سری فوریه در علوم مهندسی

برهان آذرم

دانشجوی کارشناسی ارشد ، دانشکده فنی مهندسی ، دانشگاه ارومیه

mb_azarm@yahoo.com

چکیده

نظریه سریهای فوریه نسبتا پیچیده است ولی کاربرد های این سری ها ساده است . سریهای فوریه ، فراگیر تر از سریهای تیلرند زیرا بسیاری از تابعهای دوره ای ناپیوسته ای که اهمیت عملی دارند قابل بسط به سری فوریه اند ولی بسط تیلر ندارند. مسائل بیشماری در علوم و مهندسی هستند که سیگنالهای سینوسی و در نتیجه سری و تبدیل فوریه ، نقش عمده ای در آنها ایفا می کند .

از آنجایی که در رشته مهندسی برق تمامی گیرنده ها ، فرستندها و پردازشگر های موج بر مبنای سیگنال های سینوسی و کسینوسی کار میکنند ، این المان ها نیاز به سیگنالهایی به شکل سینوسی و کسینوسی دارند یعنی تقریبا سیگنال های خارج از این فرم را نمیشناسند . ولی در عمل سیگنالها بنا به دلایلی به فرم سینوسی و کسینوسی نیستند . برای مثال سیگنالهای فرستاده شده از یک ماهواره ی فضایی به دلیل نویز های موجود در سر راه اعم از نور خورشید ، میدان مغناطیسی حاصل از جاذبه ی زمین ، میدان مغناطیسی های ایجاد شده توسط دست بشر در اتمسفر ، طوفان های هوایی و غیره دچار مشکلاتی اعم از گسستگی ، تعریف نشدگی ، مشتق ناپذیری و غیره می شود ، در حالیکه سیگنالی با این شرایط برای مدارات الکترونیکی گیرنده ها و پردازشگرها قابل فهم نیست . برای حل این چنین مشکلات از سری فوریه استفاده می کنیم . در این پژوهش سری فوریه و کاربردهای آن در صنعت و علوم مهندسی مورد ارزیابی قرار گرفته است .

کلمات کلیدی: سری فوریه ، تبدیل فوریه ، علوم مهندسی ، سیگنال ، آنالیز ،

۱. مقدمه

توسعه نظریه سریهای مثلثاتی در ۱۸۲۲ ، با چاپ کتابی توسط فوریه آغاز شد . تحقیقات چندین ساله وی به گسترش نظریه وسیعی در مورد ایده اساسی این سریها منجر شد که امروزه به نام خود وی معروف ، و از اهمیت بسیاری در ریاضیات ، علوم وفن برخوردار است. در ریاضیات ، با استفاده از سری فوریه میتوان هر تابع متناوب را به صورت جمعی از توابع نوسانی ساده (سینوسی، کسینوسی و یا تابع نمایی مختلط) نوشت این تابع به نام ریاضیدان بزرگ فرانسوی ، ژوزف فوریه نامگذاری شده است . با بسط هر تابع بصورت سری فوریه ، مولفه های بسامدی آن تابع بدست می آید .

ما با کرات با پدیده های دوره (تناوبی) رو به رو می شویم (مثلا در موتور ها ، ماشین های دوران کننده ، امواج صوت ، حرکت زمین و ضربان قلب در شرایط عادی و غیره) . در چنین مواردی ، نمایش توابع دوره ای متناظر بر حسب توابع دوره ای ساده ، یعنی سینوس و کسینوس ، از نظر علمی اهمیت زیادی دارد . معرفی این سری ها به وسیله فوریه ، یکی از مهمترین رویداد های رهگشا در ریاضیات کاربردی بوده است . اساسی ترین کاربرد ها را در این حیطه آنالیز فوریه دارد ؛ یعنی در حل مسائل مقدار مرزی و اولیه در مکانیک ، جریان گرما ، الکترواستاتیک و سایر زمینه های مهندسی .

در مهندسی الکتریک مسائلی چون رفتار بسامدی ، عناصر سوئیچینگ ، یا انتقال ضربه ها را می توان به کمک سری فوریه حل کرد . همچنین برای پیش بینی جزر و مد در دریا نوردی دارای اهمیت فراوانی است . از آنجا این ها پدیده های تناوبی هستند از سری فوریه استفاده می شود و در تمام بندرهای مهم ، وسائل مکانیکی چون پیش بینی کننده های جزر و مد ساخته می شود . امروزه کمتر شاخه ای از فیزیک ، ریاضیات یا صنعت و فن وجود دارد که در آن سریهای فوریه استفاده نشود .

۲. ژوزف فوریه

بارون ژان باپتیست ژوزف فوریه در سال (۱۷۶۸ مارس ۲۱) ۱۱۴۷ هجری شمسی در اوسر متولد شد . او یک ریاضی دان و فیزیک دان فرانسوی بود که به خاطر کارهای خارق العاده اش در نشان دادن توابع با سری های مثلثاتی شهرت داشت . ۲۷ ساله بود که در پاریس در دانشگاه نرماله پاریس شروع به درس دادن کرد و موفقیت هایش خیلی زود باعث شد که به او پیشنهاد کرسی آنالیز در دانشگاه پلی تکنیک داده شود . هفت سال بعد او یکی از اعضای آکادمی علوم فرانسه بود . فوریه در زمینه فیزیک بر روی انتقال گرما تحقیق می کرد و قانون فوریه در این زمینه از او به جای مانده است . فوریه همچنین کاربرد های سری فوریه در زمینه انتقال گرما و نیز ارتعاشات را معرفی کرد .

شاهکار فوریه تئوری ریاضی انتقال حرارت هدایتی بود که درست در سال ۱۱۶۱ هجری شمسی اتفاق افتاد . در همین سال کتابی بنام "تئوری آنالیتیکیود لا کالوق " را به چاپ رساند که یکی از مهمترین کتابهای چاپ شده در قرن نوزدهم بود . این تاریخ مبداء شروع هر دو شاخه ریاضیات محض وکاربردی بود که در آن فوریه تئوری سری ها که به نام خودش هم هست برای حل مسائل مقادیر مرزی در معادلات دیفرانسیل جزئی به کار برد . این کار مجادلات و مباحسات زیادی را موجب شد و پس از آن بود که همه دانشمندان قبول کردند که هر تابع با متغیر های حقیقی را می شود با سریهایی که شامل مجموع حاصل ضرب سینوسها وکسینوسها هستند ، نشان داد .

