

ارائه مدل ریاضی برای مساله زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر با محدودیت دسترسی به ماشین ها

جواد مرتضوی^{۱*}، عباس اصغریان^۲، محسن ضیایی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه بجنورد

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه بجنورد

۳- عضو هیئت علمی، گروه مهندسی صنایع، دانشگاه بجنورد

*ershad70tabasom@yahoo.com

ارسال: بهمن ۹۶ پذیرش: اسفند ۹۶

چکیده

در مقاله حاضر، مساله زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر با فرض عدم دسترسی به ماشین ها به دلیل عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه، بررسی می شود. در این پژوهش قصد داریم، برای مساله مورد بحث یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط^۱ (MILP) ارائه دهیم تا جواب بهینه برای ابعاد کوچک و متوسط مساله در زمان معقول حاصل شود. در این مدل هدف، کمینه سازی حداکثر زمان خاتمه (C_{max}) می باشد و عملیات نت روی هر ماشین، مدت زمان ثابت داشته و خاتمه آن در یک پنجره زمانی معین رخ می دهد. به منظور ارزیابی مدل ریاضی مسائلی با ابعاد مختلف حل می نماییم. نتایج حاصل نشان می دهد مدل ریاضی قادر به حل مسائل با ابعاد کوچک و نسبتاً بزرگ در زمان معقول می باشد.

کلمات کلیدی: زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر، محدودیت عدم دسترسی، عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه، برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط

۱. مقدمه

در محیط های صنعتی واقعی، بنا بر دلایل زیادی ماشین ها به طور پیوسته در دسترس نخواهند بود. بعضی از این توقفات به صورت تصادفی، مانند خرابی یا از کار افتادگی ماشین و برخی دیگر به صورت قطعی، مانند نت پیشگیرانه، تعمیرات اساسی، پیش زمان بندی ها و تغییر ابزار، در زمان بندی لحاظ می شوند. در این پژوهش نیز، مساله زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر با محدودیت دسترسی به ماشین ها بررسی می گردد. محدودیت دسترسی به ماشین در سیستم های تولیدی به دو دسته، دسترسی معین و دسترسی نامعین تقسیم می شود [۱]. در حالت دسترسی معین، زمان شروع بازه عدم دسترسی در ابتدای برنامه ریزی مشخص می باشد. اما در حالت دسترسی نامعین، بازه عدم دسترسی در یک پنجره زمانی مشخص شروع می شود و زمان دقیق شروع آن،

¹ Mix Integer Linear Programming

پس حل مساله و زمان بندی کارها تعیین می گردد. محدودیت دسترسی به ماشین در مساله زمان بندی تک ماشین، توسط آدیری و همکاران [۲] در سال ۱۹۸۹ بررسی شد. آن ها نشان دادند، مساله زمان بندی تک ماشین با مشخص بودن دوره عدم دسترسی به ماشین از نوع NP-hard است. یزدانی و همکاران [۳] مساله زمان بندی تک ماشین، با دوره های عدم دسترسی چندگانه و موعدهای تحویل متفاوت را مطالعه نمودند. آنها علاوه بر ارائه یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط، به دلیل مشکلات محاسباتی برای مسائل بزرگ، یک روش جستجوی همسایگی متغیر نیز ارائه دادند. مساله زمان بندی ماشین های موازی با محدودیت دسترسی برای اولین بار توسط اشمیت [۴] و مساله زمان بندی جریان کارگاهی با محدودیت دسترسی برای اولین بار توسط لی [۵] معرفی گردید. گراوس و لی [۶] مساله زمان بندی تک ماشین با محدودیت دسترسی نامعین را ارائه دادند.

