

# شبیه‌سازی مخازن نفتی شکافدار با استفاده از عنصر (جزء) محدود با توابع شکل لگاریتمی

علی قاسمی‌نژاد رائینی، محسن مسیحی\*، اکبر شجاعی

تهران، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی شیمی و نفت

پیام نگار: masihi@sharif.edu

## چکیده

این تحقیق، روش عددی جدیدی برای حل معادله جریان تک فاز در مخازن نفتی ارائه می‌کند که قادر است رفتار مخزن را به صورت مناسب پیش‌بینی کند. در این روش از فرمولبندی عنصر محدود گالرکین در فضای لگاریتمی برای محاسبه توزیع فشار استفاده می‌شود و منجر به تقریب فشار سیال به صورت تابعی لگاریتمی از فاصله تا چاه می‌گردد. این تقریب با رفتار فشار در مخازن، همخوانی دارد و باعث افزایش دقت محاسبات شبیه‌سازی می‌شود. این روش برای حل معادلات تخلخل دوگانه در مخازن شکافدار با برنامه‌نویسی شیء‌گرا پیاده‌سازی و بر چند مدل نمونه آزمون شده است. نتایج حاصله با حل تحلیلی و روش اختلاف محدود مقایسه شده‌اند. این مقایسه، برتری روش عنصر محدود لگاریتمی را در مقایسه با روشهای معمول در محاسبه توزیع فشار مخزن نشان می‌دهد. از این روش، با ترکیب با سایر روش‌های عددی (روش حجم کنترل)، می‌توان برای شبیه‌سازی چندفازی مخازن استفاده کرد.

کلمات کلیدی: روش جزء محدود، شبیه‌سازی مخازن نفتی، مدل تخلخل دوگانه، توابع شکل لگاریتمی

## ۱- مقدمه

محدود و حجم محدود اخیراً در مدل‌سازی حرکت سیال در پوسته زمین مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱-۶]. نتایج حاصل از تلاش محققان در این زمینه نشان می‌دهد که روش جزء محدود منجر به نتایج بهتری، در مقایسه با روش‌های مرسوم مانند روش اختلاف محدود، می‌شود. دلایل متعددی برای موفق بودن روش جزء محدود می‌توان ارائه نمود که از آن جمله می‌توان به انعطاف پذیر بودن جزء محدود نسبت به محیط‌های پیچیده زمین‌شناسی و دقت بالاتر آن در حل معادلات دیفرانسیل اشاره کرد [۱].

علی‌رغم مزیت‌های نسبی روش‌های معمولی جزء محدود و حجم محدود در مقایسه با روش اختلاف محدود، در این روش‌ها نیز مانند روش اختلاف محدود، به علت مشکلات شبیه‌سازی ناحیه اطراف

امروزه شبیه‌سازی‌های مخازن هیدروکربنی به صورت گسترده‌ای در پیش‌بینی رفتار مخازن مورد استفاده قرار می‌گیرند و از نتایج شبیه‌سازی به عنوان ابزاری برای تصمیم‌گیری در مورد برنامه تولید از مخزن استفاده می‌شود. علاوه بر این، در سالهای اخیر ترکیب الگوریتم‌های بهینه‌سازی با نرم‌افزارهای شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی فرایندهای صنایع بالادستی نفت مورد توجه قرار گرفته که هم نیازمند الگوریتم‌های بهینه‌سازی قوی و هم شبیه‌سازی‌های دقیق و پرسرعت است. اگر چه اکثر شبیه‌سازی‌های مخازن هیدروکربنی، به علت سادگی، از روش اختلاف محدود برای شبیه‌سازی مخازن استفاده می‌کنند، ولی روش جزء محدود و روش‌های ترکیبی جزء

$$U^*(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x) \quad (2)$$

که در آن رابطه  $U^*$  یک جواب تقریبی است که در قالب  $C_i$  ها، پارامترهای ثابتی که باید مشخص شوند، و  $N_i(x)$  ها، توابع آزمونی نوشته شده است. شرایط عمده‌ای که توابع آزمون باید داشته باشند تا مورد قبول واقع شوند این است که این توابع باید روی دامنه مورد نظر پیوسته باشند و در شرایط مرزی مشخصی صدق کنند. علاوه بر این، توابع آزمونی باید با فیزیک مسئله در حالت کلی سازگاری داشته باشند. حال با جایگزینی جواب فرضی در معادله (۱) یک خطای باقیمانده  $R(x)$  به دست می‌آید که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$R(x) = D[U^*(x), x] \neq 0 \quad (3)$$

توجه شود که مقدار باقیمانده تابعی از مجهولات مسئله است، روش باقیمانده‌های وزنی ایجاب می‌کند که این مجهولات، طوری به دست آیند که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

در اینجا،  $w_i(x)$  نمایانگر  $n$  تابع وزنی اختیاری است. مشاهده می‌شود که انتگرال گیری معادله (۴)، منجر به  $n$  معادله جبری می‌شود که برای به دست آوردن تعداد  $n$  مجهول،  $c_i$ ، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روش باقیمانده‌های وزنی گالرکین توابع وزن ( $w_i$ ) با توابع تقریب ( $N_i$ ) به طور یکسان انتخاب می‌شوند. بنابراین پارامترهای مجهول به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = \int_a^b N_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

که در نهایت منجر به پیدایش  $n$  معادله جبری برای به دست آوردن پارامترهای مجهول مسئله می‌شود. در اینجا به برخی مدل‌های متداول اشاره می‌گردد.

چاه، اثر تزریق و یا تولید در بلوک‌های شامل چاه به روش نیمه تحلیلی و با استفاده از رابطه‌های اندیس چاه اعمال می‌شوند. به خاطر تقریبی بودن رابطه اندیس چاه و عدم وابستگی آن به زمان، نتایج شبیه‌سازی می‌تواند با نتایج واقعی متفاوت باشد. استفاده از توابع تقریب لگاریتمی در روش جزء محدود، این امکان را فراهم می‌کند که ناحیه اطراف چاه را همانند سایر نقاط مخزن با استفاده از حل عددی معادلات پاره‌ای، شبیه‌سازی کرد تا نیازی به روابط کمکی اندیس چاه برای بلوک‌های شامل چاه نباشد.

در این تحقیق، روش جزء محدود با تقریب لگاریتمی برای شبیه‌سازی مخازن شکافدار به کار برده شده است. در این روش، ناحیه اطراف دهانه چاه، مانند سایر نقاط مخزن، با استفاده از حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مربوطه شبیه‌سازی می‌شود و در عین حال، به بلوک‌های با اندازه خیلی ریز در نزدیک دهانه چاه نیازی نیست. دلیل این امر، این است که فشار در اطراف چاه به صورت لگاریتمی تقریب زده شده است که با رفتار لگاریتمی فشار اطراف چاه، سازگاری دارد.

## ۲- روش جزء محدود لگاریتمی برای مدل سازی جریان یک فازی

در این تحقیق، روش باقیمانده‌های وزنی گالرکین به عنوان یک ابزار برای روش جزء محدود مورد استفاده قرار گرفته است. روش گالرکین یک زیرشاخه از روش باقیمانده‌های وزنی است که خود یک روش تقریبی است که از آن، برای حل مسائل مقدار مرزی استفاده می‌شود. در این روش از یک سری توابع آزمونی استفاده می‌شود که شرایط مرزی از پیش تعیین شده‌ای را ارضاء می‌کنند. از این توابع آزمونی در یک فرمولبندی انتگرالی برای حداقل کردن خطا روی کل دامنه استفاده می‌شود. اگر یک معادله دیفرانسیل به شکل زیر داشته باشیم:

$$D[U(x), x] = 0 \quad a < x < b \quad (1)$$

که باید شرایط مرزی خاصی را ارضاء کند، روش باقیمانده‌های وزنی به دنبال جواب تقریبی به شکل زیر است:

### 1. Well Index

که توزیع لگاریتمی برای فشار، محدود به ناحیه اطراف چاه می‌باشد و نمی‌توان یک نقطه خاص را برای شعاع  $r$  معرفی کرد که به تبع آن یک مختصات واحد در فضای استوانه‌ای داشته باشیم. به عبارت دیگر بسته به اینکه جزء در نزدیکی چه چاهی واقع شده است، فرمول محاسبه فاصله از چاه برای جزء و لذا برای مختصات محلی آن نیز تغییر می‌کند. برای حل این مشکل لازم است که بعد از مش بندی مخزن، جزء‌ها، بسته به اینکه در شعاع تخلیه کدام چاه واقع شده‌اند به دسته‌های مختلفی تقسیم شوند و برای هر دسته از جزء‌ها انتقال از فضای کارترین به فضای استوانه‌ای براساس فاصله از چاهی که فشار این ناحیه از مخزن را تحت تاثیر قرار می‌دهد انجام شود.