۳. نظریه سری فوریه

پیدایش تحلیل فوریه تاریخی طولانی دارد ، و شخصیت های مختلف و بررسی های فیزیکی بسیار متفاوتی درآن دخیل بوده اند . ایده استفاده از جمع های مثلثاتی یعنی مجموع سینوسی ها و وکسینوسی ها یا نمایی های مختلط متناوب مرتبط هارمونیکی برای توصیف پدیده های متناوب به زمان بابلیها بر می گردد ، آن ها برای پیش بینی رخداد های نجومی این ایده ها را به کار می بردند . اویلر که یک ریاضیدان و فیزیکدان برجسته سوئیسی بود وکشف های زیادی در زمینه های حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریه گراف داشته است ، نشان داد که اگر آرایش تار مرتعش در یک لحظه از زمان ترکیب خطی این وجه های طبیعی باشد ، آرایش آن در تمام لحظات بعدی نیز به همین صورت است . به علاوه اویلر نشان داد که ضرایب ترکیب خطی در هر زمان را می توان از روی ضرایب ترکیب خطی زمان های قبلی بدست آورد . او برای انجام این کار همان محاسباتی را انجام داد که امروزه ما برای بدست آوردن یکی از خواص جمع های مثلثاتی ، انجام می دهیم ؛ همان خاصیتی که این جمع ها در تحلیل سیستم های LTI مفید ساخته است . که این سیستم ها (سیستم های LTI) در بخش دیگر این مقاله به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است .

در سال ۱۷۵۳میلادی دانیل برنولی که یک ریاضی دان هلندی تبار سوئیسی بود ، که اصل برنولی و معادله برنولی به نام اوست ، بر مبنای شواهد فیزیکی استدلال کرد که تمام حرکات فیزیکی تار را می توان به صورت ترکیب خطی وجه های طبیعی بیان کرد ، ولی او این کار را از نظر ریاضی دنبال نکرد و نظر او پذیرش عام نیافت . در واقع خود اویلر هم سری های مثلثاتی را کنار گذاشت و در۱۷۵۹ ژوزف لویی لاگرانژ که یک ریاضی دان و منجم ایتالیایی - فرانسوی بود و از بزرگترین ریاضی دانان تمام ادوار تاریخ می باشد ، کاربرد های سری های مثلثاتی را در بررسی تار مرتعش شدیداً مورد انتقاد قرار داد . انتقاد او بر اعتقاد او دایر بر غیر ممکن

بودن نمایش سیگنال های گوشه دار (یعنی با شیب ناپیوسته) بر حسب سریهای مثلثاتی استوار بود . اگر تار را بکشیم و سپس رها کنیم چنین حالتی پیش می آید . به همین دلیل لاگرانژ بر این باور بود که سریهای مثلثاتی کاربرد بسیار محدودی دارند .

در این جو پر برخورد و نومید کننده بود که ژان باپیست فوریه افکار خود را در نیم قرن بعد منتشر کرد . فوریه در ۲۱ مارس ۱۷۶۸ ، در اوسر فرانسه متولد شد و زمانی که در جدالهای مربوط به سریهای مثلثاتی وارد شد ، یک زندگی تجربه را پشت سر داشتت . در نظر گرفتن شرایط آن دوران کارهای فراوان او را ، مخصوصا در مورد سری و تبدیل فوریه ، برجسته تر می کند . کشف های انقلابی او ، گرچه در زمان حیاطش به اندازه کافی مورد تقدیر قرار نگرفت ، ولی در پیشبرد ریاضیات اثر عمده ای داشت و در حوزه بسیار وسیعی از کار های عملی و مهندسی اهمیت زیادی داشته و دارد .

فوریه علاوه بر کار های ریاضی ، زندگی سیاسی فعالی هم داشت . طی سال های بد از انقلاب فرانسه فعالیت هایش تقریبا او را به سقوط کشاند و در دو مورد مختلف تا پای گیوتین هم پیش رفت . بعد ها فوریه یکی از همراهان ناپلئون بناپارت ، در سفر به مصر شد و در سال ۱۸۰۲ توسط ناپلئون به فرمانداری یک ناحیه فرانسه ، واقع در گرنوبل ، منصوب شد . در آنجا بود که ضمن انجام وظایف مربوط به فرمانداری ، مطالب مر بوط به سریهای مثلثاتی را پی ریزی کرد . محرکه فوریه در این کار، پدیده انتشار ونفوذ حرارت بود . این کار به خودی خود قدم مهمی بود ، زیرا اکثر پژوهشهای قبلی فیزیکی ریاضی تنها به مکانیک سماوی و تعقلی مربوط می شد . فوریه در سال ۱۸۰۷ کار خود را کامل کرد ، او دریافت که سریهای سینوسی مرتبط هارمونیکی در نمایش توضیع دما در یک جسم مفید است . او همچنین ادعا کرد که هر سیگنال متناوبی را می توان با این سری ها نمایش داد . گرچه کار فوریه در این موضوع شایان توجه بود ، ولی بسیاری از مطالب پشتیبان آن توسط دیگران کشف شده بود . همچنین استدلال های ریاضی فوریه دقیق نبود ، شرایط دقیقی که تحت آن می توان یک سیگنال متناوب را با سری فوریه بیان کرد ، در ۱۸۲۹ توسط دیریکله بیان شد . بنابراین فوریه ، واقعا راجع به نظریه ریاضی سری فوریه کاری نکرده است ؛ اما او این بینش روشن را داشت که توان بالقوه نمایش با این سریها را ببیند ، کارها و ادعاهای او محرک بیشتر کارهای بعدی بر روی سری فوریه بود . علاوه بر این ها ، فوریه در این نوع نمایش ، گام بسیار بزرگی نسبت به پشتیبان خود برداشت ؛ او سیگنالهای غیر متناوب را نه بصورت حاصل جمع وزن دار سینوسهای هماهنگ بلکه با انتگرال وزن دار سینوسهای غیر هماهنگ نمایش داد .

