

Satellite Status Control Using Tabulation Gain Controller in a Variable Parameter System

M. Navabi^{1*} and F. Malekpour²

1. Associate Professor, Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

2. M.Sc., Faculty of New Technologies Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

*Corresponding Author's E-mail: m_navabi@sbu.ac.ir

Abstract

In the variable parameter linear method, which is used to express systems with time-varying state-space matrices, the stability and performance of the feedback system are guaranteed and there is significant potential for improving efficiency. The dynamics of these types of systems depend on a variable parameter with time, which is considered in this research as the angular velocity of the reaction wheel. The values of this parameter are unknown over time but can be measured by the performance of the system. By using the tabulation gain technique, the stability of the variable parameter system is checked and the tabulation parameter is selected as a function of estimating effective control factors. The extracted sufficient conditions are converted into linear matrix inequality conditions that can be solved by the convex algorithm. In order to ensure the stability and performance of the variable parameter system, the tabulated gain is obtained by solving the controlling conditions. Numerical simulation results show the success of the proposed method.

Keywords: Linear variable parameter, State control, Satellite, Gain tabulation



COPYRIGHTS

© 2022 by the authors. Published by Aerospace Research Institute. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of [the Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

How to cite this article:

M. Navabi and F. Malekpour, "Satellite Status Control Using Tabulation Gain Controller in a Variable Parameter System," *Journal of Space Science and Technology*, Vol. 15, No. 2, pp. 15-25, 2022 (in Persian), <https://doi.org/10.30699/jsst.2021.244891.1309>.

کنترل وضعیت ماهواره با استفاده از کنترل کننده بهره جدول بندی در سیستم پارامتر متغیر

محمد نوابی^{۱*} و فرشته ملک پور^۲

دانشکده مهندسی فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

* ایمیل نویسنده مخاطب: m_navabi@sbu.ac.ir

چکیده

این مقاله یک روش تخمین پارامتر از مدل های زمان-پیوسته را برای یک سیستم پارامتر متغیر معرفی می کند. در روش خطی پارامتر متغیر که برای بیان سیستم هایی با ماتریس های فضا-حالت تابع از پارامترهای زمان متغیر است، پایداری و عملکرد سیستم فیدبک تضمین و یک پتانسیل قابل توجه برای بهبود کارایی وجود دارد. دینامیک این نوع سیستم ها به یک پارامتر متغیر با زمان که در این پژوهش سرعت زاویه ای چرخ عکس العملی در نظر گرفته شده وابسته است. مقادیر این پارامتر در طول یک بازه زمانی نامعلوم، اما با عملکرد سیستم قابل اندازه گیری است. با استفاده از تکنیک بهره جدول بندی، پایداری سیستم پارامتر متغیر بررسی و پارامتر جدول بندی برای یک عملکرد از تخمین فاکتورهای موثرکنترلی انتخاب می شود. شرایط کافی استخراج شده به شرایط نامساوی ماتریسی خطی تبدیل می شوند که می توانند با الگوریتم محدب حل شوند. با حل این شرایط کنترل کننده، بهره جدول بندی شده به دست می آید تا پایداری و عملکرد سیستم پارامتر متغیر را تضمین کند. نتایج شبیه سازی عددی موفقیت آمیز بودن روش پیشنهادی را نشان می دهند.

واژه های کلیدی: پارامتر متغیر خطی، کنترل وضعیت، ماهواره، جدول بندی بهره

علائم و اختصارات

دلیل به دست آمدن کنترل پیوسته و آرام با کمترین گشتاورهای اغتشاشی ممکن، چرخ های عکس العملی مناسب تر هستند. کنترل وضعیت فضاپیما با وجود معادلات غیرخطی و مرتبه بالا که نیازمند دقت و حساسیت بالایی در حل است، از جمله مسائل بسیار مهم و پیچیده در عصر حاضر است.

برای کنترل وضعیت از عملگرهای متعددی همچون ابزارهای تبادل گشتاور و ابزارهای تولید گشتاور خارجی استفاده می شود که ابزارهای تولید گشتاور خارجی محدودیت هایی همچون گشتاور پایین دارند. اما می توان از ابزارهای تبادل گشتاور برای کنترل وضعیت کامل ماهواره به عنوان عملگر استفاده کرد که در میان انواع مختلف آن، چرخ های عکس العملی می توانند گشتاور دقیق کنترلی تولید کنند. بنابراین، در این مقاله از چرخ های عکس العملی برای کنترل وضعیت دقیق استفاده می شود [۱].

سه چرخ عکس العملی که هر کدام موازی یکی از محورهای بدنه ماهواره است، ساده ترین نوع سیستم کنترلی را می سازد. برای

Ω	سرعت زاویه ای چرخ ها
I_{RW}	ماتریس های اینرسی محور چرخش
P_S	ماتریس محور چرخش
σ	بردار پارامتر زمان بندی
I	ماتریس اینرسی فضاپیما
ω	بردار سرعت زاویه ای فضاپیما
q	کواترنیون
0	شرایط آغازین
e	خطا
T_x	هدف
	Skew Symmetric

مقدمه

کنترل وضعیت یک تکنیک محوری در مأموریت های متعدد فضایی محسوب می شود که عملکرد درست و دقیق فضاپیما را تضمین می کند. برای سیستم های کنترل وضعیت دقیق و مانورهای سریع، به

ماهواره استفاده و برتری این روش بار دیگر در مقابله با نامعینی‌ها متغیر با زمان همچون ممان اینرسی متغیر با زمان و سرعت زاویه‌ای کره عکس‌العملی متغیر با زمان ثابت شد [۱۱ و ۱۲].

در این مقاله برای گسترش این روش به کنترل عملکرد و پایداری، ماهواره‌ای با چهار چرخ عکس‌العملی معرفی شده است. دینامیک فضاپیما به‌عنوان یک سیستم خطی پارامتر متغیر بیان شده و یک کنترل‌کننده بهره جدولبندی با استفاده از نامساوی‌های خطی ماتریسی به آن اعمال می‌شود. علاوه‌براین، یک متغیر حالت مجازی و ماتریس انتقال مختصات به منظور کنترل وضعیت سیستم خطی پارامتر متغیر برای کاهش تعداد پارامترهای جدولبندی معرفی می‌شوند. تمام کنترل‌کننده‌های موجود کنترل‌کننده‌های بهره جدولبندی هستند، بنابراین کنترل بهره جدولبندی خطی پارامتر متغیر برای توسعه بیشتر در کنترل وضعیت فضاپیما با پارامترهای زمان متغیر مناسب است. این مقاله یک پاسخ جدید برای این مشکل ارائه می‌کند که به صورت زیر است:

۱- مشخصه‌های زمان متغیر در واقع در این مقاله تغییر سریع سرعت زاویه‌ای چرخ‌های عکس‌العملی در ماهواره در نظر گرفته شده است.

۲- یک کنترل‌کننده بهره جدولبندی خطی پارامتر متغیر به‌دست می‌آید و سرعت زاویه‌ای چرخ‌ها به‌عنوان پارامتر زمان متغیر این مدل بیان می‌شوند. بهره کنترل‌کننده با تغییرات پارامترهای متغیر برای بهبود عملکرد سیستم تغییر می‌کنند.