در صورت استفاده از مش بندی بدون ساختار، نیازی به استفاده از جزء‌های که دقیقاً مستطیلی باشند وجود ندارد. توجه شود که منظور از شکل مستطیلی، مختصات لگاریتمی است زیرا در دستگاه مختصات کارترین به شکل قطاع‌هایی از دایره ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال، انتخاب جزئی که چاه، داخل آن قرار گیرد باعث می‌شود که رابطه یکتایی بین مختصات محلی و مختصات ذاتی جزء وجود نداشته باشد و در جزء محدود لگاریتمی، منجر به جواب‌های غیر قابل پیش‌بینی می‌شود.

### ۳- معادلات دیفرانسیل حاکم برای مدل تخلخل دوگانه

کازمی و همکارانش [۷] (۱۹۷۶) مدل تخلخل دوگانه را برای شبیه‌سازهای چندفازی در ابعاد مخزن بنا نهادند. در این مدل هر جزء از مخزن شکافدار به صورت دو محیط پیوسته با خواص متفاوت که دارای فشار و اشباع‌شدگی‌های متفاوت می‌باشند در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، فرضیات متفاوتی به کار برده شده است، از جمله اینکه، بلوک‌های ماتریس، همگن یا ایزوتروپیک می‌باشند، شکاف‌ها از یک محیط پیوسته تشکیل شده‌اند، جریان سیال بین (ماتریس-شکاف) و (شکاف-شکاف) اتفاق می‌افتد، ماتریس‌ها دارای قابلیت ذخیره‌پذیری بالا و نفوذپذیری کم می‌باشند در حالی که شکاف‌ها حجم ذخیره کم و نفوذپذیری بالایی دارند و جریان به طرف چاه از طریق شبکه شکاف انجام می‌شود. در بسیاری از مسائل کاربردی، این مدل ایده‌آل کفایت می‌کند.

در این قسمت، معادلات دیفرانسیل در حالت کلی و با استفاده از

مخزن ایده‌آل استوانه‌ای یک چاه: برای اعمال تقریب لگاریتمی از توابع شکل تعمیم یافته ایزوپارامتریک استفاده می‌شود که در آن، تقریب لگاریتمی با تغییر در نحوه تقریب مختصات، حاصل می‌گردد. در روش جدید، تقریب مختصات محلی به جای تقریب فاصله از چاه ( $r$ ) به صورت یک چند جمله‌ای از مختصات ذاتی جزء ( $S$ ) و لگاریتم فاصله از چاه ( $\ln r$ ) به صورت یک چندجمله‌ای از مختصات ذاتی جزء تقریب زده می‌شود:

$$\ln r = \sum_{i=1}^q N_i \ln(r_i) \quad (6)$$

می‌توان نشان داد که اینگونه تقریب مختصات محلی، در نهایت، منجر به یک رابطه خطی بین فشار و لگاریتم فاصله از چاه می‌شود. به دلیل اینکه در عمل، توزیع فشار در اطراف هر چاه با لگاریتم فاصله از چاه رابطه‌ای تقریباً خطی دارد، استفاده از روش جزء محدود لگاریتمی منجر به افزایش قابل توجه دقت شبیه‌سازی می‌شود. قابل ذکر است که تقریب لگاریتمی فقط در جهت محور  $r$  قابل کاربرد است و در دو جهت دیگر ( $\theta$  و  $z$ ) کاربرد ندارد. به عبارتی:

$$\theta = \sum_{i=1}^q N_i \theta_i, \quad z = \sum_{i=1}^q N_i z_i \quad (7)$$

بنابراین اگر به جای آنالیز جزء محدود در فضای استوانه‌ای  $r, \theta, z$  آنالیز را در فضای جدید  $(\ln r, \theta, z)$ ، که از این پس در این تحقیق به نام فضای لگاریتمی نامیده می‌شود، انجام دهیم (یعنی همان تقریب‌های معمول استفاده شده در جزء محدود را به کار ببریم) و سپس نتایج را به فضای واقعی برگردانیم، به هدف خود، که استفاده از تقریب لگاریتمی در راستای فاصله از چاه است، می‌رسیم. لازم به ذکر است که از دستگاه مختصات استوانه‌ای تنها برای به دست آوردن فرمول بندی در فضای لگاریتمی و ساده‌سازی در تشریح مسئله استفاده شده و در عمل، تبدیل مختصات، مستقیماً از فضای کارترین به فضای لگاریتمی انجام می‌شود.

مشکل اصلی در تعمیم این رویه به مخازن واقعی برای پیاده‌سازی تقریب لگاریتمی در مورد مخازن دارای بیش از یک چاه این است

به عبارت دیگر، سرعت حرکت سیال در راستای عمودی باید برابر با صفر باشد. برای اعمال شرایط اولیه به شبکه شکاف به صورت ریاضی، می‌توان نوشت:

$$\left[ k_z \left( \frac{k_r}{\mu B} \right)_{af} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial z} \right]_{r=0} = 0 \quad (12)$$

برای مقدار دهی اولیه به ماتریس‌ها، جریان بین ماتریس و شکاف در حالت تعادل، صفر در نظر گرفته می‌شود بنابراین:

$$k_m \left( \frac{k_r}{\mu B} \right)_{amf} \sigma \nabla \Phi_{amf} = 0 \quad (13)$$

شرایط مرزی باید برای زمان‌های بزرگتر از صفر مشخص شوند. در مسائل مربوط به مهندسی مخزن با چهار نوع مختلف از شرایط مرزی مواجه می‌شویم.  
مرزهای با جریان ورودی ثابت:

$$\left[ k_\xi \left( \frac{k_r}{\mu B} \right)_{af} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial \xi} \right]_{\xi=b} = C \quad (14)$$

مرزهای با فشار ثابت:

$$[\Phi_{af}]_{\xi=b} = C \quad (15)$$

مرزهای بدون جریان:

$$\left[ k_\xi A \left( \frac{k_r}{\mu B} \right)_{af} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial \xi} \right]_{\xi=b} = 0 \quad (16)$$

مرز با ناحیه آبد:

$$\left[ k_\xi A \left( \frac{k_r}{\mu B} \right)_{af} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial \xi} \right]_{\xi=b} = q_{aq} \quad (17)$$

مدل تخلخل دوگانه نوشته شده‌اند [۷]. معادلات مربوط به مخازن معمولی، یک حالت خاص از این معادلات می‌باشند که در آن جملات مربوط به ماتریس حذف شده باشند. معادلات جریان تک فاز نیز حالت خاصی از این معادلات می‌باشند که در آن نفوذپذیری نسبی و همچنین اشباع شدگی، مساوی یک است، لذا معادله جریان در شبکه شکاف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \cdot [T_{af} \nabla \Phi_{af}] + \frac{\tau_{amf}}{B_\alpha} + \sum_{i=1}^{N_w} \frac{q_{af i}}{B_\alpha} \delta(\bar{x}, \bar{x}_{wi}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_\alpha}{B_\alpha} \right)_f \quad (8)$$