چهار ریاضی دان و دانشمند معروف مامور برسی مقاله هایی شدند که فوریه در ۱۸۰۷ به آکادمی ارائه داد . سه نفر از آنها ، س.ف.لاکروا ، گ. مونژ و لاپلاس موافق انتشار مقاله بودند ، ولی چهارمین نفر ، ژ. ل. لاگرانژ ، در عقیده ۵۰ سال قبل خود ، راجع به رد سری های مثلثاتی سر سخت ماند . به خاطر اعتراضات سخت لاگرانژ ، مقاله فوریه هرگز چاپ نشد . فوریه پس از چند بار تلاش برای قبولاندن مقاله به انستیتو دو فرانس، ویراست دیگری از کار خود را به صورت کتاب نظریه تحلیلی گرما منتشر کرد. این کتاب در سال ۱۸۲۲، ۱۵ سال بعد از ارائه مقاله فوریه به انستیتو چاپ شد. فوریه در اواخر عمر تا حدی به معروفیتی که شایسته آن بود دست یافت، ولی مهمترین ستایش از او ، استفاده از کارهایش در رشته های مختلف ریاضی و علوم مهندسی است. نظریه انتگرال گیری ، توپولوژی مجموعه های نقطه ای ، و بسط به توابع ویژه تنها چند نمونه از مباحث ریاضی ریشه گرفته از کارهای فوریه هستند.

۴. تبدیل فوریه

تبدیل فوریه به اسم ریاضیدان فرانسوی ژوزف فوریه، نامیده شده است و یک تبدیل انتگرالی است که هر تابع f(t) را به یک تابع دیگر F(w) منعکس می کند . در این صورت ، به F(w) تبدیل فوریه تابع f(t) می گویند . حالت خاص تبدیل فوریه ، سری فوریه نام دارد و آن زمانی کاربرد دارد که تابع f(t) متناوب باشد، یعنی f(t+T)= f(t) .

چنانچه تابع متناوب نباشد و یا به عبارتی ، تناوب آن برابر بی نهایت باشد ($T \to \infty$) ، از سری فوریه به راحتی ، عبارت زیر به دست می آید:

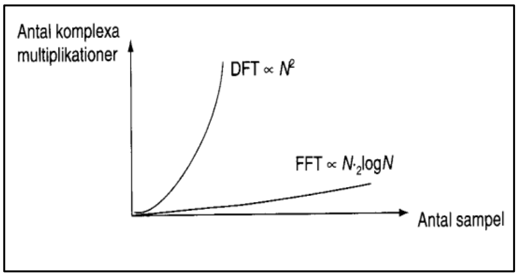
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

تبدیل فوریه و به همراه آن آنالیز فوریه ، در مباحث مختلف فیزیک ، از جمله الکترونیک و الکترومغناطیس به خصوص در پیغام رسانی و مخابرات ، آکوستیک ، فیزیک امواج و غیره کاربرد فراوان دارد .

۱-۴. تبدیل سریع فوریه (Fast Fourier transform-FFT)

مهمترین کاربرد FFT، یا تبدیل سریع فوریه ، در پردازش سیگنال است . که در آن ، سیگنال به صورت تابعی از زمان به شدت سیگنال است . همان طور که می توان برخی از توابع را به صورت بسط تیلور از توابع چند جمله ای نوشت ، می توان توابع متناوب را به خوبی بر حسب تابع های سینوسی با فاز اولیه و ضریب دلخواه نوشت . حال تبدیل شکل سیگنال به سری فوریه با روش های تبدیل سریع فوریه انجام می شود. به وسیله تبدیل گسسته فوریه (Discrete Fourier transform-DFT) می توان توابع و سیگنال های گسسته را از حوزه زمان به حوزه فرکانس و یا از حوزه مکان به حوزه عدد موج تبدیل کرد . البته نوعی دیگر از این تبدیل ، که با نام تبدیل گسسته فوریه شناخته می شود در بررسی الگوریتم برای ضرب سریع چند جمله ای ها و پردازش رایانه ای سیگنال ها استفاده می شود . تبدیل سریع فوریه (Fast Fourier transform- FFT) نام الگوریتمی ست برای انجام تبدیلات مستقیم و معکوس گسسته فوریه به صورتی سریع و بسیار کارآمد . تعداد زیادی الگوریتم های تبدیل فوریه سریع مجزا وجود دارد که شامل محدوده عظیمی از ریاضیات می شود : از محاسبات ساده به وسیله اعداد مختلط تا نظریه اعداد . یک تبدیل فوریه سریع تجزیه یک رشته از مقادیر به مولفه هایی با فرکانس های متفاوت است . این عملیات در بسیاری از رشته ها مفید است ، اما محاسبه مستقیم آن از تعریف گاهی اوقات در عمل بسیار کند است . تبدیل فوریه سریع یک راه برای محاسبه همان نتایج به طور سریع تر است ؛ محاسبه تبدیل فوریه گسسته برای n نقطه با استفاده از تعریف $O(n^2)$ عملیات ریاضی نیاز دارد در حالی که تبدیل فوریه سریع می تواند همان نتایج را در $O(n \log^2)$ عملیات ، محاسبه نماید . که تفاوت این دو شکل ۱ نشان داده شده است .



شکل (۱) : مقایسه تبدیل سریع فوریه وتبدیل فوریه گسسته

این تفاوت در سرعت می تواند بسیار چشمگیر باشد ، مخصوصا برای مجموعه داده های بزرگ . در جایی که n ممکن است در عمل هزاران یا میلیون ها باشد ، زمان محاسبه در برخی موارد می تواند به اندازه چند مرتبه کاهش پیدا کند و بهبود آن در حدود $n/\log^n$ مرتبه است . این بهبود عظیم موجب شده تا بسیاری از الگوریتم های عملی تبدیل فوریه گسسته را به صورت تبدیل فوریه سریع پیاده سازی نمایند . بنابراین تبدیل فوریه سریع در محدوده متنوعی از کاربردها از پردازش سیگنال دیجیتال و حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (پاره ای) تا ضرب مقادیر بزرگ صحیح به کار می رود . از تبدیل فوریه سریع به عنوان (مهم ترین الگوریتم عددی عصر زندگی ما) یاد می شود .

