Archive of SID.ir

Scientific Journal of Passive Defence
Vol. 15, No. 1, Spring 2024, Serial No. 57
ISSN: 2980-8030 , E-ISSN: 2008-6849

Application of Mathematical Model in Biological Passive Defense: Simulation of Pollution Flow in Groundwater

H. Eimani kalehsar* , Y. Talaei

* Associate Professor, Civil Engineering Department, Engineering Faculty, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

(Received: 16/06/2023, Revised: 06/08/2023, Accepted: 28/01/2024, Published: 04/05/2024)
DOR:20.1001.1.20086849.1403.15.1.3.0

ABSTRACT

Pollution of water resources poses a significant and fundamental challenge to human life and the well-being of all living organisms. The presence of management gaps in this critical area creates vulnerabilities for potential bioterrorist attacks and contamination of water sources. An essential and practical approach to managing groundwater resources, particularly in identifying the time and location of pollutant releases into water, involves the utilization of mathematical models governing pollutant flow. Compared to other practical methods, mathematical modeling offers a reliable and cost-effective solution that is computationally feasible. The primary objective of this research is to simulate the initial pollutant intensity function (at t=0) through a mathematical backward in time inverse problem. This issue stands as one of the foremost challenges in water resources management and engineering, garnering significant attention from researchers. In this study, initially, a mathematical model of pollutant flow in groundwater is presented, where the initial pollutant intensity function is unknown. Then, a new numerical method based on the pseudo-solution method is employed to calculate an approximation for this function using a linear combination of Bernstein polynomials. The mathematical model is numerically analyzed and scrutinized through a specific example .The numerical results indicate that the initial pollutant intensity function can be precisely simulated by utilizing the pollutant intensity function at any time t>0. For an error level of δ=0.01 in the input data, the approximate solution obtained through the introduced numerical method exhibits a maximum error of 4%.

Keywords: Groundwater Pollution, Simulation of Intensity Pollution Function, Inverse Problem, Passive Defense

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

Publisher: Imam Hussein University © Authors

* Corresponding Author Email: hek@uma.ac.ir

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

نشریه علمی پدافند غیرعامل

سال پانزدهم، شماره ۱، بهار ۱۴۰۳، (پیاپی ۵۷): صص ۳۶-۲۹

علمی – پژوهشی

شاپای چاپی: ۶۹۴۹-۲۰۰۸ | شاپای الکترونیکی: ۸۰۳۰-۲۹۸۰

کاربرد مدل ریاضی در پدافند غیرعامل زیستی: شبیه‌سازی جریان آلاینده در آب‌های زیرزمینی

هوشیار ایمانی کله سر[1*]، یونس طالعی[2]

DOR: 20.1001.1.20086849.1403.15.1.3.0

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۰۸

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۵/۱۵ تاریخ انتشار: ۱۴۰۳/۰۲/۱۵

چکیده

آلودگی منابع آبی یکی از چالش‌های مهم و اساسی زندگی انسان و رفاه همه موجودات زنده است. وجود شکاف‌های مدیریتی در این منطقه حیاتی، آسیب‌پذیری‌هایی را برای حملات بالقوه بیوتروریستی و آلودگی منابع آب ایجاد می‌کند. یک رویکرد ضروری و عملی برای مدیریت منابع آب زیرزمینی، به ویژه در شناسایی زمان و مکان انتشار آلاینده‌ها در آب، شامل استفاده از مدل‌های ریاضی حاکم بر جریان آلاینده است. در مقایسه با سایر روش های عملی، مدل‌سازی ریاضی راه حل قابل اعتماد و مقرون به صرفه‌ای را ارائه می‌دهد که از نظر محاسباتی امکان پذیر است. هدف اصلی این تحقیق شبیه‌سازی تابع شدت آلاینده اولیه (در t=0) از طریق یک مسئله معکوس ریاضی در زمان معکوس است. این موضوع به عنوان یکی از مهمترین چالش‌ها در مدیریت و مهندسی منابع آب می‌باشد که توجه محققین را به خود جلب کرده است. در این تحقیق، ابتدا یک مدل ریاضی از جریان آلاینده در آب‌های زیرزمینی ارائه می‌شود، که در آن تابع شدت آلاینده اولیه مجهول است. سپس، یک روش عددی جدید بر اساس روش شبه جواب (pseodu-solution method)، تقریبی برای این تابع با استفاده از ترکیب خطی چند جمله‌ای‌های برنشتاین محاسبه می‌شود. مدل ریاضی با یک مثال بصورت عددی تحلیل و بررسی می‌شود. نتایج عددی بدست آمده نشان می‌دهد که با استفاده تابع شدت آلاینده در هرلحظه t>0، می‌توان تابع شدت آلاینده اولیه را با دقت بالا شبیه‌سازی کرد. برای سطح خطای δ=0.01 در داده‌های ورودی، جواب تقریبی به دست آمده از طریق روش عددی معرفی شده، حداکثر خطای ۴ درصد را نشان می‌دهد.

کلیدواژه‌ها: آلودگی آب‌های زیرزمینی، شبیه‌سازی تابع شدت آلاینده، مسئله معکوس، پدافند غیرعامل

[1] دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران (hek@uma.ac.ir)- نویسنده مسئول

[2] دکتری تخصصی ریاضیات کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

* این مقاله یک مقاله با دسترسی آزاد است که تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY) توزیع شده است.