که در آن  $\delta(\bar{x}, \bar{x}_{wi})$  تابع دلتا دیراک و  $N_w$  مشخص‌کننده تعداد کل چاه‌های موجود در مخزن است.  $T_{af}$  و  $\Phi_{af}$  به ترتیب، پتانسیل و گذردهی فاز  $\alpha$  در شبکه شکاف می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Phi_{af} &= p_{af} - \gamma_{af} D \\ T &= k_f \left( \frac{k_r}{\mu B} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

معادله جریان بین ماتریس و شکاف به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$k_m \left( \frac{k_r}{\mu B} \right)_{amf} \sigma \nabla \Phi_{amf} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_\alpha}{B_\alpha} \right)_m \quad (10)$$

همچنین معادله جریان چاه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Q_{Ti} = \sum_a \left\{ \sum_{k=1}^{KK} q_{ak} + c_a \frac{\partial p_{bh}}{\partial t} \right\}_i \quad i = 1, 2, \dots, N_w \quad (11)$$

معادله بالا برای تمام چاه‌ها نوشته می‌شود و  $KK$  نشان‌دهنده تعداد لایه‌هایی است که یک چاه در آنها شبکه‌ای شده است.  
مخزن در ابتدا باید از لحاظ نیروهای موئینه و ثقلی در تعادل باشد.

#### 1. Dirac-Delta Function

$$\nabla \cdot (T_{af} \nabla \Phi_{af}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r T_{af} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( T_{af} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( T_{af} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial z} \right) \quad (20)$$

برای به دست آوردن فرمولبندی گالرکین، توابع وزن ( $W_i$ ) در معادله بالا با توابع تقریب ( $N_i$ ) جایگزین می‌شوند. توجه شود که با استفاده از خواص تابع دلتا دیراک می‌توان جمله مربوط به چاه را از داخل انتگرال بیرون آورد [۸]. فرمولبندی ضعیف<sup>۱</sup> از قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری و قضیه (گوس - گرین) به دست می‌آید [۹-۱۱]:

$$\begin{aligned} & \iiint_{V^{(e)}} \left\{ \left( T_{af} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( T_{af} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial \theta} \right) + \left( T_{af} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_{af}}{\partial z} \right) \right\} r dr d\theta dz \\ & = - \iint_{S^e} r N_i \mathbf{v}_{af} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_{V^{(e)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_a}{B_a} \right)_f - \frac{\tau_{af}}{B_a} \right\} \\ & \quad r dr d\theta dz - N_{iw} \frac{q_{af}}{B_a} \\ & \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (21)$$

جمله بردار سرعت سیال است که با استفاده از قانون داریسی به دست می‌آید:

$$\mathbf{v}_{af} = -T_{af} \nabla \Phi_{af} \quad (22)$$

جمله مشتق نسبت به زمان را می‌توان با استفاده از مشتق به صورت زیر نوشت [۱۲]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_a} \frac{\partial S_a}{\partial t} = C_{pa} \frac{\partial P}{\partial t} + C_{Sa} \frac{\partial S_a}{\partial t} \quad (23)$$

که در آن داریم:

در حالت کلی برای هر گره در جریان دوفازی، نه متغیر وجود دارد که چهارتای آنها مربوط به شکاف می‌باشند و اینها عبارتند از  $P_{wf}$ ,  $P_{wm}$ ,  $P_{om}$  و همچنین چهار متغیر ماتریس شامل  $P_{of}$ ,  $S_{wf}$ ,  $S_{of}$  و  $S_{wm}$ ,  $S_{om}$  وجود دارند و در نهایت، متغیر نهم، متغیر چاه است که برای چاه‌های با کنترل روی جریان چاه، فشار ته چاه  $P_{bh}$  می‌باشد. در معادلات ارائه شده، دو معادله برای شبکه شکاف، دو معادله برای رابطه بین ماتریس و شکاف و یک معادله برای جریان چاه را شامل می‌شود. چهار معادله جانبی دیگری که در شبیه‌سازی دوفازی مخازن شکافدار لازم می‌باشند عبارتند از  $S_{of}$  و  $S_{om}$ ,  $P_{cm} = P_{om} - P_{wm}$ ,  $P_{cf} = P_{of} - P_{wf}$  با احتساب معادلات بالا تعداد مجهولات و تعداد معادلات ارائه شده برابر می‌شوند. همان‌طور که در قسمت‌های بعدی گفته خواهد شد، در صورت محاسبه فشار ماتریس و شکاف، سایر مجهولات به صورت صریح قابل محاسبه خواهند بود.

#### ۴- گسسته سازی با جزء محدود تقریب لگاریتمی

دامنه‌ای که در آن، معادله (۸) کاربرد دارد ابتدا باید توسط یک مش جزء محدود به عناصر کوچکی تقسیم شوند و سپس در آن، فشار در هر جزء به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\Phi(\ln r, \theta, z) = \sum_{i=1}^M N_i(\ln r, \theta, z) \Phi_i \quad (18)$$

که در آن  $M$  تعداد گره‌ها در هر جزء است. اشباع‌شدگی سیال به شیوه مشابهی تقریب زده می‌شود. با به کارگیری روش باقیمانده‌های وزنی گالرکین (MWR) بر روی معادله (۸)،  $M$  معادله باقیمانده زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} R_i = & \iiint_V \left\{ \nabla \cdot (T_{af} \nabla \Phi_{af}) + \frac{\tau_{af}}{B_a} + \sum_{i=1}^{N_w} \frac{q_{af} i}{B_a} \delta(\bar{x}, \bar{x}_{wi}) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_a}{B_a} \right)_f \right\} w_i r dr d\theta dz \\ & i = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن جمله  $\nabla \cdot (T_{af} \nabla \Phi_{af})$  در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌گردد:

که در آن  $F_{Fij}^e$  به صورت رابطه (۲۷) به دست می‌آید:

$$F_{Fij}^e = \iiint_{V^{(e)}} \left\{ T_{af r} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( T_{af \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + T_{af z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right\} r dr d\theta dz$$

$$\Rightarrow F_{Fij}^e = \iiint_{V^{(e)}} \left( T_{af r} \frac{\partial N_i}{\partial \ln r} \frac{\partial N_j}{\partial \ln r} + T_{af \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + r^2 T_{af z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d \ln r d\theta dz \quad (27)$$

بنابراین:

$$F_{Fij}^e = \sum_{n=1}^q w_n \times |\mathbf{J}| \times f_{Fij}(\mathbf{s}_n) \quad (28)$$

به طوری که:

$$f_{Fij}(\mathbf{s}_n) = \left( T_{af r} \frac{\partial N_i}{\partial \ln r} \frac{\partial N_j}{\partial \ln r} + T_{af \theta} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + r^2 T_{af z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, M \quad (29)$$

در معادله (۳۱)  $|\mathbf{J}|$  دترمینان جمله ژاکوبین در دستگاه مختصات لگاریتمی است که برای تبدیل انتگرال بر روی مختصات ذاتی جزء به انتگرال بر روی دستگاه محلی استفاده می‌گردد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln r}{\partial s_1} & \frac{\partial \theta}{\partial s_1} & \frac{\partial z}{\partial s_1} \\ \frac{\partial \ln r}{\partial s_2} & \frac{\partial \theta}{\partial s_2} & \frac{\partial z}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \ln r}{\partial s_3} & \frac{\partial \theta}{\partial s_3} & \frac{\partial z}{\partial s_3} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$f = f(S_{af}, P_{af}) = \left( \frac{\phi S_a}{B_a} \right)_f \quad (24)$$

تا اینجا یک فرمولبندی کلی از روش جزء محدود گالرکین ارائه شد، همان‌طور که از معادلات بالا پیداست، جمله مربوط به مشتق زمان دست نخورده باقی مانده است. برای گسسته‌سازی این جمله معمولاً از روش اختلاف محدود استفاده می‌شود و بسته به شیوه نوشتن معادلات اختلاف محدود، فرمولبندی ضمنی یا صریح به دست می‌آید. برای شبه‌سازی جریان چند فاز حرکت سیال در محیط متخلخل، فرمولبندی‌های کاملاً ضمنی<sup>۱</sup> و (فشار-ضمنی اشباع-صریح)<sup>۲</sup> به شیوه مشابهی با روش اختلاف محدود به دست می‌آیند.