۴-۲. تبدیل فوریه در مهندسی زلزله

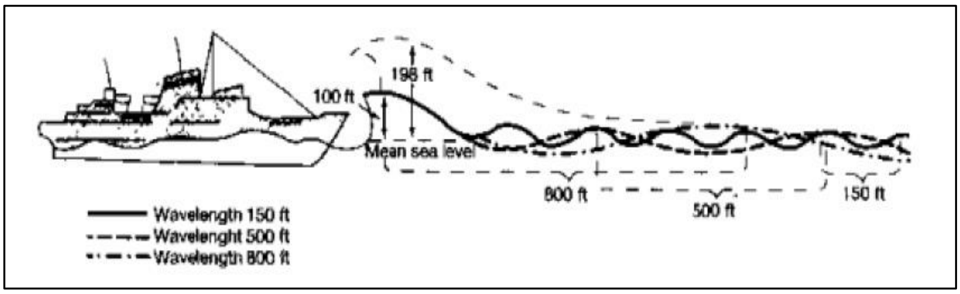
در طراحی لرزه ای سازه ها ، تجزیه و تحلیل محتوای فرکانسی امواج ارتعاشی زمین از اهمیت بالایی برخوردار است . به منظور مطالعه محتوای فرکانسی ، آنالیز طیفی با استفاده از تبدیل فوریه یکی از ابزارهای کارآمد در مهندسی زلزله به شمار می رود . طیف فوریه اهمیت فرکانسهای موجود را بدون اطلاعاتی در زمینه زمان وقوع این فرکانس ها نشان می دهد . از طرفی طیف فوریه میزان انرژی امواج ناشی از ارتعاشات زمین را در فرکانس های مختلف بیان می کند . مطالعات نشان داده است ، آنالیز فوریه نتایج خوبی را برای سیگنالهای پریودیک منظم ارایه می کند . یکی از کاربرد های آنالیز فوریه در مهندسی زلزله ، شبیه سازی شتاب نگاشت های مصنوعی می باشد . در این روش بر اساس ویژگیهای مکانی و خصوصیات مسیر انتشار امواج ، ویژگیهای غیرایستگاهی تکان نیرومند زمین لحاظ می شود .

همچنین به منظور ارزیابی اثر مودهای بالاتر و بررسی نوع الگوی خسارت وارد بر سازه ها ، به ویژه در ساختمانهای بلند ، می توان طیف بعد فوریه کمک گرفت . این طیف فرکانس های اصلی و حاکم بر سازه را نشان دهد . مطالعات انجام شده در مباحث مختلف مهندسی زلزله ، ارزش و اهمیت طیف فوریه را در مهندسی زلزله نشان می دهد .

۵. سری های فوریه در علوم مهندسی

نظریه سریهای فوریه نسبتا پیچیده است ولی کاربرد های این سری ها ساده است . سریهای فوریه ، به مفهوم خاصی ، فراگیر تر از سریهای تیلرند زیرا بسیاری از تابعهای دوره ای ناپیوسته ای که اهمیت عملی دارند قابل بسط به سری فوریه اند ولی بسط تیلر ندارند .

همچنین غیر از ارتعاش و پخش گرما ، مسائل بیشماری در علوم و مهندسی هستند که سیگنالهای سینوسی و در نتیجه سری و تبدیل فوریه ، نقش عمده ای در آنها ایفا می کند . برای مثال در توصیف رفتار متناوب آب و هوای زمین ، سیگنال های سینوسی به طور طبیعی ظاهر می شوند . منابع AC ولتاژ و جریان سینوسی تولید می کند ، و چنان که خواهیم دید تحلیل فوریه ابزاری برای بررسی پاسخ سیستمهای LTI ، مثل مدار ، به این ورودی ها هستند . همچنین همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است امواج اقیانوس هم از ترکیب خطی امواج سینوسی با تناوب مکانی ، یا طول موج های مختلف تشکیل شده اند . که در آن کشتی با سه موج ، که هریک تناوب مکانی متفاوتی دارند ، روبه رو شده است . در جایی که این سه موج همدیگر را تقویت می کنند موج بلندی تولید می شود . وقتی دریا طوفانی است ممکن است موج بسیار بلندی که با خط چین نشان داده شده تولید شود . مکانی که موجها را تقویت می کنند توسط فاز نسبی مولفه های جمع شونده تعیین می شود . سیگنال هایی که ایستگاههای رادیو و تلویزیون پخش می کنند هم ماهیت سینوسی دارند .



شکل (۲)

همانطور که در این مقاله نشان داده شده است ، توابع مورد استفاده در مهندسی و توابع نمایانگر سیگنال ها معمولا توابعی از زمان هستند یا به عبارت دیگر توابعی که در میدان زمان تعریف شده اند . برای حل بسیاری از مسائل بهتر است که تابع در دامنه فرکانس تعریف شده باشد زیرا این دامنه ویژگی هایی دارد که به راحتی محاسبات می انجامد .

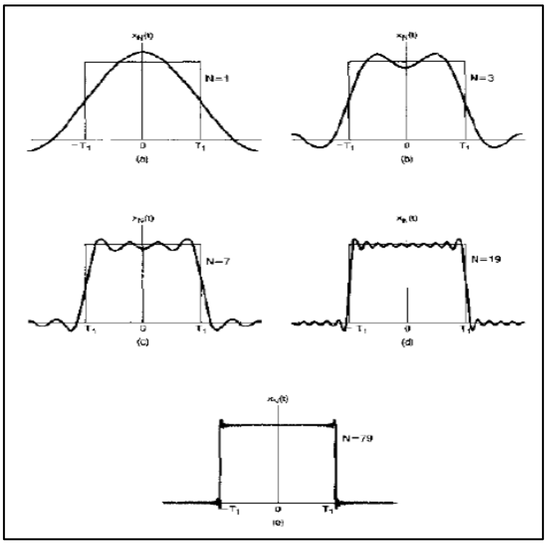
۶. سری فوریه در مهندسی برق

از آنجایی که در رشته مهندسی برق تمامی گیرنده ها ، فرستندها و پردازشگر های موج بر مبنای سیگنال های سینوسی و کسینوسی کار میکنند ، این المان ها نیاز به سیگنالهایی به شکل سینوسی و کسینوسی دارند یعنی تقریبا سیگنال های خارج از این فرم را نمیشناسند . ولی در عمل سیگنالها بنا به دلایلی به فرم سینوسی و کسینوسی نیستند . برای مثال سیگنالهای فرستاده شده از یک ماهواره ی فضایی به دلیل نویز های موجود در سر راه اعم از نور خورشید ، میدان مغناطیسی حاصل از جاذبه ی زمین ، میدان مغناطیسی های ایجاد شده توسط دست بشر در اتمسفر ، طوفان های هوایی و غیره دچار مشکلاتی اعم از گسستگی ، تعریف نشدگی ، مشتق ناپذیری و غیره می شود و در حالیکه سیگنالی با این شرایط برای مدارات الکترونیکی گیرنده ها و پردازشگرها قابل فهم نیست . برای حل این چنین مشکلات از سری فوریه استفاده می کنیم .