©نویسندگان

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

۱- مقدمه

آب‌های زیرزمینی یکی از مهم‌ترین منبع تأمین آب شیرین و زیرساخت‌های کلیدی هر کشوری محسوب می‌شود. دسترسی به آب آشامیدنی سالم، به‌عنوان یکی از نیازهای حیاتی جوامع در مقابل حملات تروریستی آسیب‌پذیر است، لذا حفظ و نگهداری آن‌ها ضروری است. گاهی دشمن از طریق حملات فیزیکی قادر به آسیب رساندن نیست، لذا با انجام عملیات تخریبی یا آلوده سازی، چاه‌های شرب و منابع تأسیسات آبی را مورد حمله قرار دهد که منجر به خسارات بسیار سنگین می‌شود [۱]. آلودگی آب، عبارت است از هرگونه تغییر فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی در محیط آب به‌گونه‌ای زیان‌بار که بر سلامت، بقا و فعالیت‌های انسان، حیوان، گیاهان و سایر موجودات زنده تأثیر می‌گذارد [۲]. به‌عنوان‌مثال، یک حمله تروریستی یا بیوتروریستی که منجر به آلودگی منابع آبی می‌شود، ممکن است صدها نفر را کشته و بیمار کرده و باعث بروز شرایط بحرانی در جامعه شود. تلفات انسانی ناشی از حملات تروریستی مرتبط با آب، آثار روانی بر جمعیت استفاده‌کنندگان گذاشته و امنیت جامعه را خدشه‌دار می‌کند. اعتماد مردم نسبت به مسئولین صنعت آب ضعیف می‌شود به‌نحوی‌که جبران آن ممکن است ماه‌ها زمان بخواهد. به‌عنوان نمونه می‌توان به آثار تذکر وزیر محترم بهداشت در سال ۱۳۸۸ در خصوص بالاتر بودن غلظت نیترات آب آشامیدنی از حد استاندارد در بعضی مناطق تهران و افزایش خطر مصرف آن توسط شیرخواران اشاره نمود. این مطلب بشدت مورد سوءاستفاده شرکت‌های فروشنده آب‌های معدنی بطری شده قرار گرفت و جمعیت ده‌میلیونی تهران اقدام به خرید این آب‌ها برای مصارف شرب خود نمودند و این هزینه زندگی شهروندان را بالا می‌برد. اگر حادثه‌ای بیوتروریستی در خصوص آلودگی آب مصرفی کلان‌شهری مثل تهران اتفاق افتد، آثار و عوارض آن به‌سادگی قابل‌کنترل نبوده و به‌طور یقین به یک بحران امنیتی اجتماعی تبدیل می‌شود و دشمن با حربه تبلیغات مسموم خود آثار روحی و روانی این حمله تروریستی را دامن خواهد زد، لذا همیشه آب، یک هدف ایده آل برای یک حمله تروریستی است و به‌کارگیری بالاترین سطح حفاظتی برای سامانه‌های تأمین آب ضروری است، لذا لازم است با ارائه راهکارهای امنیتی-دفاعی هرگونه تهدید مرتبط با سامانه‌های آب‌رسانی به‌موقع شناسایی و کشف و گزارش شود [۳]. ازجمله فعالیت‌های خرابکارانه دشمن علیه سامانه‌های آب‌رسانی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۴]:

الف- **تخریب فیزیکی سامانه‌ها:** این اقدام منجر به قطع آب‌رسانی به علت ایجاد خرابی تأسیسات و تجهیزاتی مثل پمپ‌ها، کلریناتورها[۱]، رایانه‌ها و ساختمان‌ها می‌شود.

ب-**آلودگی عمدی شیمیائی**: کیفیت آب را در مخازن و شبکه توزیع تحت تأثیر قرار دهد.

ج- **حملات بیوتروریستی**: شامل ایجاد آلودگی عمدی در تصفیه‌خانه‌های آب، چاه‌ها و منابع آب زیرزمینی و شبکه توزیع آب می‌باشند.

قوانین و مقررات راجع به جلوگیری از آلودگی منابع آب در اصل ۵۰ قانون اساسی، سند چشم‌انداز و دیگر قوانین و مقرراتی که در کشور به‌منظور حفاظت از محیط زیست تصویب شده است، نشان‌دهنده توجه جدی دولتمردان و مردم به این موضوع است [۵]. برنامه‌های در نظر گرفته‌شده برای جلوگیری از خرابکاری در منابع آبی باید بر اساس پیشگیری، ردیابی منبع انتشار آلاینده و مقابله با آن باشد. در تمام این موارد، آمادگی و ارتقای کیفیت عملکرد پدافند غیرعامل نقش اصلی را ایفا می‌کند [۶]. هدف اصلی در پژوهش حاضر، توسعه یک روش عددی جدید برای حل مدل ریاضی جریان آلاینده در آب زیرزمینی به‌منظور تعیین تابع توزیع مکانی آلاینده در لحظه شروع و ردیابی منبع انتشار آلاینده است.

۲- مبانی و پیشینه تحقیق

در حالت کلی کنترل و پیشگیری حملات تروریستی و خرابکارانه در حوزه آلودگی منابع آبی بسیار مشکل است و اغلب چنین عواملی با تلفات جانی و به‌صورت بیماری همه‌گیر ظاهر می‌شود، لذا با توجه به عدم آشنایی مردم با این‌گونه تهدیدات جانی، به‌منظور حفظ سلامت جامعه لازم است به متخصصان حوزه علوم مهندسی منابع آب تلنگری زده و با تجهیز و ارتقاء در ابزارهای مهندسی و محاسباتی به بررسی و شناسایی سریع و دقیق منابع انتشار آلایندگی و راه‌های جلوگیری از آن‌ها بپردازند. به‌منظور مقابله با مخاطره‌های آب‌های زیرزمینی، مهم‌ترین اهرم کنترل و پایش تمام اجزای سیستم تأمین و تصفیه و توزیع آب است. ایجاد یک سیستم امنیتی قوی و مناسب برای شناسایی به‌موقع حملات تروریستی دشمن ضروری است. باید برای مقابله با حوادث مختلف احتمالی در رابطه با آلودگی آب به عوامل میکروبی بیماری‌زا، سموم شیمیائی و غیره، دستورالعمل‌های ویژه تنظیم و به نحو مناسب مثل تهیه پوسترهای خاص به مردم اطلاع رسانی گردد تا تلفات و خسارات حوادث احتمالی به حداقل لازم کاهش یابد. باید از بین کسانی که در اطراف منطقه استقرار تأسیسات آبی زندگی می‌کنند افراد خاصی را انتخاب نمود و با گذاشتن دوره‌های آموزشی آن‌ها را نسبت به حوادث احتمالی در

[۱] کلریناتور، دستگاهی است که توسط آن کلر به فرم گازی و یا به فرم محلول به سیستم آب‌رسانی تزریق می‌گردد.

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

رابطه با منابع و سامانه‌های آب‌رسانی آگاه و حساس نمود تا با مشاهده هرگونه عوامل مشکوک بلافاصله آن را به مسئولین ذی‌ربط گزارش نمایند [۷،۸].

آلودگی آب ممکن است به صورت عمدی یا غیرعمدی باشند. حملات عمدی به شبکه‌های آب‌رسانی را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: حملات سایبری، حملات فیزیکی و حملات شیمیایی و بیولوژیکی. بااین حال، شواهد تاریخی نشان می‌دهد که از بین این سه مورد، حملات شیمیایی و بیولوژیکی به زیرساخت‌های آب‌رسانی، باعث مشکلات جبران‌ناپذیری می‌شود و سلامت عمومی جامعه را به خطر می‌اندازد. به‌طورکلی آلوده نمودن آب شرب و یا تخریب اماکن و تأسیسات آبی یکی از روش‌هایی است که دشمن برای دسترسی سریع و ارزان به اهداف خود انتخاب می‌نماید [۹،۱۰].