مدل‌سازی ماهواره

معادلات دینامیکی غیرخطی حول نقاط عملکردی نامی تخمین زده می‌شوند تا یک مدل خطی به‌دست آید. معادله وضعیت دینامیکی خطی شده در طراحی اولیه، آنالیز پایداری برای استفاده از روش‌های کنترلی کلاسیک استفاده می‌شوند [۱].

دینامیک

فضاییمای مفروض با بدنه صلب فرض شده است. بدنه‌ای با دستگاه مختصات ثابت \mathcal{F}_B با دسته‌ای از بردار یکه \hat{x}_B ، \hat{y}_B و \hat{z}_B ارائه شده است. فرض می‌شود که همه چرخ‌های عکس‌العملی ممان اینرسی I_{RW} یکسان دارند. با استفاده از تعریف معادله حرکت چرخشی یک فضاییمای صلب به‌صورت زیر است [۱].

$$\dot{M} = \dot{H} + \omega \times H \quad (1)$$

کنترل کافی در صورت آسیب‌دیدن یکی از چرخ‌ها یک چرخ عکس-العملی چهارم به منظور افزایش قابلیت اطمینان کل سیستم نصب می‌شود. محور چرخ چهارم خارج از سه محور اصلی فضاپیما در نظر گرفته می‌شود که قابلیت ایجاد گشتاور حول سه محور اصلی را اضافه می‌کند [۲].

به دلیل غیرخطی بودن و مرتبط بودن دینامیک و سینماتیک وضعیت فضاپیما، کنترل دقیق به سختی برای روش‌های خطی‌سازی پاسخ می‌دهد. اگرچه روش‌های خطی ابزارهای مفیدی برای آنالیز پایداری و عملکرد هستند اما آن‌ها برای اجرای مستقیم مناسب نیستند. علاوه‌براین، تقاضا برای امنیت ماهواره و قابلیت اطمینان باعث به وجود آمدن تحقیقات برای کنترل وضعیت در حضور خطا و اشباع عملکرد شده است.

با استفاده از شرایطی همچون لیانوف پایداری کلی تضمین می‌شود، اما عملکرد کنترل در بیشتر مواقع نادیده گرفته می‌شود. اگرچه بهره‌بردن هم‌زمان از پایداری کلی و عملکرد کنترل با روش‌های معمول سخت است، اما در سال‌های اخیر توجه زیادی به روش خطی پارامتر متغیر^۳ شده است که می‌توان با این روش به هدف ذکر شده رسید. این نوع سیستم می‌تواند به طور دقیق مشخصه‌های زمان متغیر پارامترهای سیستم را توصیف کند. کنترل‌کننده بهره جدول-بندی^۴ می‌تواند عملکرد سیستم‌ها را با استفاده از اطلاعات پارامترهای زمان متغیر بهبود بخشد.

در سه دهه گذشته روش خطی پارامتر متغیر به طور نظری خیلی گسترش پیدا کرده و به مسائل متعدد مهندسی اعمال شده است. اولین بار از روش خطی پارامتر متغیر در رسانه آقای شاما^۵ [۳] بعد از معرفی بهره جدولبندی در سال ۱۹۸۸ نام برده شد. بعد از آن با گسترش این روش یک شیوه جدید بهره جدولبندی که منحصر به فرد است به‌دست آمد، که هدف نهایی آن فرمول‌سازی آنالیز و ترکیب نتایج در نامساوی‌های ماتریسی خطی^۶ بود [۴]. بعد از آن مقالات زیادی از این روش برای موشک در کنترل خودخلبان غیرخطی یا کوپل‌شده [۵] یا کنترل پرواز روی زوایای حمله با استفاده از توابع لیانوف وابسته به پارامتر [۶] و در عملکرد هواپیماها و هلیکوپترها برای کاهش ارتعاشات در طول پاکت پرواز استفاده شد [۷]. در این میان از روش خطی پارامتر متغیر سویچینگ نیز در مسائل مربوط به میکرو ماهواره [۸]، موشک [۶] و دیگر وسایل هوافضایی [۹] بهره برده شد. در برخی پژوهش‌ها، برای بررسی عملکرد به‌طور مثال از پس‌خور H_∞ با حل نامساوی‌های خطی ماتریسی [۷، ۸ و ۱۰] یا H_2 استفاده شد و نتایج برتری این روش را نسبت به دیگر روش‌ها نشان دادند. در نهایت در سال‌های اخیر از این روش در رابطه با فضاپیما و

5. Shamma
6. Linear Matrix Inequalities

3. Linear Parameter Varying (LPV)
4. Gain Scheduled Control Systems

در نهایت معادله دینامیک فضاپیما به صورت معادله (۸) بیان می شود.

$$\dot{\omega} = -I^{-1}\omega^{\times}(I\omega + P_s I_{RW}\Omega) - I^{-1}P_s I_{RW}\dot{\Omega} \quad (8)$$

$$\dot{\omega} = f(\omega(t), \dot{\Omega}(t), \Omega(t)) \quad (9)$$

سینماتیک

سینماتیک وضعیت فضاپیما در این مقاله با کوآرنیون بیان می شود. اگر $e = [e_1 e_2 e_3]^T$ به عنوان بردار ویژه و زاویه دوران با θ تعریف شود، می توان عناصر کوآرنیون ها را به صورت معادلات (۱۰) تعریف نمود [۱۳]. پارامترهای کوآرنیون شامل یک قسمت اسکالر و یک قسمت برداری هستند و داریم [۲]:

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_2 &= e_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_3 &= e_3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ q_4 &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

که بردار q به صورت $q = [q_1 q_2 q_3 q_4]^T$ ، به منظور نشان دادن گرایش به جای روش زوایای اولر استفاده می شود. رابطه مشتق زمانی کوآرنیون ها می تواند به صورت تابعی از سرعت زاویه ای به صورت زیر باشد [۱]:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = 0.5\Omega'q \quad (11)$$

که بردار خطای کوآرنیون بیانگر خطای وضعیت بین جهت وضعیت فضاپیما در فضا و جهت مطلوبی است که قرار است فضاپیما در انتهای مانور در آن قرار گیرد و به صورت زیر بیان می شود [۱۳] q کوآرنیون فضاپیما q_T بیانگر کوآرنیون مطلوب و q_e خطای کوآرنیون است:

$$q_e = \begin{bmatrix} q_{d4} & q_{d3} & -q_{d2} & q_{d1} \\ -q_{d3} & q_{d4} & q_{d1} & q_{d2} \\ q_{d2} & -q_{d1} & q_{d4} & q_{d3} \\ -q_{d1} & -q_{d2} & -q_{d3} & q_{d4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

مدل سازی سیستم خطی پارامتر متغیر

یک سیستم خطی پارامتر متغیر به عنوان یک سیستم خطی زمان متغیر بعد محدود که ماتریس های آن توابع ثابتی از تعدادی پارامتر متغیر $\sigma(t)$ هستند و داریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t) \\ y &= C(\sigma(t))x(t) + D(\sigma(t))u(t) \end{aligned} \quad (13)$$