اصل عمل سری فوریه با استفاده از تقریب زدن می باشد یعنی با داشتن اصل خود سیگنال دریافتی ، سیگنال جدیدی شبیه به آن سیگنال تقریب میزنیم . سری فوریه در کل به فرم زیر میباشد:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right)$$

در سری فوریه اولین تقریبی که زده میشود تقریب a_0 می باشد یعنی فارغ از هر گونه اطلاعات سیگنال فقط میانگین سیگنال اصلی در نظر گرفته می شود . تقریب بعدی توسط اولین جمله پایه ی کسینوسی یعنیa_1 انجام می پذیرد که در این حالت سیگنال تقریب زده شده سوار سیگنال اصلی میشود که در سری فوریه هرچقدر با میل کردن به سمت بی نهایت در جملات سری این تقریب با افزایش فرکانس و کاهش دامنه ی شکل موج تقریب زده شده در بینهایت شکل موج شبیه سیگنال اصلی می شود . از طرفی دیگر چون سری های فوریه همگرایی سریعتری دارند در چند جمله اول سیگنال تقریب زده شده به سیگنال اصلی نزدیک می شود . بدین ترتیب تمامی مشکلات موجود در سیگنال دریافتی توسط سری فوریه حل میشود و این سیگنال تقریب زده شده قابل استفاده برای گیرنده ها و پردازشگرها می باشد . این فرآیند در شکل ۳ نشان داده شده است .



شکل (۳) : همگرایی سری فوریه موج مستطیلی (تقریب سری محدود به ازای چند مقدار N)

۶-۱. سری فوریه در فشرده سازی فایل های صوتی

سری فوریه می تواند هر سیگنالی را به صورت جمعی از سیگنال های سینوسی و کسینوسی بنویسد . برای مثال اگر صدای یک انسان توسط یک ضبط کننده ضبط شود میتوانیم سری فوریه آن را پیدا کنیم که شاید شبیه مثال زیر باشد :

Voice: sin(x) +1/10 sin (2x) + 1/100 sin (3x) + ...

و این مدل تعاملی یا متقابل نشان میدهد که چگونه وقتی از پایه های سینوسی و کسینوسی در سری بالا استفاده میشود ، شکل مربوط به سینوس و کسینوس به شکل اصلی (در مثال بالا صدای انسان) نزدیکتر و نزدیکتر میشود و ما توسط سری فوریه برآنیم که شکل را تقریب بزنیم . یکی از کاربردهای واضح سری فوریه عمل فشرده سازی می باشد . فرمت فایل های صوتی mp3 به دلیل اشغال فضای کم در حافظه مربوطه مورد علاقه ی همگان قرار گرفته است ، که در آنها از عمل فشرده سازی استفاده می شود . شما یک صدا را انتخاب می کنید و سری فوریه آن را گسترش می دهید . آن بیشتر شبیه یک سری فوریه لامتناهی خواهد بود که سرعت همگرایی بیشتری دارد بطوریکه چند جمله اول برای باز تولید صدای اصلی کافی خواهد بود. بقیه جملات سری بدلیل نداشتن تاثیر زیاد ، گوش انسان را زیاد متاثر نمی کند یعنی گوش انسان فرق وجود این جملات را با نبودشان متوجه نخواهد شد . پس ما فقط چند جمله اول را ذخیره سازی خواهیم کرد زمانی که ما می خواهیم به آن صدا گوش کنیم و حافظه ی کمتری را اشغال کنیم .

۶-۲. سری فوریه در سیستم LTI

نظریه سامانه خطی تغییر ناپذیر با زمان ، مبحثی در ریاضیات کاربردی می باشد که دارای کاربرد در رشته هایی همچون پردازش سیگنال ، نظریه کنترل ، مدارها و لرزه شناسی می باشد . اینگونه سامانه ها ، خطی و نامتغییر با زمان می باشند . هر سیگنال متناوب دارای اهمیت عملی را میتوان با یک سری فوریه نمایش داد ، یعنی با جمع وزندار نمایی های مختلط هماهنگ ، که دوره تناوبی همانند سیگنال اصلی دارند . اگر ورودی یک سیستم LTI به صورت ترکیب خطی توابع نمایی مختلط متناوب سینوسی بیان شود ، خروجی را نیز میتوان به همان شکل بیان کرد و ضرایب خروجی را به روشهای سر راست بر حسب ضرایب ورودی بدست آورد . به عبارت دیگر ، اگر وروی یک سیستم LTI متناوب باشد ، خروجی نیز با همان دوره تناوب متناوب است ، و هر ضریب سری فوریه خروجی از ضریب یک عدد مختلط در ضریب متناظر سری فوریه ورودی به دست می آید، مقدار این ضریب تابعی از فرکانس مولفه

متناظر است . این تابع فرکانس ، مشخصه سیستم LTI است و پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می شود . از میان خواص اساسی سیستم ها دو خاصیت خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان ، در تحلیل سیگنال و سیستم به دو دلیل نقش اساسی دارند . اول اینکه فرایند های فیزیکی متعددی این خواص را دارند و بنابراین می توان به تفصیل تحلیل کرد ، و هم بینش شهودی نسبت به خواص آنها پیدا کرد و هم مجموعه ای از ابزارهای قدرتمند ایجاد کرد که هسته تحلیل سیگنال و سیستم را تشکیل می دهند . یکی از مشخصات مهم ضربه واحد ، در هر دو حوزه پیوسته در زمان و گسسته در زمان ، این است که سیگنالهای بسیاری را می توان به صورت ترکیب خطی ضربه های تاخیر یافته نشان داد . با استفاده از این مطلب و خواص جمع آثار و تغییر ناپذیری با زمان ، می توان هر سیستم LTI را با پاسخ آن به ضربه واحد به طور کامل مشخص کرد . این نمایش ، که در حالت گسسته در زمان جمع کانولوشن و در حالت پیوسته در زمان انتگرال کانولوشن نام دارد ، کار تحلیل سیستم های LTI را بسیار ساده می کند .

از مهمترین خواص این سامانه ها آن است که خروجی سامانه برابر است با کانولوشن ورودی و تابع پاسخ به ضربه سامانه . و همان طور که گفتیم دارای کاربردهای زیادی از جمله ، پردازش سیگنال ، نظریه کنترل ، مدارها و لرزه شناسی می باشد . اینگونه سامانه ها ، خطی و نامتغیر با زمان می باشند . و در ادامه یکی از این کاربردها را مورد بررسی قرار داده ایم .