سال ۱۹۷۲: در شیکاگو چندین عضو از یک سازمان تروریستی نئونازی، ظاهراً با هدف اجرای یک نقشه جدید و ماهرانه، در زمانی که جزئیات طرح آلودگی منابع تأمین آب چندین شهر شامل شیکاگو و سنت لوئیس را در برنامه‌های خود داشتند بازداشت شدند. آن‌ها چندین عامل بیولوژیک در اختیار داشتند که در آزمایشگاه‌های دانشکده‌ها یا کالج‌های محلی تولید کرده بودند. عواملی مثل بوتولیسم، منتژیت، سیاه زخم و بالای چهل کیلوگرم کشت‌های تیفوئید از جمله عوامل شناسایی شده بود که آن‌ها در اختیار داشتند.

سال ۱۹۷۷: در شمال کارولینا یک مخزن آب با عوامل باکتریایی آلوده شده بود. درواقع درپوش‌های ایمنی مخزن برداشته و آب با موفقیت آلوده و غیرقابل استفاده‌شده بود و آب موردنیاز مردم با کمک کامیون‌های تانکر دار تأمین شد.

سال ۱۹۸۷: سارین، جزء عوامل اعصاب و یکی از سمی ترین گازها و تسلیحات شیمیایی خطرناک است. ماده‌ای بی‌رنگ و بی‌بو و باثبات بسیار کم که به‌راحتی در آب حل نمی‌شود. عراق در طول جنگ تحمیلی و بخصوص عملیات کربلای ۸ برای اولین بار، به‌وسیله موشک‌های کاتیوشا، از این گاز سمی علیه اهداف غیرنظامی مثل تصفیه خانه آب استفاده نمود و طی آن حمله، اکثر کارکنان تصفیه‌خانه آب خرمشهر مسموم و شهید شدند.

سال ۱۹۹۱: در ژانویه یک نامه بی نام به دفتر کلونیا در کلمبیای تحت اشغال انگلیس فرستاده شد. در این نامه منابع آب شهر تهدید به آلودگی با عوامل بیولوژیک شد. انگیزه آن‌ها مرتبط با جنگ خلیج‌فارس بود. بعد از این تهدید، به تعداد نیروهای امنیتی منابع آب افزوده شد؛ اما هیچ عملیاتی در رابطه با این تهدید شناسایی نشد.

سال ۱۹۹۲: ۲۸ مارس طی حمله بیوتروریستی مشاهده کردند که مخازن آب محتوی غلظت بالایی از سیانید پتاسیم است (۱۵۰mg). قبل از اینکه کسی صدمه ببیند، آلودگی شناسایی شد. گروه PPK در کردستان ترکیه مسئول این حمله بودند.

سال ۱۹۹۳: صدام منابع آب شیعیان جنوب عراق را با سموم شیمیائی مسموم کرد.

سال ۱۹۹۹: در منطقه کوزوو چاه‌های آب به‌وسیله صرب‌ها آلوده شد، در مناطق اطراف چاه‌ها، اجساد کوزوویی‌های آلبانی دفن شده بود. در این سال ناتو سامانه های آب را در یوگوسلاوی هدف قرار داد و سیستم تأمین آب را از کار انداخت.

سال ۲۰۰۶: حملات گسترده رژیم اشغالگر قدس در جنگ ۳۳ روزه، به تأسیسات زیر بنائی و زیرساخت های مهم لبنان از قبیل بیمارستان‌ها و تأسیسات آب‌رسانی خسارات گسترده‌ای به آن ها وارد نمود. با بررسی این سوابق تاریخی ثابت می شود که آلوده نمودن منابع تأمین آب در سطوح بین المللی یک مسئله جدیدی نیست و در طول تاریخ همواره بوده است. خطر آلودگی آب یک مشکل بزرگ جهانی است که به ارزیابی مداوم و تجدیدنظر در سیاست منابع آبی در همه سطوح احتیاج دارد (از آب‌های بین‌المللی تا آب‌های درون‌مرزی و چاه‌ها) [۱۱،۱۲].

پدافند زیستی مجموعه اقدامات شامل رصد و پایش تهدیدات زیستی و هشدار سریع، آشکارسازی و تشخیص، تریاژ، تخلیه و درمان، بهداشت و پیشگیری، قرنطینه و محدودسازی، بازیابی و حذف منابع آلوده، بازتوانی و بازسازی، مدیریت افکار عمومی در برابر تهدیدات زیستی است [۱۳،۱۴].

در آئین‌نامه اجرائی بند ۱۱ ماده ۱۲۱ قانون برنامه چهارم و آئین‌نامه‌های اجرایی مربوط به موضوع پدافند غیرعامل که به نحوی با صنعت آب و فاضلاب کشور مرتبط است، برای اجرای تمهیدات امنیتی-راهبردی برای مدیریت منابع و تأسیسات آبی توصیه شده است [۱۱،۱۵،۱۶].

مهندسی پدافند غیرعامل یک نیاز معماری، مهندسی و استراتژیک، برای کاهش تأثیر عملیات دشمن و تأمین امنیت پایدار سامانه‌های تأمین آب مانند منابع آب زیرزمینی، آب سدها، چاه‌های آب، خطوط انتقال، ایستگاه‌های پمپاژ، تصفیه‌خانه‌ها، مخازن ذخیره و شبکه‌های توزیع آب است. ازجمله راهبردهای امنیتی-دفاعی پدافند غیرعامل زیستی برای مقابله با آلودگی عمدی منابع آبی کشور می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۱۷]:

- نمونه برداری آب و کنترل (برای شناسایی به موقع آلودگی واردشده احتمالی)
- خریداری و نصب تجهیزات فیزیکی، دریچه، نورافکن یا دوربین‌های مداربسته امنیتی.
- بهبود و اصلاح سامانه‌های الکترونیک، رایانه‌ای یا دیگر سامانه‌های خودکار

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

- سامانه‌های اعلام‌خطر جهت تشخیص و ارزیابی آلودگی منابع آبی.