که $M = [M_x M_y M_z] \in \mathbb{R}^3$ گشتاور خارجی و $H = [H_x H_y H_z] \in \mathbb{R}^3$ بردار مومنتوم زاویه ای کل، $\omega = [\omega_x \omega_y \omega_z]^T \in \mathbb{R}^3$ بردار سرعت زاویه ای فضاپیما هستند. برای هر بردار $X = [X_x X_y X_z]^T \in \mathbb{R}^3$ و ماتریس $X^{\times} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ماتریس پادمتقارن هر بردار دلخواه به منظور عملیات ضرب ماتریسی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall X = [X_1 X_2 X_3]^T$$

$$X^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & -X_1 \\ -X_2 & X_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

در صورتی که $I \in \mathbb{R}^3$ ماتریس اینرسی فضاپیما باشد، داریم:

$$M = (I\dot{\omega} + \dot{H}) + \omega^{\times}(I\omega + H) \quad (3)$$

تحت مفروضات فضاپیما هیچ گشتاور اغتشاشی خارجی به آن وارد نمی شود، یعنی $M = 0$ و داریم:

$$(I\dot{\omega} + \dot{h}) + \omega^{\times}(I\omega + h) = 0 \quad (4)$$

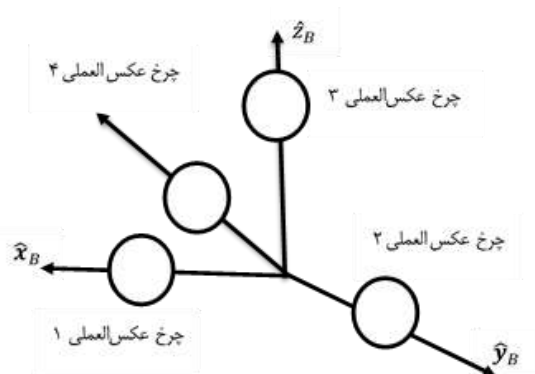
بردار مومنتوم زاویه ای کل فضاپیما H با چرخ عکس العملی به صورت زیر در دستگاه بدنی فیکس نمایش داده می شود:

$$H = I\omega + P_s I_{RW}\Omega \quad (5)$$

$$I\dot{\omega} + P_s I_{RW}\dot{\Omega} + \omega^{\times}H = 0 \quad (6)$$

که Ω سرعت زاویه ای چرخ ها به صورت $\Omega = [\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4]$ و P_s وضعیت قرارگیری محور چرخ هاست که بر اساس شکل (۱) به صورت رابطه (۷) به دست می آید.

$$P_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (7)$$



شکل ۱- وضعیت ظاهری قرارگیری چرخ های عکس العملی

دارد و وابستگی ماتریس‌ها به σ افاین است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \sigma(t) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \sigma(t) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

و A_i, B_i, C_i, D_i سیستم‌های گوشه^{۱۲} را مشخص می‌کنند و ضرایب ترکیب پلی‌تاپیک هستند که به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵]:

$$\begin{aligned} A(\sigma(t)) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i \\ B(\sigma(t)) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i B_i \\ C(\sigma(t)) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i C_i \\ D(\sigma(t)) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i D_i \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i(\sigma(t)) &= 1, \lambda_i(\sigma(t)) \geq 0, \forall i = 1, \dots, N, \forall \sigma \in \Theta \end{aligned} \quad (۲۰)$$

برای خطی‌سازی و تبدیل به مدل خطی پارامتر متغیر از روش خطی‌سازی ژاکوبی که ساده‌ترین روش برای به‌دست آوردن مدل خطی پارامتر متغیر است، استفاده می‌شود. فرض می‌شود که سیستم غیرخطی را می‌توان حول نقاط تعادل دلخواه خطی کرد. پایه روش بر استفاده از تخمین درجه یک سری تیلور^{۱۳} و بعد از آن درون‌یابی مدل‌های خطی زمان ثابت^{۱۴} به‌دست آمده در جایی است که، نقاط عملکردی از نقاط تعادل متفاوت هستند [۱۶].

بر اساس معادله دینامیکی (۹) مدل خطی پارامتر متغیر ساده برای استفاده گسترش داده شده که در آن کنترل وضعیت سه محوره فضایی مجهز به چرخ‌های عکس‌العملی بیان می‌شود. خطی‌سازی ژاکوبی این معادله حول نقاط تعادل ($\omega_{eq} = 0, \dot{\omega}_{eq} = 0$) منجر به سیستم خطی پارامتر متغیر دینامیک‌های فضایی می‌شود. معادله دینامیکی یک فضایپایما با چرخ‌های عکس‌العملی و سینماتیکی بر اساس کواترنیون مانند زیر داده شده است. اگر خطی‌سازی به صورت زیر انجام شود:

$$A(\sigma) = \left. \frac{\partial f}{\partial \omega} \right|_{\omega_{eq}, \dot{\omega}_{eq}}, B(\sigma) = \left. \frac{\partial f}{\partial \Omega} \right|_{\omega_{eq}, \dot{\omega}_{eq}} \quad (۲۲)$$

$$\begin{cases} \dot{\omega} = A(\sigma)\omega + Bu_p \\ \dot{q}_e = \frac{1}{2} \tilde{G}(\bar{q}_e)\omega \end{cases}, \tilde{G}(\bar{q}_e) = (q_4 e I_3 + \bar{q}_e^\times) \quad (۲۳)$$

$$A(\sigma) = I^{-1}(I_{RW} P_s \Omega)^\times \quad (۲۴)$$

که $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ بردار حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ بردار ورودی و $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ بردار خروجی و $A(\sigma(t)), B(\sigma(t)), C(\sigma(t)), D(\sigma(t))$ ماتریس‌های متغیر با ابعاد متناسب هستند و $\sigma(t) \in \mathbb{R}^{n_\sigma}$ بردار پارامترهای متغیر است که می‌تواند برون‌زا^{۱۵} یا درون‌زا^{۱۶} (که در این حالت سیستم شبه-خطی پارامتر متغیر خوانده می‌شود) باشد و مقادیری در محدوده $\Theta \subset \mathbb{R}^{n_\sigma}$ یعنی به صورت $\sigma(t) \in \Theta$ خواهد داشت.

نمایش رایج برای سیستم‌های خطی پارامتر متغیر به صورت پولیتوپ محدب^{۱۷} یا شبه خطی (افاین)^{۱۸} و به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}; \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \quad (۱۴)$$

نمایش سیستم به صورت یک پولیتوپ افاینرا می‌توان یک حالت کلی‌تر از نمایش پولیتوپ محدب در نظر گرفت. در واقع هر پولیتوپ محدب را می‌تواند به یک پولیتوپ افاین معادل تبدیل شود ولی عکس آن برقرار نیست. ماتریس A به صورت افاین به متغیر نامعین σ وابسته است و داریم:

$$A(\sigma) = A_0 + \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 + \dots + \sigma_p A_p \quad (۱۵)$$

به پوسته‌ای از ماتریس‌های هم بعد A_i پولیتوپ گویند. به عبارت دیگر پولیتوپ ماتریس‌های A_i عبارت است از:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \{A_1 \lambda_1 + \dots + A_p \lambda_p \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda_i > 0\} \\ \sigma &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p) \sigma \in R^p \end{aligned} \quad (۱۶)$$

