Xu D., 1992, Reliability index for slope stability assessment—two methods compared, *Reliability Engineering & System Safety*, 37: 99-108.
- Chowdhury R., Xu D., 1995, Geotechnical system reliability of slopes, *Reliability Engineering & System Safety*, 47: 141-151.
- Christian J.T., Ladd C.C., Baecher G.B., 1994, Reliability applied to slope stability analysis, *Journal of Geotechnical engineering*, 120: 2180-2207.
- Duncan J.M., 2000, Factors of safety and reliability in geotechnical engineering, *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 126: 307-316.
- Duncan J.M., Wright S.G., Brandon T.L. (2014) *Soil strength and slope stability*. John Wiley & Sons ,
- Farah K., Ltfi M., Hassis H., 2011, Reliability analysis of slope stability using stochastic finite element method, *Procedia Engineering*, 10: 1402-1407.
- Fattahi H., Babanouri N., Varmazyari Z., 2018, A Monte Carlo simulation technique for assessment of earthquake-induced displacement of slopes, *Journal of Mining and Environment*, 9: 959-966.
- Fattahi H., Shojaee S., Farsangi M.A.E., Mansouri H., 2013, Hybrid Monte Carlo simulation and ANFIS-subtractive clustering method for reliability analysis of the excavation damaged zone in underground spaces, *Computers and Geotechnics*, 54: 210-221.
- Fattahi H., Varmazyari Z., Babanouri N., 2019, Feasibility of Monte Carlo simulation for predicting deformation modulus of rock mass, *Tunnelling and Underground Space Technology*, 89: 151-156.
- Fattahi H., Zandy Ilghani N., 2020, Slope Stability Analysis Using Bayesian Markov Chain Monte Carlo Method, *Geotechnical and Geological Engineering*, 38: 2609-2618.
- Griffiths D., Fenton G.A. (2007) *The random finite element method (RFEM) in slope stability analysis*. In: *Probabilistic methods in geotechnical engineering*. Springer, pp 317-346
- Hassan A.M., Wolff T.F., 1999, Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes, *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 125: 301-308.

- Hassan A.M., Wolff T.F.J.J.o.G., Engineering G., 1999, Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes, 125: 301-308.
- Hong H., Roh G., 2008, Reliability evaluation of earth slopes, Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, 134: 1700-1705.
- Jha S.K., 2015, Effect of spatial variability of soil properties on slope reliability using random finite element and first order second moment methods, Indian Geotechnical Journal, 45: 145-155.
- Ji J., Liao H., Low B.K., 2012, Modeling 2-D spatial variation in slope reliability analysis using interpolated autocorrelations, Computers and Geotechnics. ۱۴۶-۱۳۵ :۴۰ ,
- Jiang S.-H., Li D.-Q., Zhang L.-M., Zhou C.-B., 2014, Slope reliability analysis considering spatially variable shear strength parameters using a non-intrusive stochastic finite element method, Engineering Geology, 168: 120-128.
- Johari A., Fazeli A., Javadi A., 2013, An investigation into application of jointly distributed random variables method in reliability assessment of rock slope stability, Computers and Geotechnics, 47: 42-47.
- Johari A., Javadi A., 2012, Reliability assessment of infinite slope stability using the jointly distributed random variables method, Scientia Iranica, 19: 423-429.
- Li D.-Q., Jiang S.-H., Cao Z.-J., Zhou W., Zhou C.-B., Zhang L.-M., 2015, A multiple response-surface method for slope reliability analysis considering spatial variability of soil properties, Engineering Geology, 187: 60-72.
- Li D.-Q., Qi X.-H., Phoon K.-K., Zhang L.-M., Zhou C.-B., 2014, Effect of spatially variable shear strength parameters with linearly increasing mean trend on reliability of infinite slopes, Structural Safety, 49: 45-55.
- Li D.-Q., Xiao T., Cao Z.-J., Phoon K.-K., Zhou C.-B., 2016, Efficient and consistent reliability analysis of soil slope stability using both limit equilibrium analysis and finite element analysis, Applied Mathematical Modelling, 40: 5216-5229.
- Li D., Chen Y., Lu W., Zhou C., 2011, Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables, Computers and Geotechnics, 38: 58-68.
- Li D., Zhou C., Lu W., Jiang Q., 2009, A system reliability approach for evaluating stability of rock wedges with correlated failure modes, Computers and Geotechnics, 36: 1298-1307.
- Liang L., Xue-song C., 2012, The location of critical reliability slip surface in soil slope stability analysis, Procedia Earth and Planetary Science, 5: 146-149.
- Liang R., Nusier b., OK, Malkawi A., 1999, A reliability based approach for evaluating the slope stability of embankment dams, Engineering Geology, 54: 271-285.
- Low B., Gilbert R., Wright S., 1998, Slope reliability analysis using generalized method of slices, Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, 124: 350-362.
- Low B., Lacasse S., Nadim F., 2007, Slope reliability analysis accounting for spatial variation, Georisk, 1: 177-189.
- Low B., Zhang J., Tang W.H., 2011, Efficient system reliability analysis illustrated for a retaining wall and a soil slope, Computers and Geotechnics, 38: 196-204.
- Malkawi A.I.H., Hassan W.F., Abdulla F.A., 2000, Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability, Structural safety, 22: 161-187.
- Oka Y., Wu T.H., 1990, System reliability of slope stability, Journal of Geotechnical engineering, 116: 1185-1189.

- Phoon K.-K. (2008) Reliability-based design in geotechnical engineering: computations and applications. CRC Press ,
- Popescu M., Trandafir A., Federico A., Simeone V. Probabilistic risk assessment of landslide related geohazards. In: Geotechnical hazards, Proceedings of the 11th Danube European conference soil mechanics and geotechnical engineering. AA Balkema Publishers, Porec, 1998. pp 863-870
- Tobutt D., 1982, Monte Carlo simulation methods for slope stability, Computers & Geosciences, 8: 199-208.
- Wang L., Hwang J.H., Juang C.H., Atamturktur S., 2013, Reliability-based design of rock slopes—a new perspective on design robustness, Engineering Geology, 154: 56-63.
- Whitman R.V., 1984, Evaluating calculated risk in geotechnical engineering, Journal of Geotechnical engineering, 110: 143-188.