۳- روش تحقیق

شبیه‌سازی مکان و شدت آلاینده به‌منظور شناسایی و ردیابی زمان و مکان واقعی حمله عمدی به منابع آبی یکی از اقدامات مناسب ضروری و حیاتی در حوزه پدافند غیرعامل زیستی است. اگر یک حمله تروریستی به‌موقع شناسایی شود، می‌توان با اقدام پیشگیرانه مانع پیشرفت و انتشار آلودگی در روزهای آتی شد. با توجه به اینکه حملات تروریستی به منابع آبی ممکن است به طرق مختلفی انجام شود، لذا تأمین حفاظت فیزیکی کافی در مقابل عملیات خرابکاری تروریست‌ها، ضروری است. وجود سامانه‌های اعلام‌خطر برای حفاظت از سلامت مصرف‌کنندگان ضروری است و از فن‌آوری شناسایی سریع استفاده می‌کنند تا این که مسئولین بهداشت عمومی محلی یا ملی و کارکنان بخش اضطراری اقدامات لازم را به سرعت انجام دهند. اجزای اصلی سامانه‌های اعلام‌خطر شامل شناسایی آلودگی، توصیف صفات اختصاصی آلاینده، تعیین مکان انتشار آلودگی و ارتباط با مسئولین و مردم و واکنش به حادثه آلودگی است. دانش ریاضی شاخه‌ای از دانش بشری است که با اعداد، الگوریتم‌ها، محاسبات و مدل‌سازی برای حل مسائل سروکار دارد. پیشرفت و توسعه پایدار کشورها که بر اساس فناوری های نوین، صنایع دانش بنیان و رشد اقتصادی رقم می خورد، ریشه در علوم و دانش ریاضی دارد. این علوم امروزه توانسته است تقریباً به تمام بخش های زندگی وارد شود و به استحکام قابلیت فناوری‌های نوین مانند داده‌کاوی، ارتباطات الکترونیکی امن، هوش مصنوعی بیانجامد. تاکنون مطالعات انجام‌شده در زمینه بازیابی مکان و زمان و تشخیص منابع آلاینده در حوزه آب‌های سطحی و زیرزمینی توسط محققان با استفاده از روش‌های مختلف از جمله شبیه‌سازی-بهینه‌سازی، احتمالاتی-زمین‌آماری و ریاضی انجام‌شده است [۶،۱۸].

روش شبیه‌سازی- بهینه‌سازی: حل مسائل معکوس با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی به دلیل پایین بودن زمان اجرای آن از پرکاربردترین الگوریتم در حوزه مسائل مهندسی و غیرمهندسی است. روش‌های مختلفی برای حل مسائل بهینه‌سازی ارائه شده است. الگوریتم‌های ابتکاری و فرا ابتکاری از جمله الگوریتم‌های حل این‌گونه مسائل می‌باشند. اساس این روش‌ها بهترین جواب از میان مجموعه‌ای از جواب‌های ممکن است. این روش‌ها شامل ترکیب یک الگوریتم بهینه سازی مانند الگوریتم ژنتیک با سایر روش‌های عددی است، به‌طوری‌که نیاز به سامانه‌های محاسباتی با پردازنده قوی جهت حل مسئله است که موجب بالا بودن هزینه های محاسباتی و یک عیب اساسی برای این روش محسوب می شود. غیر یکتا بودن جواب این روش از دیگر معایب اصلی است [۱۹،۲۰،۲۱،۲۲].

روش احتمالاتی-زمین‌آماری: در این روش با کاهش تعداد شبیه‌سازی‌ها حجم محاسباتی که منتج به جواب‌های مسئله بازگشتی می‌شود نیز کاهش می‌یابد که این به‌عنوان مزیت روش قلمداد می شود. در این روش استفاده از کاربرد توزیع احتمالاتی زمین‌آماری و با استخراج مدل معکوس از مدل مستقیم، معادله غلظت آلاینده در هر زمان و مکان در زمان گذشته به‌صورت تابع توزیع احتمال بیان می‌شود [۱۷،۲۳،۲۴،۲۵].

روش ریاضی: اساس این روش‌ها بر مبنای گسسته سازی معادلات انتگرالی ناشی از اعمال روش تابع گرین بر معادله دیفرانسیل پخش-انتشار است. با انجام گسسته سازی مذکور، دستگاه خطی بدحالت حاصل می گردد که برای حل آن از روش حداقل مجذورات خطی با اعمال روش های منظم سازی استفاده می‌شود [۸،۱۴،۲۶]. در مراجع [۱۸،۲۱] برای تشخیص مکان و شدت منابع آلاینده نقطه‌ای در رودخانه از اندازه‌گیری‌های غلظت آلاینده در پایین دست استفاده کردند که منجر به حل معکوس معادله انتقال در حالات یک‌بعدی و دوبعدی شد.

رویکردهای مختلف برای یافتن منبع انتشار آلودگی عبارت‌اند از: ۱- بازسازی تابع شدت (غلظت) آلاینده رهاشده از منبع [۲۶،۲۸]، ۲-ردیابی مکان و زمان رهاسازی آلاینده [۲۲،۲۷]. در این پژوهش، مدل پخش-انتشار آلاینده در حوزه آب زیرزمینی در قالب یک مسئله معکوس به‌منظور شبیه‌سازی تابع شدت آلاینده در زمان‌های مختلف مدل‌سازی شده و سپس یک روش عددی برای حل عددی آن معرفی می‌شود. استفاده از داده‌های فرضی به تحلیل حساسیت، دقت و صحت مدل ریاضی و روش معرفی‌شده پرداخته می‌شود.

۴- مدل ریاضی جریان آلاینده یک‌بعدی

از دیدگاه ریاضیات مهندسی، مسئله تعیین تابع شدت آلاینده در زمان‌های مختلف را می‌توان از طریق معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی با شرایط مرزی-نهایی به‌صورت زیر مدل‌سازی کرد [۲۹]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = D(x)\dfrac{\partial^2 C}{\partial^2 x} - V(x)\dfrac{\partial C}{\partial x}, & (x,t) \in [a,b] \times (0,T) \\ C(x,T) = F(x), & x \in \Omega = [a,b], \\ C(a,t) = C(b,t) = 0, & t \in (0,T), \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن $C(x,0) = f(x)$ تابع توزیع غلظت آلاینده (تابع غلظت اولیه) و یک تابع مجهول است و داریم:

C(x,t): تابع غلظت آلاینده در زمان t و مکان x که به‌صورت تابعی از زمان و مکان تعریف می‌شود

D : ضریب پخش آلاینده (m^2/s)

V : سرعت آلاینده (m/s)

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

مسئله (۱) مسائل جزء بدحالت‌ترین مسائل ریاضی است، بدین‌صورت که ممکن است جواب منحصربه‌فرد نداشته و یا در صورت وجود نسبت به داده‌های مسئله ناپایدار باشد [۳۰،۳۱]، لذا حل عددی این‌گونه مسائل بسیار حساس و چالش‌برانگیز است. هدف اصلی تعیین میزان غلظت اولیه $f(x)$ در زمان $t=0$ با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی به‌دست‌آمده در زمان T است. با توجه به اینکه داده‌های آزمایشگاهی همواره شامل خطای محاسباتی است، لذا تابع غلظت به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F_\delta(x_i) = F(x_i) + \delta \mathrm{rand}(\mathrm{size}(F))_i, \qquad (۱)$$