توجه شود که معادله (۲۱) یک دستگاه معادلات شامل  $M$  معادله دیفرانسیل معمولی برای هر فاز ( $a$ ) را نشان می‌دهد، که به راحتی توسط روشهای مختلفی قابل حل است. ساده‌ترین این روش‌ها، روش اولر است که از روش اختلاف محدود پس‌رو مرتبه یک برای مشتق زمان استفاده می‌کند. روش‌های دقیق‌تری مانند اختلاف محدود پس‌رو مرتبه دو، کرانک-نیکلسون و یا رانگ-کوتا هم قابل استفاده می‌باشند. از آنجا که تعداد معادلات در آنالیز عنصر محدود، بسیار زیاد می‌باشند، روش رانگ-کوتا که هزینه محاسباتی زیادی دارد عملاً قابل استفاده نیست. روش کرانک نیکلسون نیز در بعضی مواقع، مشکل پایداری دارد. در این تحقیق، عمدتاً از تقریب مرتبه اول برای مشتق زمان استفاده می‌شود.

اگر در معادله (۲۱) از توابع تقریب برای بسط  $\Phi_{af}$  و  $S_{af}$  در قالب مقادیر آنها بر روی گره‌ها استفاده کنیم، برای هر جزء، یک دستگاه معادله به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$R_i = R_{Fi} + R_{Di} + R_{Bi} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (25)$$

تمام جملات معادله (۲۵) در زیر توضیح داده شده‌اند. شار درون جزئی  $R_{Fi}$  به صورت زیر لحاظ می‌شود:

$$R_{Fi} = \sum_{j=1}^M F_{Fij}^e \Phi_{af j} \quad (26)$$

1. Fully Implicit
2. IMPES

$$f_{acc.} = \sum_{j=1}^M N_j f_{acc.j} \Rightarrow F_{Di} = \iiint_{V^{(e)}} \left( \sum_{j=1}^M N_j f_{acc.j} \right) N_i r dr d\theta dz$$

$$\Rightarrow R_{Di} = \sum_{j=1}^M \left( \iiint_{V^{(e)}} N_i N_j r dr d\theta dz \right) f_{acc.j}$$

$$\Rightarrow R_{Di} = \sum_{j=1}^M F_{Dij}^e f_{acc.j}$$

(۳۴)

به طوری که:

$$F_{Dij}^e = \iiint_{V^{(e)}} N_i N_j r dr d\theta dz, \quad dr = rd \ln r$$

$$\Rightarrow F_{Dij}^e = \iiint_{V^{(e)}} N_i N_j r^2 d \ln r d\theta dz$$

$$\Rightarrow F_{Fij}^e = \sum_{n=1}^N w_n \left( r^2 \times |\mathbf{J}| \times N_i N_j \right)_{s_n},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, M$$

(۳۵)

#### ۵- پیاده‌سازی معادلات و ساختار کلی برنامه کامپیوتری

ساختن دستگاه کلی معادلات برای یک مدل سه بعدی به شیوه‌های متفاوتی قابل انجام است. در صورت محاسبه فشارها می‌توان سایر مقادیر مجهول را با استفاده از معادلات کمکی به دست آورد. در صورت شبیه‌سازی چند فازی نیز با استفاده از فرمولبندی (فشار-ضمنی اشباع-صریح)، مقدار اشباع‌شدگی‌های هر فاز با داشتن فشار، قابل محاسبه است. بنابراین برای هر گره و هر فاز در مخازن شکافدار دو مجهول و برای مخازن معمولی یک مجهول خواهیم داشت که باید با استفاده از معادله (۲۵) محاسبه شوند. هر گره در دستگاه کلی ممکن است به تعدادی بیشتر از یک جزء (هشت جزء در صورت استفاده از جزء‌های منشوری) تعلق داشته باشد. بنابراین تعداد معادلات برای هر گره، بیشتر از آنچه که لازم می‌شود، خواهد بود و این معادلات، مستقل از هم نمی‌باشند. به منظور اینکه تعداد معادلات و مجهولات در دستگاه معادلات نهایی برابر باشند، تمام معادلات جزء‌های مجاور به یک گره، که از تابع تقریب آن گره به عنوان تابع وزن استفاده می‌کنند، با هم جمع می‌شوند. فرمولبندی جزء محدود برای جریان چندفازی در قبل توضیح داده شد. در این قسمت به پیاده‌سازی جریان تک فاز بسنده می‌شود.

همچنین انتگرال بر روی مرزها ( $R_{Bi}$ ) به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$R = rNv \cdot dS, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (۳۱)$$

با اضافه کردن معادله محلی جزءها به دستگاه معادلات نهایی، معادلات مربوط به هر گره از جمع معادلات جزءهایی که گره به آنها تعلق دارد حاصل می‌شوند. با توجه به معادله بالا، جملات مربوط به شار بین جزءها، برای آن دسته از مرزهای جزء که به مرز کلی مخزن تعلق ندارند، همدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین، معادله (۳۱) فقط برای آن دسته از سطوح جزءها که روی کرانه بیرونی مخزن قرار دارند کاربرد دارد. بنا به دلایلی که خارج از محدوده این تحقیق است انتگرال‌گیری بر روی محیط جزء همواره در خلاف جهت ساعتگرد انجام می‌شود. به عبارتی قاعده دست راست جهت مثبت را مشخص می‌کند

انتگرال بر روی دامنه نیز ( $R_{Di}$ ) به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$R_{Di} = \iiint_{V^{(e)}} f_{acc.} N_i r dr d\theta dz - N_{iw} \frac{q_{af}}{B_a} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (۳۲)$$

به طوری که:

$$f_{acc.} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi S_a}{B_a} \right)_f - \frac{\tau_{af}}{B_a} = C_{pa} \frac{\partial P}{\partial t} + C_{Sa} \frac{\partial S_a}{\partial t} - \frac{\tau_{af}}{B_a} \quad (۳۳)$$

در این تحقیق، مش‌بندی مخزن طوری انجام می‌شود که همواره چاه‌ها بر روی مرز قرار می‌گیرند، بنابراین جمله مربوط به چاه در انتگرال مربوط به دامنه قرار نمی‌گیرد و اثر آن در جملات مربوط به انتگرال بر روی مرز ظاهر می‌شود.

جملات مربوط به انباشتگی ( $f_{acc.}$ ) در نقاط انتگرال‌گیری لازم می‌شوند و مقادیر آنها در این نقاط با استفاده از توابع تقریب به دست می‌آیند. با استفاده از توابع تقریب، می‌توان جمله مربوط به انباشتگی را در معادله (۳۳) در قالب مقادیر گره‌ای ( $f_{acc.j}$   $j = 1, 2, \dots, M$ ) به صورت زیر بسط داد:

داده شده است. پیاده سازی با استفاده از زبان برنامه نویسی C++ و با کمک گرفتن از کتابخانه‌های deal.ii<sup>۱</sup> انجام شده است [۱۳، ۱۴].