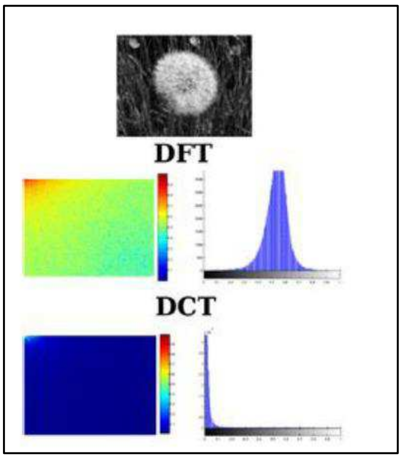
۶-۲-۱. پردازش سیگنال

پردازش سیگنال ها یا پردازش علائم به فرایند تجزیه ، تحلیل و تفسیر سیگنال ها اطلاق می شود . سیگنال مورد نظر می تواند صدا ، تصویر ، فیلم و یا هر سیگنال دیگری باشد .

این علم دارای دو شاخه اصلی می باشد :

- پردازش سیگنال های پیوسته
- پردازش سیگنال های گسسته

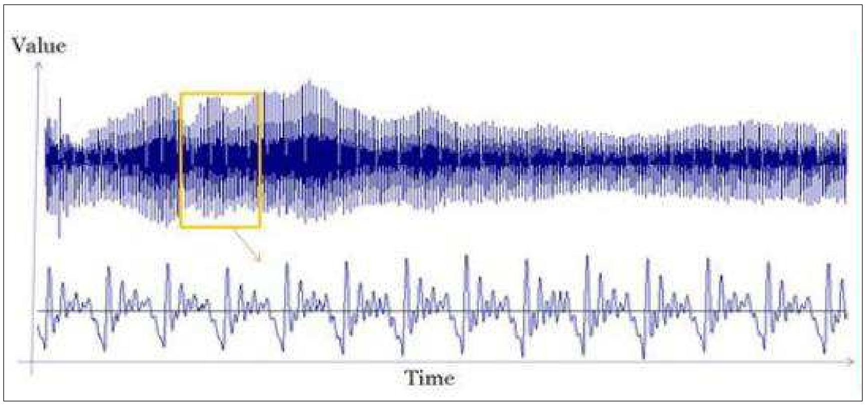
در سیگنال های پیوسته در زمان متغیر مستقل ، پیوسته است و این سیگنال ها در تمام مقادیر پیوسته ای که متغیر مستقل اختیار می کند تعریف می شوند . حال آنکه سیگنال های گسسته در زمان تنها در زمان های گسسته تعریف شده اند و در نتیجه این سیگنال ها تنها در مقادیر گسسته متغیر مستقل تعریف می شوند . و تصویری از این فرآیند را می توان در شکل ۴ مشاهده نمود .



شکل (۴)

۶-۳. سری فوریه در تشخیص سیگنال صدا

مهمترین ویژگی در ادای هر حرف فرکانس های تشکیل دهنده آن حرف می باشد . مثلا فرکانس اصلی حرف "آ" فرکانس های (۷۵۰ و ۱۱۵۰ و ۲۴۰۰) هرتز بوده و همین فرکانس ها برای حرف "او" (۴۰۰ و ۱۱۵۰ و ۲۳۰۰) هرتز می باشند . بنابراین آنچه باعث تفکیک دو حرف "آ" و "او" از همدیگر می شود ، فرکانس های تشکیل دهنده آن می باشد . از این رو در کاربرد های پردازش گفتار ، پیدا کردن فرکانس تشکیل دهنده یک سیگنال گفتاری از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است . سیگنال گفتار به شکل یک سیگنال زمانی در اختیار ما قرار دارد و تشخیص فرکانس های تشکیل دهنده یک سیگنال در حوزه زمانی غیر ممکن است . به عنوان مثال شکل ۲ را در نظر بگیرید؛ بخشی از این سیگنال به شکل زوم شده نشان داده شده است.



شکل (۲):سیگنال گفتار زمانی حرف "آ"

همانطور که از این شکل پیداست ، پیدا کردن فرکانس های تشکیل دهنده این سیگنال از روی سیگنال زمانی غیر ممکن است . از این رو نیاز به ابزار دیگری داریم که بتواند این کار را برای ما انجام دهد . فوریه نشان داد که هر تابع متناوب را می توان به شکل ترکیبی از امواج های سینوسی یا کسینوسی نشان داد که این مطلب را با نام سری های فوریه می شناسیم .

هر موج سینوسی می تواند به شکل یک صوت در خروجی بلند گو شنیده شود . با توجه به این حقیقت می توان دریافت که با استفاده از آنالیز فوریه یک سیگنال می توان موج های سینوسی تشکیل دهنده آن را استخراج کرد و از روی موج های سینوسی نیز می توان فرکانس های تشکیل دهنده سیگنال را به دست آورد ؛ با این حال نمی توان مستقیما از سری های فوریه برای این منظور استفاده کرد . چرا که سری های فوریه بر روی توابع متناوب تعریف شده اند و این در حالی است که ما در اینجا با سیگنالی سرو کار داریم که هیچ تابعی را نمی توان برای یک سیگنال گفتار تخمین زد . برای رفع این مشکل ابزاری با نام تبدیل فوریه معرفی شده است که بر روی داده های عددی (سیگنال) اعمال می شود .

رابطه زیر را در نظر بگیرید :

$$S(m) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{-\frac{j2\pi nm}{N}}$$

در این رابط N اندازه سیگنال ورودی ، S(n) مقدار سیگنال ورودی در نقطه n،m اندیس فرکانس ، S(m) اندازه فرکانس در اندیس mام می باشد . S(m) یک عدد مختلط است ، بنابراین برای به دست آوردن اندازه فرکانس در اندیس mام باید بزرگی این عدد مختلط را محاسبه کرد . بزرگی یک عدد مختلط از رابطه زیر به دست می آید :

$$\text{mag}(x) = \sqrt{\text{imag}(x)^2 + \text{real}(x)^2}$$

پس از آنکه تبدیل فوریه بر روی سیگنال ورودی اعمال شد ، بردار S دارای مقداری بسیار بزرگتر از صفر و در سایر نقاط بزرگی نزدیک به صفر خواهد داشت . بنابراین می توان برای پیدا کردن فرکانس های تشکیل دهنده یک سیگنال گفتار تبدیل فوریه را بر روی سیگنال ورودی اعمال کرده و پس از محاسبه بزرگی خروجی ، فرکانس های تشکیل دهنده آن سیگنال را از روی بزرگی هر فرکانس استخراج کرد .