که در آن پارامتر δ میزان نویز محاسباتی در اندازه‌گیری داده‌های آزمایشگاهی و $rand(size(F))_i$ یک عدد تصادفی بین صفر و یک است. در این پژوهش، روش شبه جواب[1] [۳۲] بر اساس چند جمله‌های برنشتاین تعمیم‌یافته برای حل عددی مسئله معکوس (۱) ارائه می‌شود. هدف اصلی تعیین تابع غلظت اولیه $f(x)$ می‌باشد، به‌طوری‌که در رابطه زیر صدق کند:

$$\underset{f\in L^2(a,b)}{\mathrm{Min}} \int_a^b \left|F_\delta(x) - C(x,T;f(x))\right|^2 dx \qquad (۳)$$

که در آن $C(x,T;f(x))$ تابع توزیع غلظت آلاینده در محاسبه‌شده با استفاده از $f(x)$ است. تقریب تابع مجهول $f(x)$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{l=0}^{N} \alpha_l B_{N,l}(x) \qquad (۴)$$

در اینجا، $B_{N,l}(x)$ توابع پایه برنشتاین تعمیم‌یافته روی بازه Ω و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_{N,l}(x) = (x-a)(x-b)\left[\binom{N}{l}\frac{(x-a)^l(b-x)^{N-l}}{(b-a)^N}\right], \qquad (۵)$$

واضح است که

$B_{N,l}(a) = B_{N,l}(b) = 0.$

لذا توابع پایه برنشتاین تعریف‌شده در (۵) شرایط مرزی مسئله (۱) را برآورد می‌کنند. با جایگذاری تابع تقریب (۴) به‌جای تابع $f(x)$ در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$\underset{f_N\in L^2(a,b)}{\mathrm{Min}} \int_a^b \left|F_\delta(x) - C\left(x,T;\sum_{l=0}^{N}\alpha_l B_{N,l}(x)\right)\right|^2 dx.$$

بنابراین ضرایب مجهول α_l با استفاده از شرایط زیر به ازای $l=0,\dots,N$ قابل محاسبه است:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_l}\left(\int_a^b \left|F_\delta(x) - \sum_{l=0}^{N}\alpha_l C\left(x,T;B_{N,l}(x)\right)\right|^2 dx\right) = 0.$$

درنتیجه، یک دستگاه معادلات خطی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$AX = b, \qquad (۶)$$

[1] Quasi-Solution

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix},$$

که در آن

$$A_{ij} = \int_a^b C\left(x,T;B_{N,i}(x)\right).C\left(x,T;B_{N,j}(x)\right)dx,$$
$$X = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N]^T,$$
$$b_i = \int_a^b F_\delta(x).C\left(x,T;B_{N,i}(x)\right)dx$$

است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مؤلفه‌های ماتریس متقارن A و بردار b شامل مقادیر $C\left(x,T;B_{N,l}(x)\right)$ می‌باشند، لذا نیاز به حل عددی N+۱ مسئله مقدار اولیه-مرزی به ازای l=0,…,N به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_l}{\partial t} = D(x)\dfrac{\partial^2 C_l}{\partial^2 x} - V(x)\dfrac{\partial C_l}{\partial x}, \\ C_l(x,0) = B_{N,l}(x), \\ C_l(a,t) = C_l(b,t) = 0. \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $C_l(x,t) := C\left(x,T;B_{N,l}(x)\right)$ است.

۵- بحث و نتایج عددی

در این بخش، به‌منظور بررسی دقت و صحت مدل ریاضی بیان‌شده در بخش ۳، به‌طور فرضی مقادیر زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} [a,b] = [0,\pi], \quad [0,T] = [0,10], \\ D(x) = 1, \quad V(x) = 0.2, \\ \alpha = \dfrac{V}{2D}, \quad \beta = \dfrac{V^2}{4D}, \\ C(x,t) = exp(\alpha x - (1+\beta)t)\,sin(x), \end{cases}$$

با تغییر متغیر

$$C(x,t) = exp(\alpha x - \beta t)W(x,t);$$

مسئله (۷) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_l}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 W_l}{\partial^2 x}, \quad (x,t) \in [0,\pi]\times(0,10), \\ W_l(0,t) = W_l(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,10), \\ W_l(x,0) = exp(-\alpha x)B_{N,l}(x), \end{cases} \qquad (۸)$$

بر اساس روش تفاضلات متناهی کرانک-نیکلسون[2] مسئله (۸) به‌صورت زیر گسسته سازی می‌شود:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = \pi, \ (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h),$$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m+1} = T, \quad (\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = k),$$

$$\begin{cases} \dfrac{W_{i,j+1} - W_{i,j}}{k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{W_{i+1,j} - 2W_{i,j} + W_{i-1,j}}{h^2} + \dfrac{W_{i+1,j+1} - 2W_{i,j+1} + W_{i-1,j+1}}{h^2}\right) \\ W_{0,j} = W_{n+1,j} = 0 \qquad j = 0,\dots,m+1, \\ W_{l,0} = B_{N,l}(x_i), \qquad i = 0,\dots,n+1, \end{cases}$$

[2] Crank–Nicolson Method

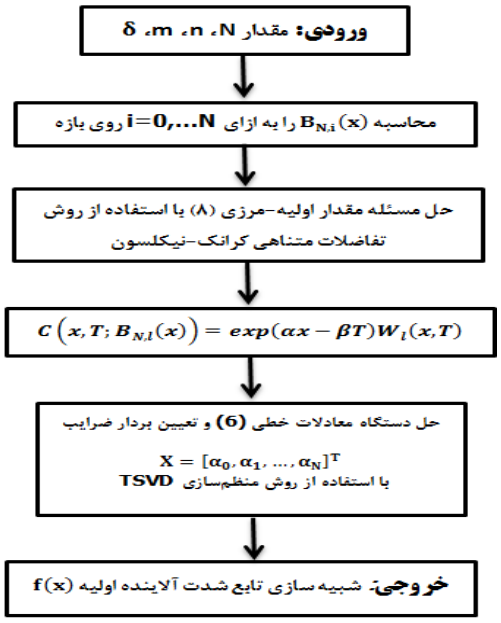
Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

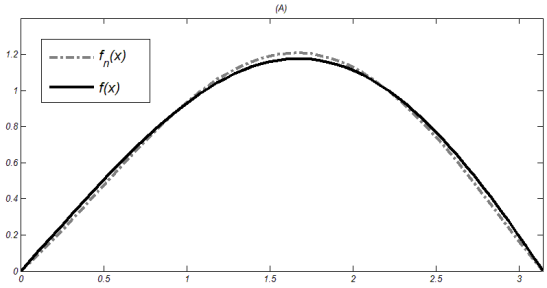
که در آن

$$W_{i,j} \approx W(x_i, t_j); \quad C_{i,j} = exp(\alpha x_i - \beta t_j) W(x_i, t_j)$$