در اینجا $[\lambda_1, \dots, \lambda_p]^T$ برداری از پارامترهای λ_i است. یک ترکیب افاین از ماتریس‌ها را می‌توان به شکل زیر نشان داد [۱۴]:

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda_1 + \dots + A_p \lambda_p \quad (۱۷)$$

میدان پلی‌تاپیک فضایی متشکل از چند گوشه است که با اطمینان بتوان گفت تمام مقادیر ممکن پارامتر جدول بندی σ در داخل این فضا قرار دارد. حال اگر هدف بیان این باشد که متغیر σ متعلق به یک میدان چندوجهی با N گوشه است به این صورت بیان خواهد شد [۱۵]:

$$\sigma = Co\{\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^N\} \quad (۱۸)$$

یک سیستم LPV زمانی پلی‌تاپیک نامیده می‌شود که بتوان آن را توسط ماتریس‌های $A(\sigma(t)), B(\sigma(t)), C(\sigma(t)), D(\sigma(t))$ بیان کرد که $\sigma(t)$ در محدوده ثابت پلی‌تاپ θ قرار

12. Vertex Systems
13. Taylor-series
14. Linear Time Invariant

8. Exogenous
9. Endogenous
10. Convex Polytope
11. Affine

بعد از این عملیات تعداد گوشه‌ها به $2^3 = 8$ کاهش پیدا می‌کند. با قراردادن $p=8$ به‌عنوان تعداد گوشه‌ها، سیستم خطی پارامتر متغیر به صورت نمایش پلی‌تاپیک زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p(\sigma) \in Co\{\tilde{A}_{p1}, \tilde{A}_{p2}, \dots, \tilde{A}_{pp}\} \\ = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i(\sigma) \tilde{A}_{ei}; \lambda_i(\sigma) \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i(\sigma) = 1 \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

پس، کنترل‌کننده بهره جدول‌بندی مدل ساده خطی پارامتر متغیر در معادله (۲۸) به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\sigma) \in Co\{\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \dots, \tilde{K}_p\} \\ = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i(\sigma) \tilde{K}_i; \lambda_i(\sigma) \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i(\sigma) = 1 \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

اکنون، یک کنترل‌کننده بهره جدول‌بندی، $\tilde{K}(\sigma)$ وجود دارد که پایداری کلی را تضمین می‌کند و به عملکرد H_2 برای مدل ساده خطی پارامتر متغیر در معادله (۲۹) می‌رسد. در ابتدا، سیستم بدست آمده برای معادله (۲۹) تعریف شده به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_p(\sigma, \bar{q}_e) \tilde{x} + B_e u \\ z = C \tilde{x} + Du \end{cases} \quad (33)$$

که $\tilde{K}(\sigma)$ ماتریس بهره فیدبک است [۱۶].

آنالیز مدل خطی پارامتر متغیر

در این مقاله برای آنالیز از لیاپانوف معمولی و شرط نامساوی‌های خطی ماتریسی و عملکرد H_2 استفاده شده که ساده‌ترین روش برای آنالیز سیستم‌های خطی پارامتر متغیر بر اساس تابع معمولی لیاپانوف است. عملکرد H_2 یک سیستم خطی پارامتر متغیر ساده به صورت زیر است [۱۶]:

$$z_2(t) = C_{z_2}(\rho(t))x(t) \quad (34)$$

اگر $P > 0$ و $Y(\sigma) \in \mathbb{S}^{n_{z_2} \times n_{z_2}}$ به صورت $Tr(Y(\sigma)) < 0$ و $\forall \sigma \in \theta$ وجود داشته باشد و شروط نامساوی خطی ماتریسی به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} A(\sigma)^T P + PA(\sigma) & B_w(\sigma) \\ B_w(\sigma)^T & -I \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \sigma \in \theta$$

$$\begin{pmatrix} Y(\sigma) & C_{z_2}(\sigma) \\ C_{z_2}(\sigma)^T & P \end{pmatrix} > 0 \quad \forall \sigma \in \theta \quad (35)$$

با توجه به اینکه سیستم خطی پارامتر متغیر پایدار شده درجه دو است، اگر $P > 0$ وجود داشته باشد، یک تابع ماتریسی $K(\sigma) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ وجود دارد به طوری که:

$$He\{A(\sigma)P + B(\sigma)K(\sigma)P\} < 0, \quad \forall \sigma \in \theta \quad (36)$$

$$B = -I_{RW}I^{-1}P_s$$

بردار ورودی کنترل u_p برابر با بردار نرخ سرعت زاویه ای Ω است. با متغیر حالت $x_p := [\omega^T \bar{q}_e^T]^T$ و بیان فضا-حالت معادله (۲۳) به صورت معادله (۲۵) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\bar{q}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\sigma) & 0_{3 \times 3} \\ \frac{1}{2} \tilde{G}(\bar{q}_e) & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \bar{q}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{3 \times 4} \end{bmatrix} u_p \quad (25)$$

به جهت سادگی داریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_s(\sigma)x_p + B_s u_p \\ y &= C x_p(t) + D u_p(t) \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگذاری $\tilde{G}(\bar{q}_e)$ توسط پوسته محدب با پارامتر جدول‌بندی \bar{q}_e معادله (۲۴) را به‌عنوان سیستم خطی پارامتر متغیر می‌توان مدل‌سازی کرد. در این مسئله تعداد کلی پارامتر جدول‌بندی $6 \times 3 = 18$ است و تعداد کلی گوشه‌های پوسته محدب $2^6 = 64$ است. بنابراین، طراحی یک کنترل‌کننده بهره جدول‌بندی به دلیل افزایش تعداد پارامترهای جدول‌بندی دشوار است.

طراحی کنترل‌کننده برای دستگاه خطی پارامتر متغیر

معادله (۲۶) هنوز یک سیستم خطی پارامتر متغیر نشده است. پس به منظور جلوگیری از افزایش تعداد پارامترهای جدول‌بندی در این بخش می‌توان با حذف بردار پارامتر جدول‌بندی \bar{q}_e در معادله (۲۵) از ماتریس ضرایب، تعداد پارامترهای جدول‌بندی را کاهش داد. با معرفی یک متغیر حالت مجازی v به طوری که $v = \tilde{G}(\bar{q}_e)^{-1} \bar{q}_e$ مدل خطی پارامتر متغیر که برای طراحی یک کنترل‌کننده آسان به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\sigma) & 0_{3 \times 3} \\ 0.5 I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{3 \times 4} \end{bmatrix} u_p \quad (27)$$

$$\tilde{A}_p(\sigma) := \begin{bmatrix} A(\sigma) & 0_{3 \times 3} \\ 0.5 I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$B_s := \begin{bmatrix} B \\ 0_{3 \times 4} \end{bmatrix}$$

اگر $\tilde{x}_p := [\omega^T v^T]^T$ باشد، در نهایت سیستم خطی پارامتر متغیر به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_p &= \tilde{A}_p(\sigma) \tilde{x}_p + B_p u_p \\ y &= C \tilde{x}_p(t) + D u_p(t) \end{aligned} \quad (29)$$