معادلات جریان تکفازی یک حالت خاص از فرمولبندی بالا می‌باشند که در آن، نفوذپذیری نسبی و درجه اشباع شدگی برابر با واحد، قرار

```

/*class: RSim, file: RSim.h, */
template <int dim>
class RSim
{
public:
    RSim (ParameterHandler &, char* argv1); //constructor
    void run (); //run the simulation
private:

    void make_grid ();
    void make_dofs ();
    void asmb_system ();
    void solve ();
    void output_results ();
    // input and output
    ParameterHandler &prm;
    char* argv1_;
    std::ostream dirname_;
    TableHandler output_table;
    // mesh, finite element, and degree of freedoms
    Triangulation<dim> triangulation;
    const unsigned int degree;
    FESystem<dim> fe;
    DoFHandler<dim> dof_handler;

    BlockSparsityPattern sparsity_pattern;
    //system matrix and solutions
    BlockSparseMatrix<double> system_matrix;
    BlockVector<double> solution;
    BlockVector<double> old_solution;
    BlockVector<double> system_rhs;
    //controlling time-steps
    double time_step, time_, end_time_;
    unsigned int timestep_number;
    //physical properties
    std::vector<double> Tfrac, Cpf, Cpm, Tmf;
    // well constraint handling
    ConstraintMatrix well_constraints;
    std::vector<bool> boundary_dofs;
    unsigned int n_wells_;
    VWDR<dim> **wells_;
    std::vector<unsigned int> first_boundary_dofs_;
    std::vector<unsigned char> dof_boundary_indicators;
    std::vector<unsigned char> temp_boundary_dofs;
}
    
```

شکل ۱- ساختار کلاس RSim که برنامه جزء محدود لگاریتمی توسط آن کنترل می‌شود

۱. یک کتابخانه عنصر محدود برای آنالیز معادلات دیفرانسیل به زبان C++ است که ابتدا در گروه روش‌های عددی در دانشگاه هایدلبرگ (Heidelberg University) در آلمان توسعه داده شد و هم‌اکنون نویسندگان آن در دانشگاه تگزاس مشغول به کار هستند.



بعد از ساختن دستگاه معادلات دیفرانسیل نوبت به حل معادلات می‌رسد. از آنجا که از ماتریس‌های بلوک‌بندی شده استفاده می‌کنیم، از حل‌کننده‌های مخصوص این نوع ماتریس‌ها نیز باید استفاده کنیم. deal.ii قابلیت استفاده از چندین نوع حل‌کننده‌های ماتریس‌های پراکنده بلوک‌بندی شده را فراهم می‌کند. توضیح تمامی این حل‌کننده‌ها خارج از حیطه این تحقیق می‌باشد. در این تحقیق، غالباً از حل‌کننده SolverBigstab<sup>5</sup>، که از الگوریتم گرادین مزدوج متعادل شده<sup>6</sup> استفاده می‌کند به همراه پیش‌شرط‌ساز<sup>7</sup> ژاکوبی<sup>8</sup> استفاده شده است. قابل ذکر است که این جفت حل‌کننده و پیش‌شرط‌ساز از سرعت بالایی برای حل معادلات برخوردار می‌باشند.

بعد از انجام محاسبات شبیه‌سازی در فاصله‌های معینی نتایج شبیه‌سازی از جمله توزیع فشار در ماتریس و شکاف به قالب‌های مشخصی که در پرونده ورودی داده می‌شود نوشته می‌شوند. در این تحقیق، عمدتاً از قالب VTK برای نمایش سه‌بعدی داده‌ها در مخزن استفاده می‌شود. این داده‌ها را می‌توان با استفاده از نرم‌افزار پارا ویو<sup>8</sup> که یک نرم‌افزار منبع آزاد می‌باشد، نمایش داد و آنالیز کرد. داده‌های مربوط به تولید از چاه‌ها مانند فشار ته چاه و نرخ تولید یا تزریق چاه نسبت به زمان نیز به صورت پرونده متن نوشته می‌شوند.

#### ۶- نمونه موردی شبیه‌سازی و بررسی نتایج

##### مخزن نمونه ۱: مخزن ایده آل استوانه‌ای

در این قسمت یک مخزن استوانه‌ای شکل به شعاع ۱۰۰۰ متر که در مرکز آن یک چاه به شعاع نیم فوت حفر شده، شبیه‌سازی شده است. خواص سنگ‌ها در تمام این مخزن ثابت فرض شده‌اند. میزان تخلخل سنگ ۲۰٪ و نفوذپذیری آن ۲۰ میلی‌داریسی فرض شده است. تراکم‌پذیری مجموعه سنگ و سیال نیز ثابت و برابر با  $5E-6 \text{ psi}^{-1}$  در نظر گرفته شده است. برای افزایش سرعت محاسبات، فقط یک چهارم از مخزن شبیه‌سازی شده است. شکل (۲) یک طرح اجمالی سه‌بعدی از این مدل را نشان می‌دهد که با استفاده از نرم‌افزار پارا ویو نمایش داده شده است.

در حالت کلی می‌توان گفت که نرم‌افزارهای شبیه‌سازی شامل سه هسته اصلی هستند: پیش‌پردازش، پردازش و پس‌پردازش. کنترل تمامی این فرایندها در برنامه نوشته شده توسط یک کلاس به نام RSim انجام می‌شود. طرح اجمالی این کلاس در شکل (۱) نشان داده شده است. توضیحات ضروری در مورد این کلاس و توابع و متغیرهای آن در این قسمت آورده شده است.

در قسمت پیش‌پردازش، تمامی داده‌های مورد نیاز برنامه از طریق یک پرونده ورودی خوانده می‌شوند که اسم آن به عنوان اولین آرگومان ورودی به برنامه داده می‌شود. ساختار مش ورودی به برنامه می‌تواند به صورت قالب‌های مختلفی داده شود. در این تحقیق از قالب ucd<sup>1</sup> برای داده‌های مش مخزن استفاده شده است، که توسط ماژول‌های deal.ii خوانده شده و با استفاده از قابلیت‌های ریزکردن<sup>2</sup>، شبکه مش آن به اندازه دلخواه، ریز می‌شود. همه این عملیات در تابع `RSim::make_grid()` انجام می‌شوند.

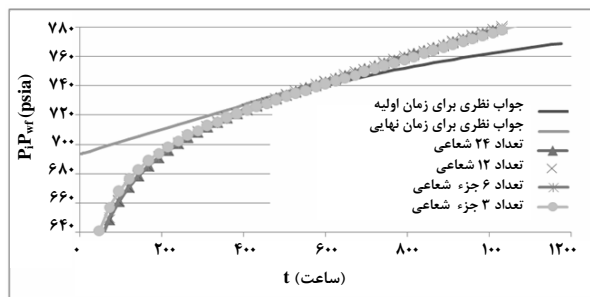
در قسمت پردازش، گره‌ها و جزء‌ها با استفاده از مش ورودی ساخته می‌شوند. سپس درجات آزادی و دستگاه جزء محدود و همچنین رابطه بین درجات آزادی در جزء‌ها و سیستم کلی جزء محدود مشخص می‌شوند. این عملیات در تابع `RSim::make_dofs()` انجام می‌شوند. قابل ذکر است که، از آنجا که در جریان تکفازی در مخازن شکافدار باید دو معادله همزمان حل شوند، برای هر گره دو درجه آزادی وجود خواهد داشت و برای حل این مسئله از قابلیت‌های deal.ii در استفاده از ماتریس‌های پراکنده بلوک‌بندی شده<sup>3</sup> استفاده شده است.

بعد از مشخص کردن درجات آزادی، ماتریس محلی جزء محدود برای هر یک از جزء‌های محاسبه شده و به دستگاه کلی جزء محدود انتقال داده می‌شوند. این عملیات، در تابع `RSim::asmb_system()` در این مرحله شرایط مرزی و قیود حاکم بر مسئله نیز با استفاده از امکاناتی که به این منظور در کتابخانه deal.ii وجود دارند<sup>4</sup> اعمال می‌شوند. مهمترین این قیود، اعمال قید جریان ثابت در چاه‌هاست که در آن، مجموع شار خروجی از تمام سطوح جزء‌ها روی دیواره چاه باید برابر شدت جریان خروجی از چاه باشد.

5. Bicgstab  
6. Preconditioner  
7. Jacobi  
8. Paraview

1. Unstructured Cell Data Format  
2. Refinement  
3. BlockSparseMatrix  
4. Constraint Handling

شبیه‌سازی انجام شده است. اندازه گام زمانی برای هر سه شبیه‌سازی، مساوی و برابر با ۰/۱ روز انتخاب شده است. شکل (۴) نتایج حاصل از شبیه‌سازی را نشان می‌دهد.