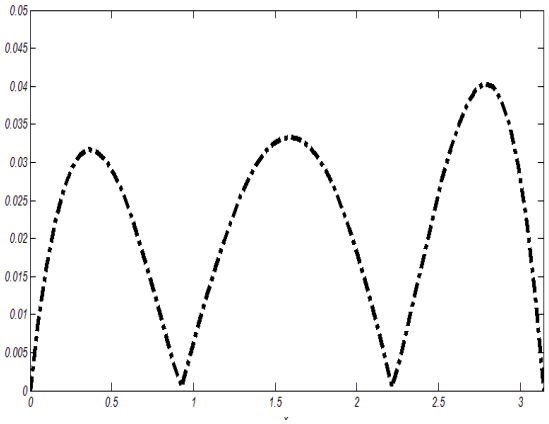
است. دستگاه معادلات خطی (۶) بدوضع است، چون با افزایش N و در نتیجه بُعد ماتریس A عدد حالت آن خیلی بزرگ می‌شود، لذا استفاده از روش‌های مستقیم و تکراری برای حل آن دقیق و پایدار نخواهد بود، به همین منظور از روش منظم سازی TSVD برای تعیین یک جواب تقریبی پایدار استفاده می‌شود. فلوچارت کلی روش شبه-جواب تعمیم‌یافته به‌صورت زیر است:



در ادامه، روش شبه-جواب تعمیم‌یافته به ازای n=۶۰ و m=۱۸۰ مطابق فلوچارت اجرا می‌شود. شکل (۱)، شامل نمودار تابع شدت آلاینده شبیه‌سازی‌شده (نمودار خط تیره) و تابع شدت آلاینده دقیق (نمودار خط صاف) به ازای N=۳ با δ =۰/۰۱ است و نمودار تابع قدر مطلق خطا حاصل از اجرای روش در شکل (۲) گزارش شده است. این نمودارها، دقت و کارایی روش عددی معرفی‌شده برای بازیابی تابع شدت آلاینده در لحظه $t = 0$ را نشان می‌دهد.



شکل (۱): تابع شدت آلاینده شبیه‌سازی‌شده در لحظه t=0 (نمودار خط‌چین)، تابع شدت آلاینده واقعی در لحظه t=0 (نمودار با خط صاف).

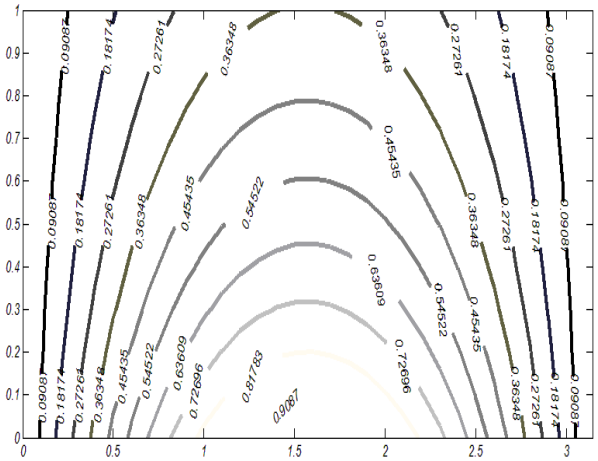


شکل (۲): نمودار تابع قدر مطلق خطا به ازای N=۳ و δ =۰/۰۱

به منظور صحت سنجی مدل ریاضی، نمودارهای کانتور مربوط به تابع غلظت آلاینده c(x,t) بر اساس دو تابع غلظت اولیه دقیق f(x) و شبیه‌سازی‌شده $f_3(x)$ در شکل‌های (۳) و (۴) گزارش شده است. مقادیر تکین σ_i ماتریس A، ریشه دوم مثبت مقادیر ویژه λ_i و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A.X_i = \lambda_i X_i, \quad \sigma_i = \sqrt[2]{\lambda_i}, \quad i=1\dots N+1.$$

که در آن X_i بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه می‌باشند. نسبت بزرگ‌ترین مقدار منفرد به کوچک‌ترین مقدار منفرد را عدد حالت ماتریس A می‌نامند و با نماد $cond(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{N+1}}$ نمایش داده می‌شود. هر ماتریسی با عدد حالت خیلی بزرگ ($cond(A) \gg 10^{14}$) را ماتریس بدحالت[1] می‌نامند. رفتار نزولی نمودارهای لگاریتمی مقادیر تکین ماتریس A به ازای N=۳,۵ در شکل‌های ۶-۵، بدحالتی ماتریس ضرایب A را تأیید می‌کند.

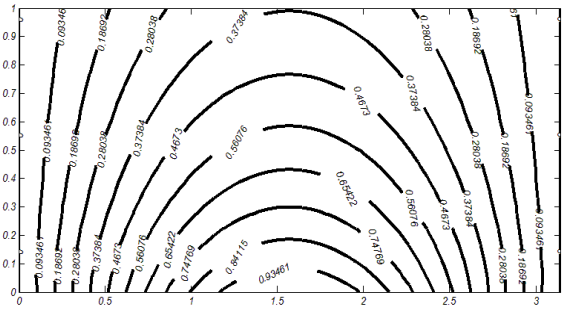


شکل (۳): نمودار کانتور تابع غلظت آلاینده C(x,t) به ازای تابع اولیه دقیق f(x).

[1] Ill-conditioned

Archive of SID.ir

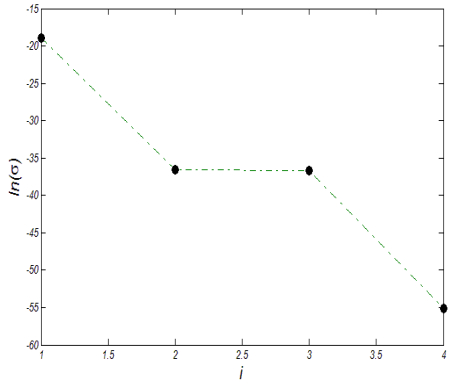
Archive of SID.ir



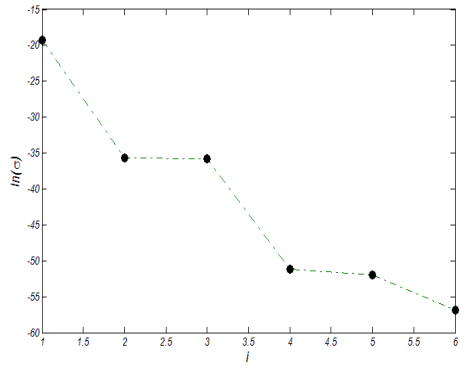
شکل (۴): نمودار کانتور تابع غلظت آلاینده C(x,t) به ازای تابع اولیه شبیه‌سازی‌شده (تقریبی) $f_3(x)$