که ماتریس‌های ضرایب $C \in \mathbb{R}^{10 \times 6}$ و $D \in \mathbb{R}^{10 \times 4}$ به صورت $C^T D = 0, D^T D > 0$ است. برای این سیستم خطی پارامتر متغیر کنترل‌کننده بهره جدول‌بندی فیدبک-حالت به دست می‌آید:

$$u = -\tilde{K}(\sigma) \tilde{x} \quad (30)$$

\bar{X} ضرب شده و با اعمال کردن Schur Complement که به صورت زیر است و شرط نامساوی خطی ماتریسی نتیجه خواهد داد:

$$Q_{11} < 0, Q_{22} - Q_{12}Q_{11}^{-1}Q_{12}^T < 0 \quad (45)$$

یا
برابر با ماتریس زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (46)$$

سپس، به شرایط نهایی نامساوی خطی ماتریسی زیر تبدیل می‌شوند:

برای عملکرد H_2 داریم:

$$\inf_{\bar{W}_i, \bar{X}, \bar{Z}} [Trace(\bar{Z})] \text{ subject to} \quad (47)$$

$$\Psi_{H_2} > 0, \Psi'_{H_2} < 0$$

به طوری که،

$$\Psi'_{H_2} = \begin{bmatrix} (\bar{A}_{ei}\bar{X} - B_e\bar{W}_i) + (\bullet)^T & * \\ C\bar{X} - D\bar{W}_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

$$\Psi_{H_2} = \begin{bmatrix} \bar{X} & * \\ E^T & \bar{Z} \end{bmatrix} > 0$$

در نهایت داریم:

$$\inf_{\bar{W}_i, \bar{X}, \bar{Z}} [Trace(\bar{Z})] \text{ subject to} \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}_{ei}\bar{X} - B_e\bar{W}_i) + (\bullet)^T & * \\ C\bar{X} - D\bar{W}_i & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \bar{X} & * \\ E^T & \bar{Z} \end{bmatrix} > 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq p$$

با استفاده از وارد کردن دسته پاسخهای بهینه \bar{W}_i, \bar{X} به مسئله

معادله (۴۴) و (۴۵)، کنترلکنندههای اکستریم زیر را داریم:

$$\bar{K}_i = \bar{W}_i \bar{X}^{-1} \quad 1 \leq i \leq p \quad (50)$$

با جایگذاری (۵۰) در شرط (۴۸) درایه اول به صورت زیر است:

$$(A) + (A)^T \quad (51)$$

پس

$$(\bar{A}_{ei}\bar{X} - B_e\bar{W}_i)^T = (\bullet)^T \quad (52)$$

و درایه‌های $C\bar{X} - D\bar{W}_i = *$ در معادله (۴۹) در قسمت دوم و درایه $E = *$ در قسمت سوم جایگذاری می‌شوند.

نتایج شبیه‌سازی عددی

به منظور مقایسه و بررسی روش کنترلی معرفی شده در این مقاله با روش‌های LQR و PD، شبیه‌سازی‌هایی به کمک نرم افزار متلب

و مدل تبدیل به حالت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B_w(\sigma(t))w(t) \\ &\quad + B(\sigma(t))u(t) \end{aligned} \quad (37)$$

$$z_2(t) = C_{z_2}(\sigma(t))x(t) + D_{z_2}(\sigma(t))u(t)$$

که عملکرد H_2, γ_2 است. اگر $Q > 0$ و یک تابع ماتریس $K(\sigma) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ و $Y(\sigma) \in \mathbb{S}^{n_u \times n_x}$ به طوری که $Tr(Y(\sigma)) < \gamma_2^2, \forall \sigma \in \theta$ وجود داشته باشد و در نهایت به شروط نامساوی خطی ماتریسی منجر خواهد شد:

$$\begin{aligned} (He\{A(\sigma)Q + B(\sigma)K(\sigma)Q\} \quad B_w(\sigma)) &< 0 \quad \forall \sigma \in \theta \\ (Y(\sigma) \quad C_{z_2}(\sigma)Q + D_{z_2}(\sigma)K(\sigma)Q) &> 0 \quad \forall \sigma \in \theta \end{aligned} \quad (38)$$

با استفاده از روش پلی‌تاپیک می‌توان قیدهای نامحدود را به تعداد محدود کاهش داد که مورد نظر این مقاله است. در این مورد، فرض می‌شود که ماتریس‌های $B_w(\sigma(t)), A(\sigma(t))$

و $C_{z_2}(\sigma(t)), W(\sigma(t))$ پلی‌تاپیک هستند و داریم:

$$\begin{pmatrix} A(\sigma(t)) \\ B_w(\sigma(t)) \\ C_{z_2}(\sigma(t)) \\ W(\sigma(t)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \lambda_i(\sigma(t)) \begin{pmatrix} A_i \\ B_{w,i} \\ C_{z_2,i} \\ W_i \end{pmatrix} \quad (39)$$

به طوری که:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(\sigma(t)) = 1, \lambda_i(\sigma(t)) \geq 0, \forall i = 1, \dots, N, \forall \sigma \in \theta \quad (40)$$

اگر سیستم زیر را داشته باشیم [۱۶]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t) \\ &\quad + B_w(\sigma(t))w(t) \end{aligned} \quad (41)$$

$$z_2(t) = C_{z_2}(\sigma(t))x(t) + D_{z_2}(\sigma(t))u(t)$$

معادله به فرم مطلوب درمی‌آید که در مسئله فعلی به صورت زیر خواهد بود و اغتشاش ورودی یعنی $w(t)$ برابر صفر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + Bu(t) \\ z_2(t) &= C_{z_2}x(t) + D_{z_2}u(t) \end{aligned} \quad (42)$$

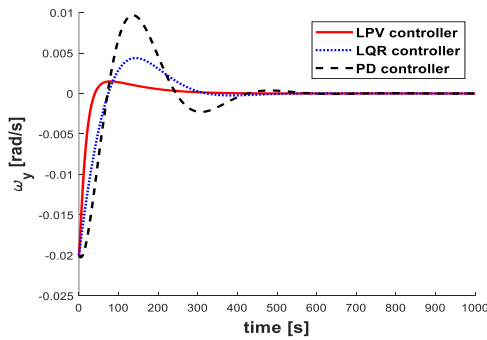
نتایج از نظریه‌های قبلی به دست می‌آیند که قانون کنترلی فیدبک-حالت پلی‌تاپیک زیر را در نظر دارد [۱۶]:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(\sigma(t)) K_i x(t) \quad (43)$$

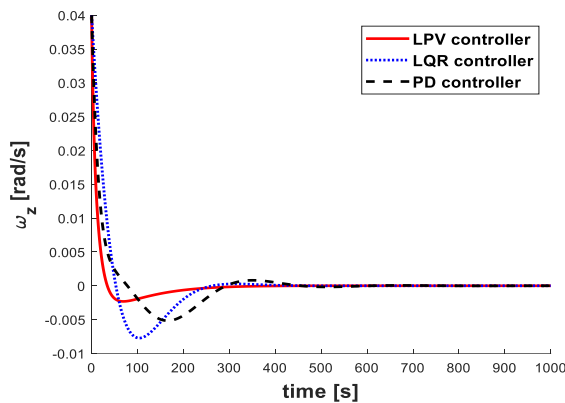
در مسئله فیدبک حالت خطی، کنترلکننده این پژوهش توسط مسئله برنامه‌ریزی زیر طراحی می‌شود:

$$\begin{aligned} \inf [Trace(p)] \text{ subject to} \\ \exists p > 0, (\bar{A}_{ei} - B_e \bar{K}_i)p + p(\bar{A}_{ei} - B_e \bar{K}_i)^T \leq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