مساله زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط براکر و اسپچلای [۷] معرفی گردید. فتاحی، مهرآباد و جولای [۸] در سال ۲۰۰۷ یک مدل MILP برای مساله زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر ارائه نمودند. هدف آن ها کمینه سازی حداکثر زمان خاتمه بود. مهرآباد و فتاحی [۹] در سال ۲۰۰۷ نیز، یک مدل ریاضی برای مساله کار کارگاهی منعطف ارائه نمودند. آن ها در مساله خود، زمان های آماده سازی وابسته به توالی را در نظر گرفتند و برای حل آن از الگوریتم جستجوی ممنوعه استفاده کردند. روشنایی و همکاران [۱۰] به منظور بهبود مدل های ریاضی مطرح شده، دو مدل MILP ارائه دادند و با مدل های موجود مقایسه نمودند. ژانگ و همکاران [۱۱] مساله کار کارگاهی انعطاف پذیر را به صورت چندهدفه (MOFJSP) مطرح نمودند. آن ها اهداف کمینه سازی حداکثر زمان خاتمه، حداکثر بار کاری ماشین ها و مجموع بار کاری ماشین ها را در نظر گرفته و برای حل مساله مورد نظر از الگوریتم ازدحام ذرات استفاده نمودند. مساله زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر با محدودیت دسترسی نامعین^۲ (FJSP-nfa) در سال ۲۰۰۶ توسط ژائو و همکاران [۱] بررسی گردید. آن ها مساله را به صورت چندهدفه و با اهداف، کمینه سازی حداکثر زمان خاتمه، حداکثر بار کاری ماشین ها و مجموع بار کاری ماشین ها مطرح نمودند و برای حل آن، یک مدل ریاضی غیرخطی و یک الگوریتم ژنتیک ارائه دادند. وانگ و یو [۱۲] برای مساله [۱] با محدودیت دسترسی معین و نامعین یک الگوریتم ابتکاری^۳ FBS ارائه نمودند. راج کومار و همکاران [۱۳] مساله [۱] را با استفاده از الگوریتم GRASP^۴ حل و نتایج حاصل را با نتایج [۱] مقایسه نمودند. نهاوندی و عباسیان [۱۴] مساله FJSP-nfa را با اهداف، کمینه سازی حداکثر زمان خاتمه، متوسط زمان در جریان ساخت و متوسط دیرکرد مطرح نمودند و برای حل آن یک الگوریتم ژنتیک توسعه یافته ارائه دادند. ضیایی [۱۵] برای حل مساله MOFJS با محدودیت دسترسی نامعین یک الگوریتم ابتکاری سریع^۵ مبتنی بر روش تجزیه ارائه نمود.

در این مقاله، برای مساله زمان بندی کار کارگاهی انعطاف پذیر با فرض عدم دسترسی به ماشین ها، یک مدل برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط ارائه می دهیم و به منظور ارزیابی مدل ریاضی، ۳ مثال عددی با ابعاد کوچک و متوسط از [۱۳ و ۱] انتخاب و با استفاده از نرم افزار GAMS حل می نماییم. به این ترتیب در بخش ۲ به توضیح کامل این مساله می پردازیم. در بخش ۳ مدل ریاضی مربوط به مساله را ارائه می دهیم و با ارائه ۳ مثال عددی در بخش ۴ به ارزیابی مدل مورد بحث خواهیم پرداخت. و نهایتاً در بخش ۵ نتیجه گیری و زمینه های تحقیقات آتی تبیین می شوند.

۲. بیان مساله

در این مساله یک مجموعه شامل n کار $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ و یک مجموعه شامل m ماشین $M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ وجود دارد، هر کار J از n_j عملیات $(O_{j,1}, O_{j,2}, \dots, O_{j,n_j})$ تشکیل شده است که این عملیات با توجه به روابط پیش نیازی که