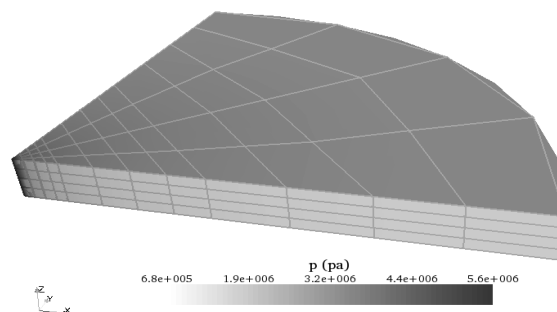
شکل ۴- نتایج حاصل از شبیه‌سازی مخزن استوانه‌ای با مش-های با درشتی مختلف

همان‌طور که در شکل (۴) نشان داده شده است، نتایج شبیه‌سازی حتی برای شبکه‌های مش خیلی درشت نیز از دقت خیلی خوبی برخوردار می‌باشد. جدول (۱) مقدار خطای حاصل از شبیه‌سازی‌های بالا را به صورت کمی نشان می‌دهد.

جدول ۱- مقایسه خطای حاصل از شبیه‌سازی مخزن استوانه‌ای با مش‌هایی با درشتی متفاوت

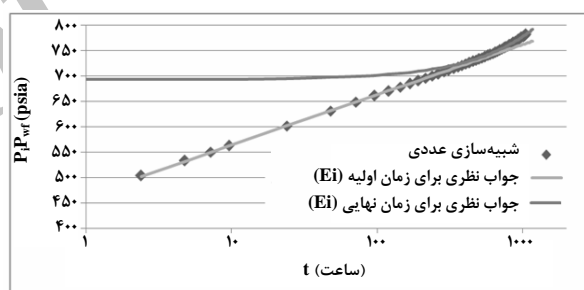
تعداد جزء‌های در جهت شعاعی	خطای کلی متوسط برای فشار ته چاه ( $P_{wf}$ )	خطای نسبی متوسط برای فشار ته چاه ( $P_{wf}$ )
۳	۶۴/۰۷ $psi^2$	٪۱/۱۱
۶	۳/۷۵۷ $psi^2$	٪۰/۲۶
۱۲	۱/۶۷ $psi^2$	٪۰/۱۷

قابل ذکر است که در همه مثال‌های بالا بیش از نصف خطای گزارش شده در جدول (۱) مربوط به اولین داده است که به فاصله زمانی ۲/۴ ساعت از شروع تولید، ثبت شده است. به نظر می‌رسد این امر به این دلیل باشد که در لحظات اولیه تولید، رفتار فشار با توزیع لگاریتمی، تفاوت اندکی داشته باشد. البته با انتخاب هوشمندانه اندازه جزء‌ها و همچنین اندازه گام‌های زمانی، این خطا قابل کاهش است. برای بررسی اثر اندازه گام زمانی، محاسبات



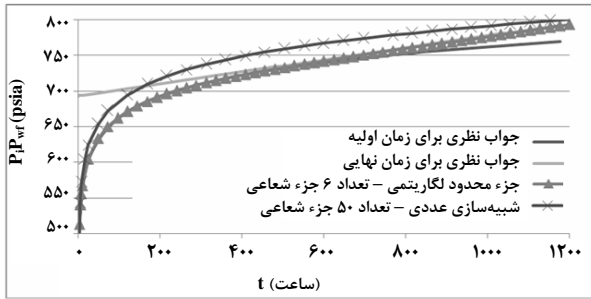
شکل ۲- مدل استوانه‌ای استفاده شده در بررسی نتایج جزء محدود لگاریتمی و سایر روش‌های شبیه‌سازی مخازن

برای بررسی نتایج، ابتدا یک مدل معیار که در آن اندازه جزء‌ها و همچنین اندازه گام‌های زمانی بسیار ریز انتخاب شده‌اند شبیه‌سازی و نتایج با حل‌های تحلیلی مقایسه شده‌اند، نتایج حاصله در شکل (۳) در نمودار نیمه‌لگاریتمی آورده شده‌اند.



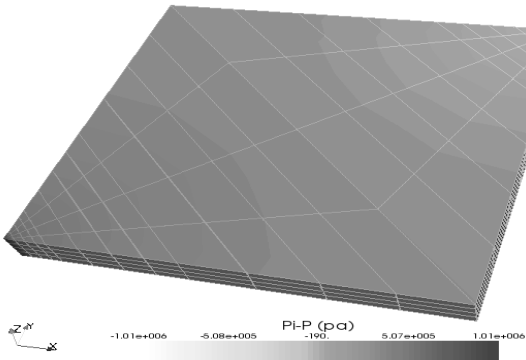
شکل ۳- نتایج حاصل از شبیه‌سازی مخزن استوانه‌ای با مش دانه ریز (۲۴ عنصر در راستای شعاع مخزن)

همان‌طور که از شکل بالا پیداست، نتایج حل عددی در این مدل، کاملاً با نتایج تحلیلی مطابقت دارند. مشاهده می‌شود که حداکثر خطا هم در زمان‌های اولیه و هم برای زمان‌های شبه‌پایا کمتر از ۰/۰۴٪ است. از این مدل به عنوان یک معیار برای بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی با تعداد اجزای متفاوت و همچنین برای بررسی اثر اندازه گام‌های زمانی استفاده شده در شبیه‌سازی استفاده خواهد شد. برای بررسی اثر اندازه جزء‌ها بر روی دقت محاسبات و ارزیابی روش جزء محدود در شبیه‌سازی مخازن با شبکه مش دانه‌درشت مخزن بالا با شبکه‌های مش معمولی، دانه‌درشت و خیلی دانه‌درشت که به ترتیب دارای تعداد جزء‌های برابر با نصف، یک‌چهارم و یک‌هشتم تعداد گره‌های مدل معیار می‌باشند،



شکل ۵- نتایج حاصل از مقایسه شبیه سازی مخزن استوانه‌ای با نرم افزار شبیه ساز عددی

مخزن نمونه ۲: چیدمان پنج نقطه‌ای<sup>۱</sup> برای مخازن شکافدار در مورد مخازنی که بیشتر از یک چاه دارند باید فشار اطراف هر چاه با توجه به فاصله از آن چاه تقریب زده شود. این مسئله، پیچیدگی‌هایی را در شبیه سازی مخازن بزرگ با استفاده از تقریب لگاریتمی ایجاد می‌کند. در این مخازن، لازم است که جزءها بسته به اینکه به ناحیه تخلیه کدام چاه تعلق دارند به دسته‌های مختلفی تقسیم بندی شوند. در این مثال، یک مخزن مربعی شکل که در دو گوشه آن دو چاه، یکی تزریقی و دیگری تولیدی، می‌باشد شبیه سازی شده است. طرح اجمالی این مخزن و مش بندی استفاده شده در آن در شکل (۶) آورده شده است.



شکل ۶- چیدمان پنج-نقطه‌ای استفاده شده در بررسی نتایج جزء محدود لگاریتمی برای شبیه سازی مخازن شکافدار

در این مدل یک مخزن شکافدار مربعی شکل با ابعاد  $1000 \times 1000$  متر، که دو چاه در دو گوشه آن یکی تولیدی و دیگری تزریقی حفر شده‌اند، با استفاده از مدل تخلخل دوگانه مدل سازی شده است.