اما مسئله بهینه غیرمحدب می‌شود، بنابراین باید به یک مسئله محدب تبدیل شود. برای این کار در طرفین معکوس ماتریس لیاپانوف یعنی $P^{-1} =$

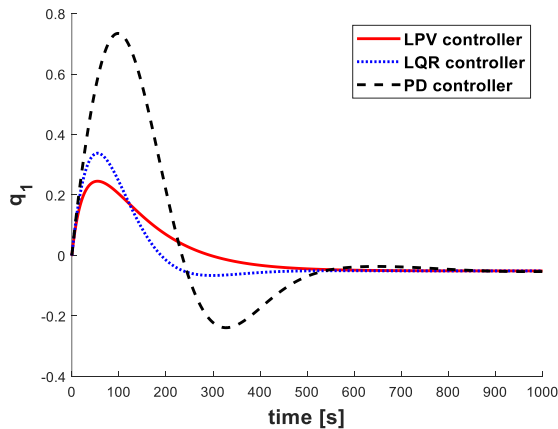


شکل ۳- مقایسه سرعت زاویه‌ای در راستای محور γ بین سه روش PD, LQR, LPV



شکل ۴- مقایسه سرعت زاویه‌ای در راستای محور γ بین سه روش LPV, PD و LQR

در شکل‌های (۵) تا (۱۱) برای روش LPV نسبت به روش‌های دیگر جهش و تلاش کنترلی کمتری مشاهده و وضعیت هر لحظه فضاپیما در انتها بر وضعیت نهایی مطلوب آن منطبق شده است. در شکل‌های (۵) تا (۸) مقادیر نهایی به صورت کواترنیون و همچنین در شکل‌های (۹) تا (۱۱) در قالب زوایای اولر برای مقادیر مطلوب ۱ قابل مشاهده است.



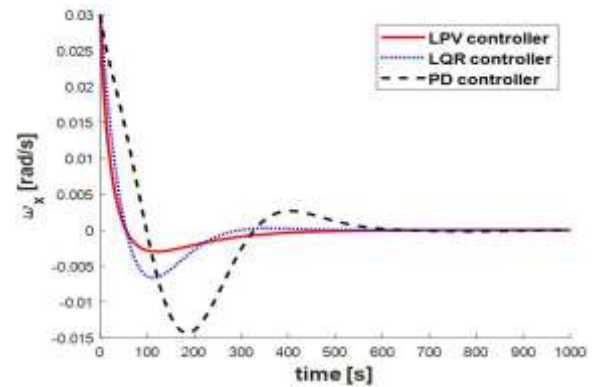
شکل ۵- مقایسه مقدار کواترنیون q_1 بین سه روش PD, LQR, LPV

انجام شده که نتایج و خروجی‌های آن‌ها در قالب نمودار ارائه می‌شود. مشخصات فضاپیما و مقادیر مطلوب به صورت جدول (۱) داده شده و فرض صلبیت نیز برای فضاپیما در نظر گرفته شده است. مشخصات مکانیکی هر چهار چرخ عکس‌العملی مشابه یکدیگر می‌باشد. در این پژوهش نتایج برای سه روش LPV, LQR و PD به دست آمده و مقایسه خواهند شد. مقادیر کواترنیون، زوایای اولر و سرعت زاویه‌ای $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ در نهایت محاسبه می‌شوند. مقادیر اولیه و مطلوب جهت‌گیری فضاپیما به صورت زوایای اولر بیان و محاسبات با مقادیر کواترنیون انجام شده است.

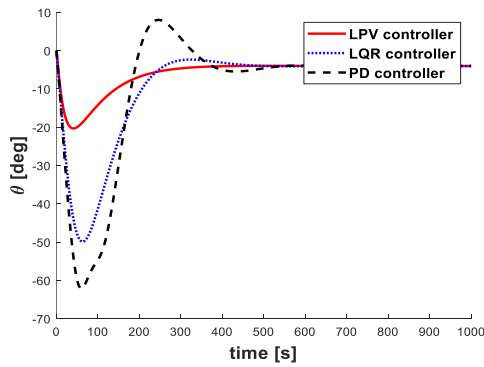
همان‌طور که از شکل‌های (۲) تا (۴) مشخص است، سرعت‌های زاویه‌ای پس از مدت زمانی از مقادیر اولیه خود به مقدار صفر همگرا شده‌اند. در این نمودارها در ابتدا فراجهش و فروجهش‌هایی دیده می‌شود که با سرعت با روش LPV از بین رفته و نمودارها به صفر همگرا شده‌اند و همچنین کوتاه بودن دامنه و کمتر بودن تعداد جهش‌ها در این روش واضح دیده می‌شود.

جدول ۱- پارامترهای شبیه‌سازی و مطلوب

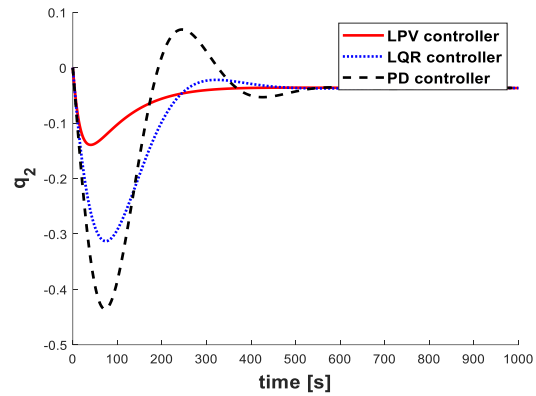
واحد	مقدار	پارامتر
$[Kg\ m^2]$	diag[10 10 8]	ماتریس اینرسی فضاپیما I
$[Kg\ m^2]$	0.002	ماتریس‌های اینرسی محور چرخش چرخ‌های عکس‌العملی I_{RW}
$\frac{rad}{s}$	$[0.03 - 0.02 0.04]^T$	بردار سرعت زاویه‌ای اولیه فضاپیما ω_0
-	$[0 0 0]^T$	زوایای اولر اولیه
-	$[4 - 4 - 6]^T$	زوایای اولر مطلوب حالت ۱
-	$[40 - 40 - 60]^T$	زوایای اولر مطلوب حالت ۲



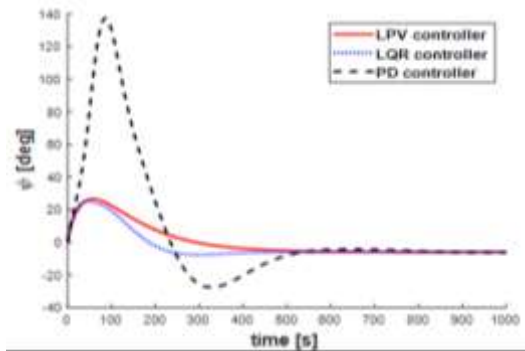
شکل ۶- مقایسه سرعت زاویه‌ای در راستای محور x بین سه روش PD, LQR, LPV