۶-۴. سری فوریه در فشرده سازی سیگنال

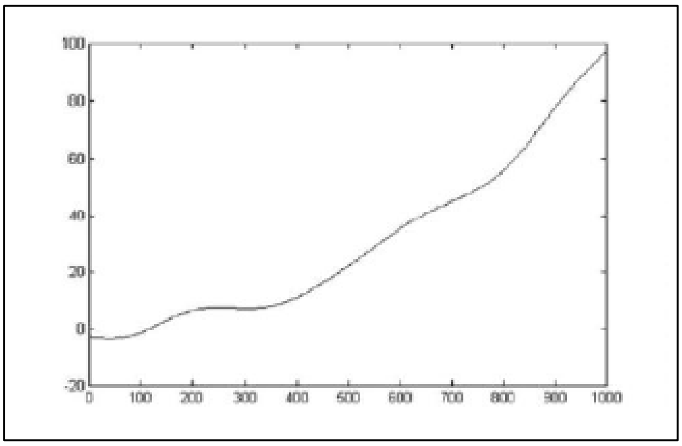
تبدیلات پیوسته روی توابع عمل می کنند و یک تابع را به تابع دیگر تبدیل می کنند . به عنوان مثال می توان به تبدیل لاپلاس و تبدیل های فوریه اشاره کرد . اما تبدیلات گسسته بر روی بردار ها عمل می کنند و یک بردار را به بردار دیگر تبدیل می کنند .

از نمونه های تبدیلات گسسته می توان به موارد زیر اشاره کرد :

۱) تبدیل فوریه گسسته سینوسی
۲) تبدیل فوریه گسسته کسینوسی
۳) تبدیل فوریه گسسته معمولی
۴) تبدیل Z
۵) و...

این تبدیلات دارای کاربرد های متفاوتی در مباحث مختلف می باشند . خصوصاً تبدیلات فوریه گسسته که در پردازش سیگنال استفاده می شوند ؛ یکی از کاربرد های آن ، کاربرد تبدیلات گسسته فوریه در فشرده سازی سیگنال می باشد . فرض کنید یک سیگنال ۱۰۰۰ نمونه ای بصورت زیر داشته باشیم ؛ که در شکل ۳ این سیگنال نشان داده شده است .

S = [-0.014122147477075, 1.210763185242995, 4.472601080653996,......, 9.999969999999999]

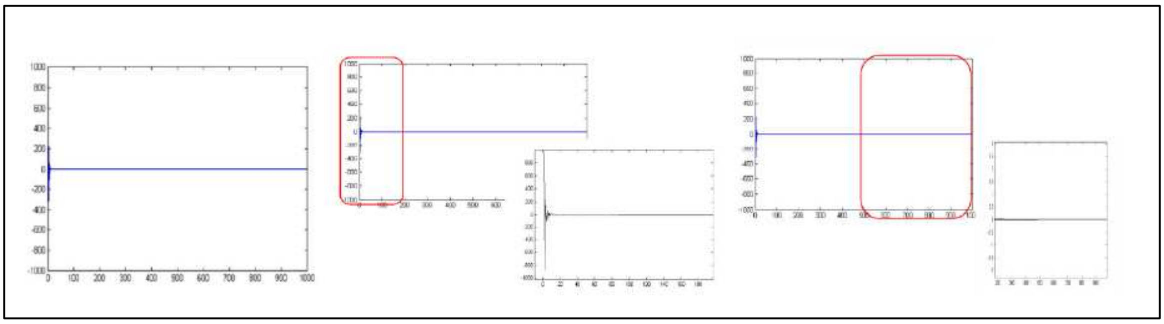


شکل (۳) : سیگنال S

برای ذخیره این سیگنال به یک آرایه ۱۰۰۰تایی از اعداد دوتایی نیاز داریم . یعنی ۸۰۰۰ بایت ؛ اما اگر اندکی تفاوت را تحمل کنیم ، آنگاه می توانیم با مقدار حافظه کمتری این سیگنال را ذخیره کنیم . برای این منظور از تبدیل فوریه کسینوسی استفاده می کنیم .

تبدیل فوریه کسینوسی سیگنال فوق ، یک بردار ۱۰۰۰ تایی بصورت زیر است که در شکل نشان داده شده است .

f_c = [959.7517974349536, -867.4489070369434, 227.0144834581562 , ... ,-0.000000026322081]

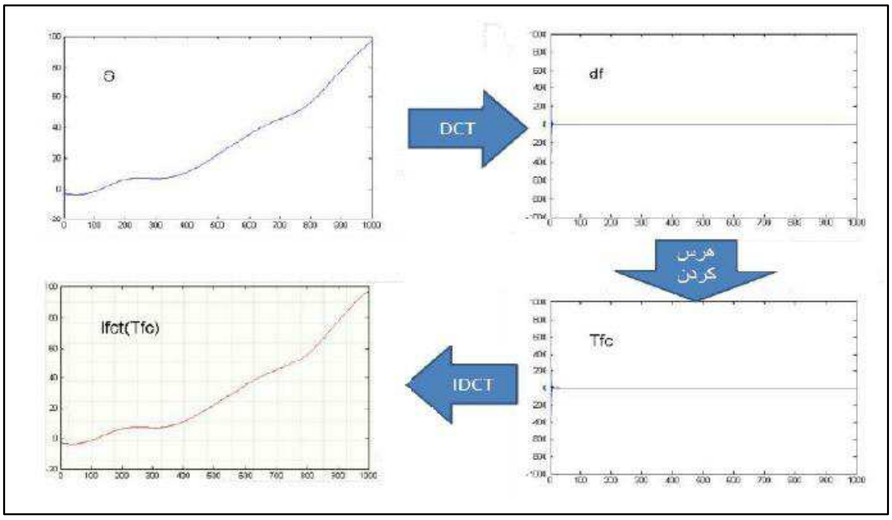


شکل (۴) : سیگنالf_c

بعد از اینکه تبدیل فوریه کسینوسی سیگنال ، یعنی بردار fc را به دست آوردیم ، عناصر کوچک آن را حذف می کنیم . به عبارت دیگر عناصری از بردار که قدر مطلق آنها کمتر از مقدار T است را برابر صفر قرار می دهیم . این بردار را Tf_c می نامیم . توجه شود که با تبدیل معکوس بردارfc می توان بردار S را مجددا به دست آورد . از سوی دیگر بردار Tfc با بردارf_c اختلاف ناچیزی دارد . بنابراین تبدیل معکوس Tf_c با بردار S اختلاف ناچیزی دارد. حال با توجه به توضیحات داده شده ، بیشتر مولفه های Tf_c برابر صفر می باشد . لذا ذخیره آن به فضای کمتری نیاز دارد . بنابراین به جای بردار S بردار Tf_c را ذخیره می کنیم .