شبیه سازی برای مدل بالا در حالتی که در آن ۶ جزء در جهت شعاعی استفاده شده، با استفاده از سه گام زمانی  $0.01$ ،  $0.1$  و  $1$  روز انجام گرفته است. مقادیر خطای متوسط برای هر سه حالت در جدول (۲) آورده شده‌اند:

جدول ۲- مقایسه خطای حاصل از شبیه سازی مخزن استوانه‌ای با اندازه گام‌های زمانی متفاوت

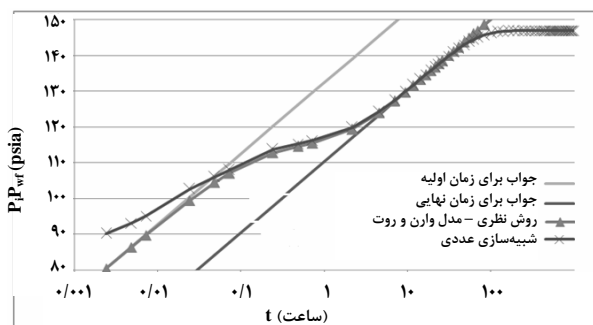
خطای نسبی متوسط برای فشار ته چاه ( $P_{wf}$ )	خطای کلی متوسط مربعی برای فشار ته چاه ( $P_{wf}$ psi <sup>2</sup> )	اندازه گام زمانی بر حسب روز
٪۰/۵۱	۱۳/۷۸ psi <sup>2</sup>	۰/۰۱
٪۰/۲۶	۳/۷۵۷ psi <sup>2</sup>	۰/۱
٪۱/۱	۶۲/۰۶ psi <sup>2</sup>	۱

همان‌طور که از جدول (۲) پیداست اندازه گام زمانی  $0.1$  بهترین نتیجه را به دست می‌دهد. این تحلیل برای دو حالت دیگر نیز که در آن از ۳ و ۱۲ جزء در جهت شعاعی استفاده شده بود انجام شد که برای این دو مدل به ترتیب اندازه گام‌های  $1$  و  $0.01$  روز کمترین خطا را تولید می‌کردند. با توجه به این مشاهدات می‌توان گفت که اندازه‌های گام زمانی باید متناسب با اندازه جزءها انتخاب شوند و با کوچک انتخاب کردن اندازه جزءها اندازه گام زمانی نیز باید کوچک انتخاب شود.

برای مقایسه این روش با روش تفاضل محدود، مدلی مشابه همین مدل با استفاده از نرم افزار شبیه ساز عددی جریان تهیه شد. نتایج به دست آمده از عنصر محدود لگاریتمی و نتایج حاصل از نرم افزار شبیه ساز عددی به همراه نتایج حل تحلیلی برای تاریخچه افت فشار در چاه تولیدی در شکل (۵) آورده شده است.

همان‌طور که در شکل بالا نشان داده شده است نتایج نرم افزار شبیه ساز عددی اختلاف قابل توجهی با نتایج تحلیلی و همچنین با نتایج جزء محدود لگاریتمی دارند و این، برتری قابل توجه روش ارائه شده در اینجا را نشان می‌دهد.

که در آن طول جزءها در هر جهت نصف اندازه عناصر نشان داده شده در شکل (۶) می‌باشند (۳۰۷۲ جزء) به عنوان معیاری برای ارزیابی سایر مدل‌ها استفاده خواهند شد. نتایج حاصله برای تاریخچه اختلاف فشار ته چاه و فشار اولیه مخزن به همراه تقریب‌های حل تحلیلی در زمان‌های اولیه و زمان‌های نهایی در دوره ناپایا، که به صورت دو خط راست موازی در نمودار نیمه-لگاریتمی ظاهر می‌شوند، در شکل (۷) آورده شده‌اند. توجه شود که از آنجا که چاه‌های تزریقی و تولیدی، کاملاً مشابه هم بوده‌اند نتایج حاصل برای اختلاف فشار بین شرایط اولیه مخزن و فشار ته چاه از لحاظ اندازه برابر می‌باشند، بنابراین در این مدل، فقط داده‌های تاریخچه فشار ته چاه تولیدی به صورت اختلاف آن با شرایط اولیه مخزن ( $P_1 - P_{wf}$ ) آورده شده‌اند.



شکل ۷- نتایج حاصل از مقایسه شبیه‌سازی مخزن شکافتار با حل تحلیلی وارن و روت

همان‌طور که از نمودار بالا پیداست، داده‌های افت فشار ته چاه از همخوانی خیلی خوبی برخوردار هستند. البته در لحظات اولیه تولید، اختلاف اندکی با نتایج حاصل از حل تحلیلی وارن و روت [۱۵] مشاهده می‌شود که به علت تقریبی بودن هر دو روش، نمی‌توان قضاوت درستی در مورد صحت آنها کرد. قابل ذکر است با بررسی اثر اندازه گام زمانی مشخص شد که نتایج به دست آمده از حل عددی این مدل، حساسیت چندانی به اندازه گام زمانی استفاده شده در شبیه‌سازی ندارد. مشاهده می‌شود که انحراف نمودار در زمان‌های نهایی تولید به علت آشکار شدن اثر چاه تزریقی در داده‌های فشار چاه تولیدی می‌باشد. نتایج حاصل از مقایسه نتایج بالا با مدل‌هایی که با تعداد جزءهای کمتری شبیه‌سازی شده‌اند در شکل (۸) نشان داده شده است. شکل (۸) نشان می‌دهد که به جز در حالتی که

برای سادگی و سهولت در شبیه‌سازی، خواص سیال‌های تزریقی و تولیدی یکسان فرض شده‌اند. و نرخ تولید و تزریق به مخزن در طول زمان، ثابت و برابر با ۱۰۰۰ بشکه در روز فرض شده است. مشخصات این مخزن طوری انتخاب شده‌اند که در یک بازه زمانی ۲ ماهه همه رژیم‌های جریان در مخزن قابل تشخیص باشند. داده‌های ورودی از طریق یک پرونده متن به برنامه داده می‌شوند. مشخصات فیزیکی استفاده شده در شبیه‌سازی و داده‌های ورودی برای توصیف چاه‌ها در جدول‌های (۳) و (۴) آورده شده‌اند.

### جدول ۳- خواص فیزیکی استفاده شده برای چیدمان پنج-

#### نقطه‌ای در مخازن شکافتار

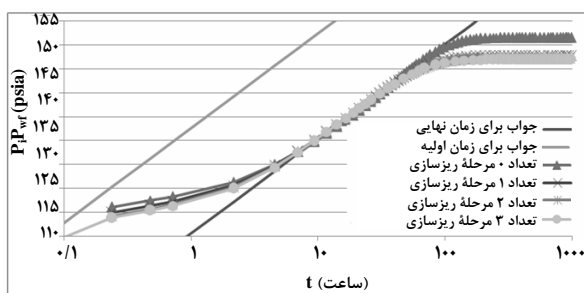
۰/۱۲	تخلخل ماتریس
۰/۰۱	تخلخل شبکه شکاف
۱۰۰ میلی داریسی	نفوذ پذیری شبکه شکاف
۱ (md/Cp)	نفوذ پذیری بین ماتریس و شکاف ( $T_{mf}$ )
۵E-۶	تراکم پذیری کلی شکاف (سنگ + سیال)
۵e-۶Psi <sup>-1</sup>	تراکم پذیری کلی ماتریس (سنگ + سیال)
۱ cp	گرانروی سیال

### جدول ۴- مشخصات چاه‌ها در مخزن نمونه ۲

صفر	موقعیت در جهت x	چاه شماره یک (تزریقی)
صفر	موقعیت در جهت y	
۰/۴۹ ft	شعاع چاه	چاه شماره دو (تولیدی)
۱۰۰۰ (bbl/day)	نرخ تولید/تزریق	
۱۰۰۰m	موقعیت در جهت x	چاه شماره دو (تولیدی)
۱۰۰۰m	موقعیت در جهت y	
۰/۴۹ ft	شعاع چاه	چاه شماره دو (تولیدی)
-۱۰۰۰ (bbl/day)	نرخ تولید/تزریق	

مخزن در سه حالت با تعداد جزءهای ۶، ۴۸ و ۳۸۴ و ۳۰۷۲ شبیه‌سازی شده و نتایج با هم مقایسه شده‌اند. شکل (۶) مخزن را در حالتی که با ۳۸۴ جزء مدل شده است نشان می‌دهد. در این مخزن نیز شبیه‌سازی با جزءهای ریز و اندازه گام‌های کوچک

مخزن فقط با شش جزء، مدل سازی شده است، در بقیه موارد نتایج با حالت معیار که با ۳۰۷۲ جزء، مدل سازی شده تطابق خیلی خوبی دارند (اختلاف کمتر از ۱٪).