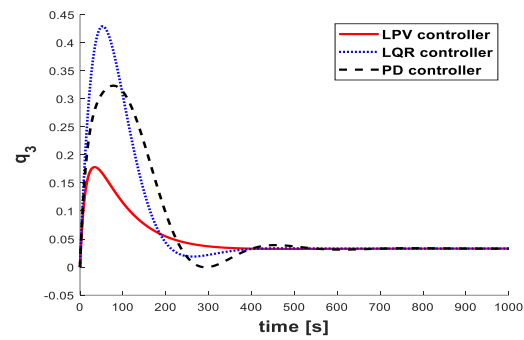
شکل ۱۰- مقایسه مقدار θ بین سه روش LPV، LQR و PD



شکل ۶- مقایسه مقدار کوانتریون q_2 بین سه روش LPV، LQR و PD

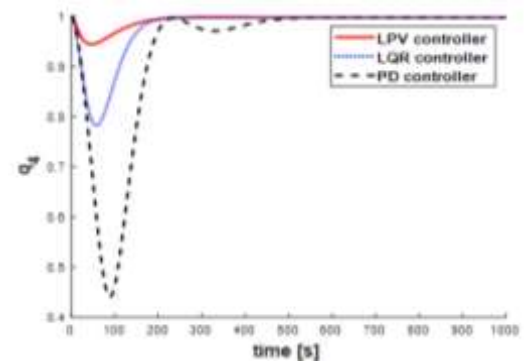


شکل ۱۱- مقایسه مقدار ψ بین سه روش LPV، LQR و PD

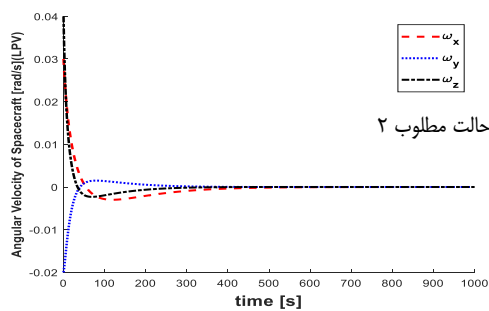


شکل ۷- مقایسه مقدار کوانتریون q_3 بین سه روش LPV، LQR و PD

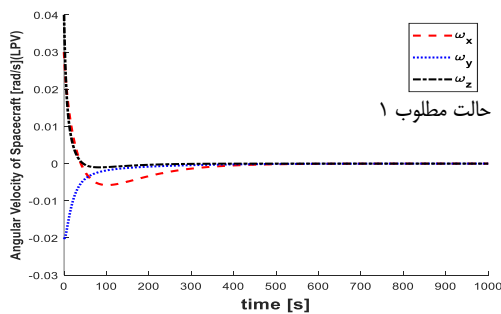
در نهایت جهت بررسی عملکرد سیستم با استفاده از روش LPV ارائه شده در این مقاله زمانی که مانورها بزرگتر باشد، مسئله کنترل وضعیت فضاپیما با مقادیر اولیه و نهایی مطلوب ۲ در جدول (۱) بررسی می‌شود. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های (۱۲) تا (۱۴) مقایسه شده‌اند و نشان داده شد که سیستم در مانورهای بزرگ وضعیت یعنی حالت دوم از مانورهای کوچک وضعیت یعنی حالت ۱ بهتر عمل می‌کند.



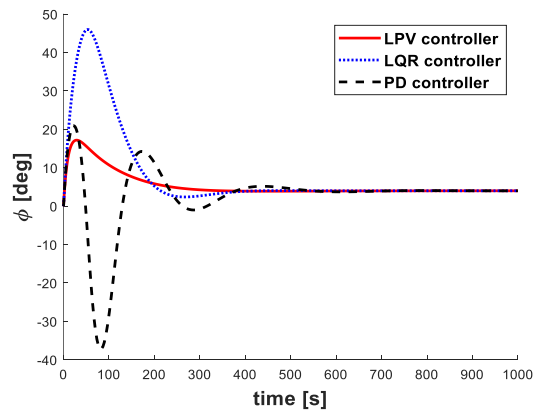
شکل ۸- مقایسه مقدار کوانتریون q_4 بین سه روش LPV، LQR و PD



حالت مطلوب ۲



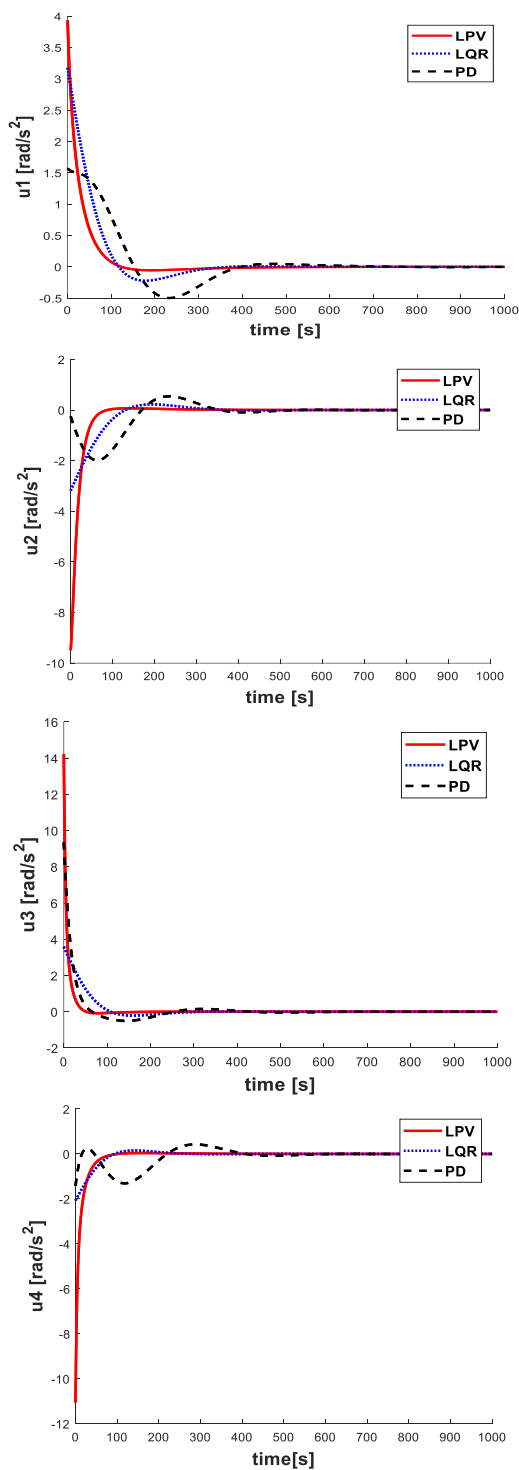
حالت مطلوب ۱



شکل ۹- مقایسه مقدار ϕ بین سه روش LPV، LQR و PD

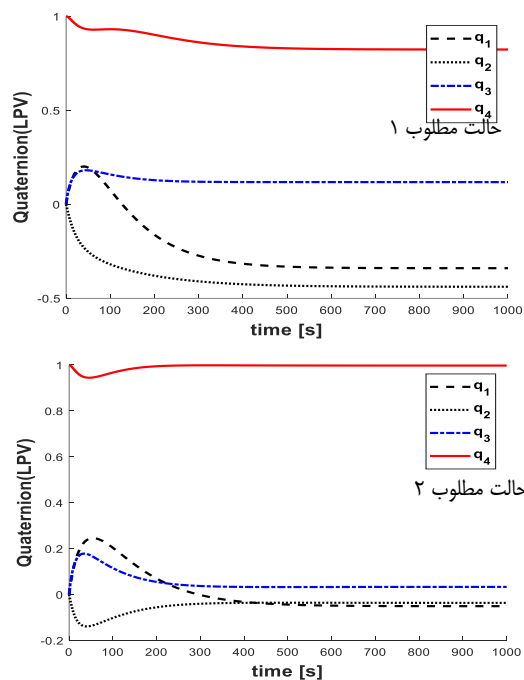
شکل ۱۲- مقایسه همگرایی سرعت زاویه‌ای در مانورهای کوچک و بزرگ