¹ Multi Objective Flexible Job-shop Scheduling Problem

² Flexible Job-shop Scheduling Problem with non-fixed availability constraints

³ Filtered Beam Search

⁴ Greedy Randomized Adaptive Search Procedure

⁵ Fast heuristic algorithm

- بین آنها وجود دارد، اجرا می‌شوند. هر عملیات، $O_{j,h}$ (عملیات h ام کار j) می‌تواند روی یک ماشین از میان ماشین‌های قادر به پردازش آن عملیات اجرا شود. ماشین‌ها در طول دوره برنامه‌ریزی به طور پیوسته در دسترس نخواهند بود و برای انجام عملیات نت متوقف می‌شوند. ماشین i دارای L_i فعالیت نت می‌باشد که می‌بایست در طول افق برنامه‌ریزی انجام شود. همچنین فعالیت نت PM_{il} به مدت p_{il} واحد زمانی انجام شده و در پنجره زمانی مشخصی تکمیل می‌شود. فرضیات مساله به شرح زیر می‌باشد:
- ۱) یک ماشین در یک لحظه زمانی تنها می‌تواند یک عملیات را انجام دهد.
 - ۲) وقتی پردازش یک کار شروع شود تا پایان ادامه خواهد یافت. (بریدگی مجاز نیست)
 - ۳) زمان‌های آماده‌سازی بخشی از زمان‌های پردازش در نظر گرفته می‌شوند.
 - ۴) تمام پارامترهای مساله مشخص و قطعی می‌باشند.

۳. مدل ریاضی مساله

در این بخش یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط برای مساله مورد نظر ارائه می‌شود و نمادهای مورد استفاده به شرح زیر است.

اندیس‌ها:

$i = 1, 2, \dots, m$	اندیس ماشین	i, i'
$j = 1, 2, \dots, n$	اندیس کار	j, j'
$h = 1, 2, \dots, n_j$	اندیس عملیات	h, h'
$l = 0, 1, 2, \dots, L_i$	اندیس فعالیت‌های نت	l, l'

پارامترها:

n_j	: تعداد عملیات کار j
L_i	: تعداد فعالیت‌های نت روی ماشین i
M	: یک عدد بزرگ مثبت
t_{jhi}	: زمان پردازش عملیات h ام کار j روی ماشین i
e_{jni}	: پارامتر باینری است، اگر ماشین i بتواند عملیات h ام کار j را انجام دهد مقدار آن ۱ و در غیر این صورت مقدار آن صفر خواهد بود.
PM_{il}	: فعالیت نت l ام روی ماشین i
p_{il}	: مدت زمان انجام PM_{il}
F_{il}^L	: دیرترین زمان تکمیل PM_{il}
F_{il}^E	: زودترین زمان تکمیل PM_{il}

متغیرهای تصمیم:

C_{max}	: زمان خاتمه کل کارها
C_{jhi}	: زمان خاتمه عملیات h ام کار j روی ماشین i
F_{il}	: زمان خاتمه PM_{il}
x_{jhil}	: متغیر باینری است، اگر عملیات h ام کار j روی ماشین i بعد از PM_{il} پردازش شود، مقدار آن یک و در غیر این صورت صفر خواهد بود.
x_{jhio}	: متغیر باینری است، اگر عملیات h ام کار j روی ماشین i بعد از شروع به کار ماشین پردازش شود، مقدار آن یک و در غیر این صورت صفر خواهد بود.
$y_{jhj'h'}$: متغیر باینری است، اگر عملیات h ام کار j بعد از عملیات h' کار j' پردازش شود، مقدار آن یک و در غیر این صورت صفر خواهد بود.

مدل ریاضی کمینه سازی حداکثر زمان خاتمه :

$$\min z = C_{max} \quad (۱)$$

$$C_{max} \geq C_{jhi} \quad \forall i, j, h \quad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{l=0}^{L_i} x_{jhil} = 1 \quad \forall j, h \quad (۳)$$

$$\sum_{l=0}^{L_i} x_{jhil} \leq e_{jhi} \quad \forall j, h, i \quad (۴)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^{n_j} t_{jhi} \cdot x_{jhil} \leq (F_{i(l+1)} - p_{i(l+1)}) - F_{il} \quad \forall i, l < L_i \quad (۵)$$

$$C_{jhi} - t_{jhi} - C_{j'h'i} \geq -M \cdot \left(2 - \sum_{l=0}^{L_i} x_{jhil} - \sum_{l=0}^{L_i} x_{j'h'il} \right) - M \cdot (1 - y_{jhj'h'}) \quad \forall i, j < j', h, h' \quad (۶)$$

$$C_{j'h'i} - t_{j'h'i} - C_{jhi} \geq -M \cdot \left(2 - \sum_{l=0}^{L_i} x_{jhil} - \sum_{l=0}^{L_i} x_{j'h'il} \right) - M \cdot y_{jhj'h'} \quad \forall i, j < j', h, h' \quad (۷)$$