جدول (۱): اندازه خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف N و عدد حالت ماتریس ضرایب A

عدد حالت A به ازای N=۵	$\|\|f-f_5\|\|$	عدد حالت A به ازای N=۳	$\|\|f-f_3\|\|$	δ
۱/۲۵×۱۰^۱۶	۱/۰۴۴۷×۱۰^-۱	۵/۰۶×۱۰^۱۵	۴/۰۷۳۳×۱۰^-۲	۰/۰۱
۱/۲۵×۱۰^۱۶	۱/۱۶۴۰×۱۰^-۱	۵/۰۶×۱۰^۱۵	۵/۶۸۹۸×۱۰^-۲	۰/۰۵
۱/۲۵×۱۰^۱۶	۱/۵۲۳۲×۱۰^-۱	۵/۰۶×۱۰^۱۵	۹/۳۰۱۱×۱۰^-۲	۰/۱



شکل (۵): مقادیر تکین ماتریس ضرایب A به ازای N=۳ و δ =۰/۰۱



شکل (۶): مقادیر تکین ماتریس ضرایب A به ازای N=۵ و δ =۰/۰۱.

در جدول (۱)، اندازه خطای مطلق حاصل از اجرای روش و عدد حالت ماتریس A به ازای N=۳,۵ و سه مقدار مختلف δ=۰/۰۱,۰/۰۵,۰/۱ گزارش‌شده است. نتایج عددی در این جدول نشان می‌دهد که افزایش مقدار N و δ به دلیل رشد عدد حالت A و ایجاد اختلال زیاد در داده‌های مسئله، باعث افزایش خطا و کاهش دقت در جواب تقریبی می‌شود. به عنوان یک نتیجه کلی، با مقایسه تطبیقی انجام‌شده در جدول (۲)، از بین روش‌های موجود در حل مسائل معکوس، ملاحظه می‌شود استفاده از روش‌های ریاضی نسبت به سایر روش‌ها کم‌هزینه و قابل‌اعتمادتر است.

جدول (۲): مقایسه تطبیقی روش‌های موجود در حل مسائل معکوس

روش	مزایا	معایب
شبیه‌سازی- بهینه سازی	۱-پایین بودن زمان اجرای روش ۲- فرمول‌بندی و اجرای ساده روش	۱- بالا بودن هزینه محاسباتی به دلیل نیاز به سامانه‌های محاسباتی با پردازنده قوی ۲-غیر یکتا بودن و عدم پایداری جواب
احتمالاتی- زمین آماری	تعیین جواب بدون نیاز به الگوریتم‌های تکراری یا با حداقل تعداد تکرار نسبت به روش‌های شبیه‌سازی-بهینه‌سازی	۱-نیاز به داده‌های آماری زیاد برای انجام محاسبات با دقت بالا ۲- افزایش هزینه و زمان انجام پروژه
ریاضی	۱-تولید جواب با پایدار عددی و دقت بالا ۲-عدم نیاز به الگوریتم‌های تکراری پیچیده در تعیین جواب	پیچیدگی محاسباتی در حل مسائل (معکوس یا غیرمعکوس) با بُعد بالا

۶- نتیجه‌گیری

وقتی صحبت از تهدیدات زیستی می‌شود، منظور تهدیدات طبیعی از جمله زلزله و سیل نیست، بلکه تهدیدات انسان‌ساز است که توسط دشمن یا عوامل دست‌نشانده دشمن پیش می‌آید. عملیات تروریستی در منابع آبی از طریق حمله‌های بیولوژیکی یکی از مهم‌ترین تهدید زیستی در حوزه منابع آبی کشور به شمار می‌رود. هدف اصلی در این پژوهش، استفاده از مدل ریاضی در ردیابی تابع شدت آلاینده و شبیه‌سازی نحوه توزیع مکانی آن به‌منظور تعیین مکان و زمان ورود آلاینده به آب زیرزمینی است. این مسئله در قالب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و تحت شرایط مرزی- نهایی (مسئله معکوس) مدل‌سازی ریاضی می‌شود. نتایج عددی به‌دست‌آمده در این پژوهش، دقت و صحت روش ریاضی معرفی‌شده را نشان می‌دهد. خطای بین جواب واقعی و شبیه‌سازی‌شده حاصل از اجرای روش به ازای δ =۰/۰۱ حداکثر ۴ درصد است.

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

۷- مراجع

[1] A. Shahbazi and F. Mehrjo, “Groundwater pollution sources and restoration techniques”, Human & Environment, vol. 11(25), pp. 13-21, (2013). (In Persian).
URL: https://he.srbiau.ac.ir/article_3265.html

[2] P. Salatin and S. Tajik, “The Effect of Water Pollution on Health Economics: A Panel Data Approach”, Human & Environment, vol. 15(3), pp 47-57, 2017. (In Persian). URL: https://he.srbiau.ac.ir/article_11059.html

[3] A. Rezayan, “Future studies of water crisis in Iran based on processing scenario”, Iranian Journal of Ecohydrology, vol. 3(1), pp. 1-17, 2016, (In Persian). DOI: 10.22059/ije.2016.59185

[4] H. Tavakoli and R. Sarafpour, “Biological threats caused by intentional contamination of water and food in normal and military conditions”, Baqiyatallah University of Medical Sciences, vol. 33, (2015). (In Persian). URL: https://sid.ir/paper/62013/fa

[5] S. N. Badisar, et al., “Legal system of Water Resources Pollution in Iran”, Iran-Water Resources Research, vol. 13, no. 1, 2017. (In Persian).
URL https://www.iwrr.ir/article_32928.html

[6] O. Marandi, “Passive defense and accountability for Iran's sustainable future”, Sustainability, Sustainability, Development & Environment, vol. 1, pp. 57-64, 2014. (In Persian). DOR: SDCONF01_2047

[7] D. Bahmanesh Shakib and A. Kargar, “Presenting a theoretical model of inter-organizational coordination in the strategic management of natural crises with the combined method”, Strategic Management Studies of National Defense, vol. 27, pp. 71-102, 2016. (In Persian).
URL: https://smsnds.sndu.ac.ir/article_10.html

[8] M. R. Farzad Behtash, "Encyclopedia of Urban Management", Passive Defense Organization, Tehran, 2018. (In Persian)