به عنوان مثال داریم :

به ازای T=0.9 تعداد ۹۷۱ مولفه صفر میشود ؛ یعنی ۹۷۱ مولفه از نظر قدر مطلق از T=0.9 کوچکتر می باشند . ذخیره ۲۹ مولفه باقی مانده به ۲۹ متغیرDouble و ۲۹ متغیر صحیح نیاز دارد ، که در کل ۲۹۰ بایت می شود . یعنی به جای ۸۰۰۰ بایت برای ذخیره S می توان با ۲۹۰ بایت بردارTf_c را ذخیره کرد . از سوی دیگر بردار S را با اندکی اختلاف و با استفاده از بردار Tf_c می توان ساخت . که در شکل ۵ نشان داده شده است .



شکل (۵)

نتیجه گیری و پیشنهادات

به طور حتم یکی از مهمترین و اساسی ترین بخشها در توسعه و شکوفایی یک صنعت ، قابلیت توصیفی آن در مباحث پایه ای و زیر ساختی موضوع مورد بررسی است و از آنجا که از ریاضیات برای بیان صریح و دقیق اصول مهندسی در اغلب رشته ها استفاده می شود ، می توان اذعان داشت ، ریاضیات در پیشبرد صنعت نقشی اساسی و تعیین کننده دارد ؛ اما خود بیان و آنالیز موضوع و تطابق بحث عامل مهمی است که معمولا در حوزه فیزیک جا می گیرد و دانشجویان کمتری به دنبال این موارد رفته ، در نتیجه از کاربرد های این مباحث در علوم مهندسی اطلاعات بسیار کمی دارند ؛ به همین دلیل در این مقاله سعی شده است هم تئوری نظریه فوریه و هم کاربرد های آن بررسی شود .

امروزه کمتر شاخه ای از فیزیک ، ریاضیات یا صنعت و فن وجود دارد که در آن از سری های فوریه استفاده نشود از پیش بینی جزر و مد دریا که اهمیت آن روشن است تا اپتیک و ترمودینامیک و الکترونیک و غیره ؛ همه با قضیه فوریه قابلیت تحلیل ریاضی و بهینه سازی پیدا میکنند . قضیه فوریه این طور بیان میشود : هر تابع متناوب و پیوسته ، یک مقداری (signal – valued function) را میتوان به صورت مجموع محدود یا نا محدودی از توابع سینوسی و کسینوسی نشان داد به صورتی که آن امواج مضربهایی از فرکانس اصلی باشند .

در دنیا پدیده های طبیعی زیادی وجود دارند که از یک الگوی تکرار شونده (periodical) پیروی میکنند و هر چقدر هم که پیچیده باشند ، با یک سری در ریاضیات قابل توصیف هستند . پیشنهاد ما برای ادامه کار این است که این پدیده ای طبیعی به کمک ابزار ریاضی مدلسازی و بررسی شوند .

مراجع :

۱. *ریاضیات مهندسی پیشرفته ، تالیف دکتر عبدالله شیدفر*

2. *KREYSZIG, Erwin, Advanced Engineering Mathematics, WY: John, Wiley.*
3. *Alan V. Oppenheim, Alan S . Willsky , Hamid Nawab , Signals and Systems . 1983.*
4. *BRACEWELL, R. N .The Fourier Transform and Its Applications. 2nd e d. New York, NY: McGraw-Hill, 1986.*
5. *Churchill, R .V . and Brown .J . W . Fourier Series and Boundary value problems . 3rd e d . New York, NY : McGraw – Hill,1978 .*
6. *EDWARDS,R.E. Fourier Series: A Modern Introduction . 2nd e d . New York , NY : Springer – Verlag , 1979 .*
7. *GRAY , R . M . and GOODMAN .J.W. Fourier Transforms : An Introduction for Engineers .Boston , MA : Kluwer Academic Publishers , 1995 .*
8. *LIGHTHILL , M.J. Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions . New York , NY :Cambridge University press . 1962.*
9. *PAPOULIS , A . The Fourier Integral and Its Applications . New York , NY : McGraw – Hill ,1987 .*
10. *WALKER , P.L . The Theory of Fourier Series and integrals. New York, NY: John Wiley. 1986.*
11. *Grattan – GUINESS , Joseph Fourier , 1768 – 1830 (Cambridge , MA: The MIT Press , 1972) ; G . F . Simmons, Differential.*

12. *DYM and H . P . MCKEAN ,Fourier Series and integrals (New York : Academic press , 1972)*
13. *P . MION , Are All Too Real To DEEPWATER Sailors ‘’ ‘’Nightmare Waves , Smithsonian . Feb .1978*

Fourier series in Engineering Sciences

Burhan Azarm
Faculty of Engineering , University of Urmia, mb_azarm@yahoo.com

Abstract. The relatively complicated theory of Fourier series, but the series is simple to use. Fourier series, Taylor series is more comprehensive because many discrete periodic functions that are of practical importance to the Fourier series expansion, but not Taylor expansion. Numerous problems in science and engineering that results in a series and Fourier sine signals, plays a major role in them.

Since all receptors in electrical engineering, send and processors sine and cosine wave signals operate on the basis of the elements required to signals in the form of sine and cosine signals out there that almost do not know this form. But in practice sine and cosine signals are reasons to form. For example, signals sent from a satellite in space because of the noise the way, whether from sunlight, magnetic field of gravity, magnetic field created by the human hand in the atmosphere, weathering and other problems, including of dissociation, defined Uninsured, integral and derivative etc., while a signal with this conditions for receiver and processor circuitry is incomprehensible. To solve these problems we use the Fourier series. In this study, Fourier series and its applications in industry and engineering sciences is evaluated.

Keywords: Fourier series, Fourier transform, engineering, signal analysis