شکل ۸- بررسی اثر اندازه عناصر در نتایج حاصل از شبیه سازی مخازن شکافدار

لگاریتمی با استفاده از کتابخانه منبع آزاد deal.II پیاده سازی شده و برنامه نویسی شبیه سازی مخازن شکافدار با جزء محدود لگاریتمی انجام شده است. برنامه کامپیوتری نوشته شده برای شبیه سازی دو مخزن متفاوت مورد استفاده قرار گرفته است. در اولین مدل، یک مخزن معمولی ایده آل در حالت های مختلف، شبیه سازی شده و نتایج با روش حل تحلیلی و همچنین با شبیه ساز عددی جریان مقایسه شده اند. در دومین مدل، که برای نشان دادن قابلیت روش جزء محدود لگاریتمی در شبیه سازی مخازن شکافدار طراحی شده بود، چیدمان پنج نقطه ای برای تزریق به مخازن شکافدار شبیه سازی شد که نتایج حاصله مبین دقت این روش در شبیه سازی این نوع مخازن است. نتایج حاصله تطابق بسیار خوبی با حل تحلیلی برای مدل های ساده و همگن دارند و از روش جزء محدود لگاریتمی حتی در صورت استفاده از شبکه مش های دانه درشت، نتایج خیلی خوبی حاصل می شود و دقت محاسبات شبیه سازی را به شدت افزایش می دهد. در عین حال، با استفاده از این روش، نیازی به استفاده از روابط اندیس چاه نخواهد بود. طبیعی است که وجود ناهمگنی در مخزن می تواند دقت محاسبات را کاهش دهد. به هر حال، در این تحقیق، عوامل مهمی مانند ریز کردن محلی جزءها، حل کننده های ماتریس های پراکنده و استفاده از سایر تکنیک های موجود برای افزایش دقت شبیه سازی مورد بررسی قرار نگرفته اند. از طرفی برای اینکه این روش در مقیاس صنعتی بتواند در شبیه سازی مخازن مورد استفاده قرار بگیرد، قابلیت های مختلفی مانند برنامه تولید شبکه مش، شبیه سازی چندفازی و بعضی موارد دیگر که در شبیه سازی مخازن لازم می باشند باید طراحی و پیاده سازی شوند.

#### ۸- فهرست علائم و اختصارات

$U$	متغیر دامنه
$V$	حجم
$t$	زمان
$N$	تابع تقریب
$J$	ماتریس ژاکوبین
$r$	فاصله از چاه
$w$	توابع یا ضرایب وزن در انتگرال گیری
$\theta$	زاویه

برای شبیه سازی چندفازی حرکت سیال در مخازن هیدروکربنی، از آنجا که اشباع شدگی سیال رفتاری لگاریتمی ندارد، تقریب لگاریتمی برای اشباع شدگی سیال چندان موثر نیست. استفاده از روش جزء محدود با درجه تقریب بالاتر، یک راه حل برای این مسئله است. این کار باعث می شود که تغییرات شدید اشباع شدگی سیال در جلوی جبهه سیال جابجا کننده به خوبی مدل شوند و بنابراین، دقت محاسبات افزایش پیدا کند و در عین حال زمان انجام محاسبات نیز کاهش یابد. علاوه بر این، راه حل دیگری که توسط افراد زیادی توصیه شده است، استفاده از روش ترکیبی (جزء محدود - حجم کنترل) می باشد. در این روش، جزءها به قسمت های کوچکتر تقسیم شده و از روش حجم کنترل برای به دست آوردن اشباع شدگی سیال در این جزءهای کوچک استفاده می شود. از آنجا که در روش حجم کنترل بقای جرم به خودی خود برقرار است [۱۶]، این روش می تواند برای دنبال کردن حرکت جبهه سیال در جریان چند فازی در مخازن مورد استفاده قرار بگیرد.

#### ۷- نتیجه گیری و پیشنهادات

در این تحقیق، روش جزء محدود برای حرکت سیال در محیط متخلخل در حالت سه بعدی ارائه و نشان داده شد که چگونه روش جزء محدود می تواند برای تقریب فشار به صورت تابعی لگاریتمی از فاصله تا چاه مورد استفاده قرار گیرد. سپس روش جزء محدود

- [4] Y.C. Park, W.M. Sung, "Development of FEM Reservoir Model Equipped with Effective Permeability Tensor and Its Application to Naturally Fractured Reservoirs", Paper SPE 64793, (2000).
- [5] A. Mezentsev, S. K. Matthai, C. C. Pain, M. D. Eaton., "A Bounded Control Volume Hybrid Finite Element Method for Subsurface Multiphase Flow Simulations", European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS, (2004).
- [6] Birendra Jha, "A Mixed Finite Element Framework for Modeling Coupled Fluid Flow and Reservoir Geomechanics", MSc. Thesis, Stanford University, (2005).
- [7] H. Kazemi, L. S. Merrill, K.L. Porterfield, P.R.Zeman, "Numerical Simulation of Water-Oil Flow in Naturally Fractured Reservoirs", Paper SPE 5719 was Presented at the SPE-AIME Fourth Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance, Los Angeles, CA, 19-20, (1976).
- [8] R. Courant, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", Bulletin of the American Mathematical Society, 49, (1943).
- [9] O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, "The Finite Element Method", Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, (2000).
- [10] David V. Hottom, "Fundamentals of Finite Element Analysis", McGraw-Hill., (2004).
- [11] K. J. Bathe, "Finite Element procedures in Engineering analysis", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1982).
- [12] O. Ertekin, "Basic Applied Reservoir Simulation", SPE Textbook Series, (2001).
- [13] W. Bangerth, R. Hartmann, G. Kanschat, "deal.II - A general-purpose object-oriented finite element library", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 33, No. 4, Article 24. (2007).
- [14] W. Bangerth, R. Hartmann and G. Kanschat, deal.II Differential Equations Analysis Library, Technical Reference, <http://www.dealii.org>
- [15] J. E. Wanen, P.J. Root, "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", SPE Journal, 245-255, (1963).
- [16] Naji, H. S., and Kazemi, H.,A "Fully Implicit, Three Dimensional, Two Phase, Control Volume Finite Element Model for the Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", paper SPE 71615 presented at the SPE Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, Abu Dhabi, U.A.E., 13-16, (1996)

ارتفاع	$z$
تخلخل	$\phi$
اشباع شدگی	$S$
ضریب حجمی سیال	$B$
تبادل سیال بین ماتریس و شکاف	$\tau$
فشار سیال	$P$
پتانسیل حرکت سیال	$\Phi$
سرعت حرکت سیال	$v$
شدت جریان	$q$
نفوذپذیری	$T$
اندیس‌ها	
فاز سیال	$\alpha$
شبکه شکاف	$f$
ماتریس	$m$

#### مراجع

- [1] S. Geiger, S. Robertsy, S. K. Matthai, C. Zoppou, "Combining finite volume and finite element methods to simulate fluid flow in geologic media", Australian Mathematical Society. (2003).
- [2] Y. Zheng, R. Burrige, D. Burns, "Reservoir Simulation with the Finite Element Method Using Biot Poroelastic Approach", Earth Resources Laboratory, Department of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA 02139, (2003).
- [3] Sandeep P. Kaul, "Numerical Simulation of Two-Phase Flow in Discrete Fractures using Rayleigh-Ritz Finite Element Method", MSc. Thesis, Texas A&M University, (2003).