در شکل (۱۵) نتایج فرمان‌های تولید شده توسط سه کنترلر برای چهار چرخ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش پیشنهادی در مقایسه با دو روش دیگر از لحاظ عملکرد تلاش کنترلی و فراجهش مناسب‌تر است. تلاش کنترلی کمتر روش پیشنهادی و فراجهش کمتر از لحاظ کاربردی در عمل حائز اهمیت است، زیرا که در فضا منابع انرژی فضاپیما محدود است.

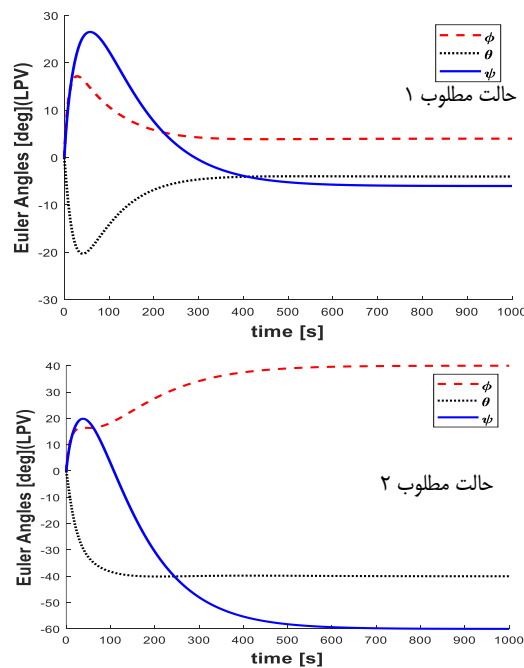


شکل ۱۵- مقایسه فرمان‌های کنترلی

همان‌طور که در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود با استفاده از سیستم در روش LPV، جهش کمتری در همگرایی سرعت‌های زاویه‌ای در رسیدن به مقادیر مطلوب ۲ دیده می‌شود و سیستم عملکرد بهتری دارد. این موضوع در منطبق شدن مقادیر کواترنیون و زوایای اولر نیز مطابق با شکل‌های (۱۳) و (۱۴) کاملاً مشهود است و نشان داده می‌شود که این روش در مانورهای کوچک بهتر از مانورهای بزرگ عمل می‌کند.



شکل ۱۳- مقایسه منطبق شدن مقادیر کواترنیون در مانورهای کوچک و بزرگ



شکل ۱۴- مقایسه منطبق شدن زوایای اولر در مانورهای کوچک و بزرگ

نتیجه گیری

در این مقاله به شبیه‌سازی کنترل وضعیت فضاپیما با روش کنترلی LPV پرداخته شد. برای مقایسه این روش، دینامیک معرفی شده برای روش‌های PD و LQR نیز شبیه‌سازی شدند. پس از تجزیه و تحلیل و نمایش نتایج شبیه‌سازی نشان داده شد که عملکرد این روش مناسب‌تر از دیگر روش‌های معرفی شده است و می‌تواند جایگزین خوب و مطلوبی در برابر کنترل پارامترهای متغیر با زمان در دینامیک سیستم فضاپیما باشد.

پیوست ۱

پارامترهای طراحی نیز به صورت زیر است که ماتریس‌های $\tilde{A}_p(\sigma)$ و B_p ماتریس‌های کنترل پذیر و C مشاهده پذیر هستند.

$$B_p = \begin{bmatrix} B \\ 0_{3 \times 4} \end{bmatrix} \quad (۵۴)$$

$$C = \begin{bmatrix} 15 \times I_3 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_3 \\ 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \end{bmatrix} \quad (۵۵)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 4} \\ 20 \times I_4 \end{bmatrix} \quad (۵۶)$$

تعارض منافع

هیچگونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است.

مراجع

- [4] F. Wu, "Control of linear parameter varying system," *University of California, Berkeley ProQuest Dissertations Publishing*, 1995.
- [5] A. K. Packard, G. J. Balas, W. Tan, "Quasi-lpv modeling and lpv control of a generic missile", *American Control Conference*, Chicago, Illinois, USA, June 2000.
- [6] F. Wu, S. Wan Kim, B. Lu, "Switching lpv control of an f-16 aircraft via controller state reset", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 14, no. 2, pp. 267-77, 2004.
- [7] B. Wain Patterson, "A linear parameter varying control methodology for reduction of helicopter higher harmonic vibration", *Massachusetts Institute of Technology*,
- [8] X. He, Y. Leng, Y. Zhang, "Fault tolerant control with switched lpv method based on hysteresis strategy and an application to a microsatellite model", *34th Chinese Control Conference*, Hangzhou, China, July 28-30, 2015
- [9] J. Marc Biannic, Ch. Pittet, L. Lafourcade, Clément Roos, "LPV analysis of switched controllers in satellite attitude control systems", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Toronto, Ontario Canada, 2 - 5 August 2010.
- [10] S. Bennani, A. Marcos, Ch. Roux, D. Navarro Tapia, "Structured h-infinity and linear parameter varying control design for the vega launch vehicle", *7th European Conference for Aeronautics and Aerospace Science*, 2017.
- [11] Guzmán Borque Gallego, Emmanuel Onillon, Alireza Karimi, "Linear parameter-varying kalman filter for angular velocity estimation of a reaction sphere actuator for satellite attitude control", *IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Munich, Germany, July 3-7, 2017.
- [12] R. Jin, Z. Hou, Yunhai Geng, Xueqin Chen, "LPV gain-scheduled attitude control for satellite with time-varying inertia", *Elsevier*, 2018.
- [13] B.J. Bacon, "Quaternion based control architecture for determining controllability/maneuverability limits" *Guidance, Navigation, and Control and Colocated Conferences, AIAA*. Vol. 5028, 2012.
- [14] F. Bruzelius, "Linear parameter-varying systems, an approach to gain-scheduling", *Chalmers University of Technology*.
- [15] R. Toth, *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [16] D. Rotondo, *Advances in gain-scheduling and fault tolerant control techniques*, Springer; 2017.
- [1] M. J. Sidi, *Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach*, Vol. 7. Cambridge university press, 1997.
- [2] H. Hughes and F. Wu. *Optimal control for spacecraft large angle maneuvers using H_∞ linear varying parameter control techniques*. Diss. (Master's thesis), North Carolina State University, 2006.
- [3] S. Jeff, Shamma, *Analysis and design of gain scheduled control systems*, Diss. Massachusetts Institute of Technology, 1988.