[9] Sh. Bakhshi, et al., “Analysis of Passive Defense Considerations in Urban Infrastructure with an Emphasis on Water Infrastructure”, GeoRes, vol. 31(3), pp. 103-117, 2016. (In Persian). URL: http://georesearch.ir/article-1-45-fa.html

[10] A. Keshvari, et al., “Security of urban water and sewage systems”, Imam Hossein University Press, 2017. (In Persian)

[11] M. Bigdeloo, “Bioterrorism”, Educational and Research Center of Martyr Sayad Shirazi, Tehran, 2006. (In Persian)

[12] M. Pormorad and R. Ghaderi, “Getting to know the types of pollutants in water resources and their effects", First National Environment Conference, Iran, 2013. (In Persian). DOR: ISFPNU01_219

[13] Gh. Jalali and H. Araghizadeh, "Biological Defense", Journal of Culture and Health Promotion of Academy of Medical Sciences, 4(1), pp. 60-66, 2019. (In Persian).
URL: http://ijhp.ir/article-1-190-fa.html

[14] A. Shariat, “The Role of Passive Defense Against Agroterrorism Attacks in the Field of Natural Resources (Case Study of Fungal Agents), Rangelands”, Passive Defense Quarterly, vol. 10, no. 2, pp. 97-105, 2019. (In Persian). DOR: 20.1001.1.20086849.1401.13.1.5.8

[15] Gh. Jalali Farahani, “An introduction to the theoretical foundations of passive defense with the approach of new threats”, Tehran: Imam Hossein University Press, 1391. (In Persian)

[16] M. Khosravi, “Bioterrorism via Water and Food”, yafte, vol. 19(3), pp. 1-11, 2017, (In Persian).
URL: http://yafte.lums.ac.ir/article--2566-1-fa.html

[17] M. S. Yahyapour, et al, “targeting and positioning from the point of view of passive defense”, Fegh Al-Sadegh Publications, 2015. (In Persian)

[18] M. Mazaheri, “Mathematical model for detection of pollutant sources in the river: recovering the location and temporal intensity of pollutant sources”, Ph.D. Thesis, Tarbiat Modares Univ., Faculty of Agricultural Sciences, 2013. (In Persian)

[19] M. B. Rahnama, "Mathematical model of the pollution transfer process in a vertical cross-section of underground water tables", 6th Conference on Fluid Dynamics, 2017. (In Persian). DOR: CFD06_025

[20] H. Banejad, et al., “Numerical simulation of the flow and contaminant transport in groundwater, case study: Nahavand Plain Aquifer”, Water and Soil Science, vol. 23(2), pp. 43-57, (2013). (In Persian).

[21] A. Baghvand, et al., “Ground water modeling to estimate nitrate dispersion in critical aquifers (a case study: Mashhad city),” J. Env. Sci. Tech., vol. 17, no. 4, 2016. (In Persian), URL: https://civilica.com/doc/1289186

[22] A. Dehmardan, et al., "Review on identifying the point source of pollution in the river", second national hydrology conference of Iran, 2016. (In Persian). URL: https://civilica.com/doc/661667

[23] A. Ghane, M. Mazaheri and J. Samani, “Location and release time identification of pollution point source in river networks based on the Backward Probability Method”, Sharif Journal of Civil Engineering, vol. 3, pp. 95-104, 2017. (In Persian). DOI: 10.24200/j30.2017.20111

[24] M. Lushabi, “Application of QR mathematical method in determining the source of pollutants in the river”, Seventh Global Conference on Sustainable Agriculture and Natural Resources, Iran, 2016. (In Persian). DOR: NACONF07_141

[25] R. Rezaie, et al., “Assessment of chemical pollution of groundwater resources in downstream regions of Sanandaj landfill”, SJKU, vol. 15(3), pp. 89-98. 2010. (In Persian). URL: http://sjku.muk.ac.ir/article-1-389-fa.html

[26] A. El. Badia, “Identification of a point source in a linear advection–dispersion–reaction equation: application to a pollution source problem”, Inverse Problems, vol. 21, pp. 1-17, 2005. DOI: 10.1088/0266-5611/21/3/020

[27] A. Bagtzoglou and J. Atmadja, “Marching-jury backward beam equation and quasi-reversibility methods for hydrologic inversion: Application to contaminant plume spatial distribution recovery”, Water Resources Research, vol. 39(2), 2003. DOI: 10.1029/2001WR001021

[28] E. Parmenon and M. Mazaheri, “Identification of the source of pollution by the pseudo-reversibility method in reverse in time”, Annual International Congress of New Findings in Agricultural Sciences and Natural Resources, Environment and Tourism, 2018. (In Persian). DOR: NEWCONF05_043

[29] F. Taran, "Underground water flow modeling and pollutant transfer”, Dibagaran, Tehran, 2013. (In Persian)

[30] B. Hofmann, “Regularization for Applied Inverse and Ill-Posed Problems”, Teubner-Texte zur Mathematik, 1986.

[31] J. V. Beck, “Inverse Heat Conduction Ill-Posed Problem”, John Wiley Int Sc. 1985.

[32] S. I. Kabanikhin, “Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications”, De Gruyter, 2011.

Archive of SID.ir

Archive of SID.ir

Application of mathematical model in biological passive defense: simulation of pollution flow in groundwater

Houshyar Eimani kalehsar*, Younes Talaei

Abstract

Pollution of water resources poses a significant and fundamental challenge to human life and the well-being of all living organisms. The presence of management gaps in this critical area creates vulnerabilities for potential bioterrorist attacks and contamination of water sources. An essential and practical approach to managing groundwater resources, particularly in identifying the time and location of pollutant releases into water, involves the utilization of mathematical models governing pollutant flow. Compared to other practical methods, mathematical modeling offers a reliable and cost-effective solution that is computationally feasible. The primary objective of this research is to simulate the initial pollutant intensity function (at t=0) through a mathematical backward in time inverse problem. This issue stands as one of the foremost challenges in water resources management and engineering, garnering significant attention from researchers. In this study, initially, a mathematical model of pollutant flow in groundwater is presented, where the initial pollutant intensity function is unknown. Then, a new numerical method based on the pseudo-solution method is employed to calculate an approximation for this function using a linear combination of Bernstein polynomials. The mathematical model is numerically analyzed and scrutinized through a specific example. The numerical results indicate that the initial pollutant intensity function can be precisely simulated by utilizing the pollutant intensity function at any time t>0. For an error level of $\delta=0.01$ in the input data, the approximate solution obtained through the introduced numerical method exhibits a maximum error of 4%.

Keywords: Groundwater pollution, Simulation of intensity pollution function, inverse problem, Passive defense.

Archive of SID.ir