$$C_{jhi'} - \sum_{i=1}^m \left(C_{j(h+1)i} - \left(t_{j(h+1)i} \cdot \sum_{l=0}^{L_i} x_{j(h+1)il} \right) \right) \leq 0 \quad \forall i', j, h < n_j \quad (۸)$$

$$\sum_{i=1}^m \left(C_{j1i} - \left(t_{j1i} \cdot \sum_{l=0}^{L_i} x_{j1il} \right) \right) \geq 0 \quad \forall j \quad (۹)$$

$$C_{jhi} \geq (F_{il} + t_{jhi}) - M \cdot (1 - x_{jhil}) \quad \forall i, j, h, l \quad (۱۰)$$

$$C_{jhi} \leq (F_{il} - p_{il}) + M \cdot (1 - x_{jhil}) \quad \forall i, j, h, l > 0 \quad (۱۱)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^{n_j} x_{jhil} \leq M \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^{n_j} x_{jhil} \quad \forall i, l < L_i \quad (۱۲)$$

$$C_{jhi} \leq M \cdot \sum_{l=0}^{L_i} x_{jhil} \quad \forall i, j, h \quad (۱۳)$$

$$F_{il}^E \leq F_{il} \leq F_{il}^L \quad \forall i, l \quad (۱۴)$$

$$x_{jhil}, y_{jhj'h'} \in \{0,1\} \quad \forall i, j < j', h, h', l \quad (۱۵)$$

$$F_{il} \geq 0 \quad \forall i, l > 0 \quad (۱۶)$$

$$C_{jhi}, C_{max} \geq 0 \quad \forall i, j, h \quad (۱۷)$$

در مدل فوق، تابع هدف (۱) حداکثر زمان خاتمه را کمینه می‌سازد. محدودیت (۲) حداکثر زمان خاتمه را نشان می‌دهد. محدودیت (۳) موجب می‌شود هر کار روی یک ماشین، بعد از شروع به کار ماشین و یا بعد از اجرای فعالیت نت پردازش شود. محدودیت (۴) نشان می‌دهد در صورتی عملیات مختلف روی ماشین i پردازش می‌شود که ماشین i قادر به پردازش آن عملیات باشد. محدودیت (۵) نشان می‌دهد مجموع زمان پردازش کارهایی که بعد از هر توقف اجرا می‌شوند نباید از بازه زمانی بین دو توقف تجاوز نمایند. محدودیت (۶) و (۷) از تداخل میان کارها روی یک ماشین جلوگیری می‌نمایند. محدودیت (۸) و (۹) نشان می‌دهد عملیات هر کار به ترتیب اجرا می‌شود و تا زمانی که یک عملیات تمام نشود عملیات بعدی شروع نخواهد شد. محدودیت (۱۰) و (۱۱) موجب می‌شود کارها بعد از هر توقف شروع شوند و قبل از آغاز توقف بعدی خاتمه یابند. محدودیت (۱۲) باعث تخصیص درست کارها بعد از هر توقف می‌شود. محدودیت (۱۳) نشان می‌دهد اگر عملیاتی روی ماشین i پردازش شود زمان خاتمه آن عملیات روی ماشین i ، مقداری مثبت خواهد بود. محدودیت (۱۴) بیان می‌کند که فعالیت‌های نت می‌بایست در پنجره زمانی مشخصی تکمیل شوند. روابط (۱۵)، (۱۶) و (۱۷) متغیرهای مساله را تعریف می‌نمایند.

۴. مثال عددی

در این بخش ۳ مساله کار کارگاهی، با انعطاف‌پذیری کلی و جزئی و با ابعاد مختلف از [۱۳و۱] انتخاب و حل می‌نماییم. در جداول زیر نماد O_j نشان دهنده آن است که عملیات مربوطه روی آن ماشین قابلیت پردازش ندارد.

۴-۱- مساله 4×4

در این بخش یک مساله کار کارگاهی، با انعطاف‌پذیری جزئی که شامل ۴ کار، ۴ ماشین و ۱۶ عملیات است مورد بررسی قرار می‌گیرد. زمان پردازش مربوط به عملیات هر کار، روی ماشین‌هایی که قادر به پردازش آن عملیات می‌باشند، مطابق جدول (۱) است.

جدول ۱- زمان پردازش عملیات در مساله (۴-۱)

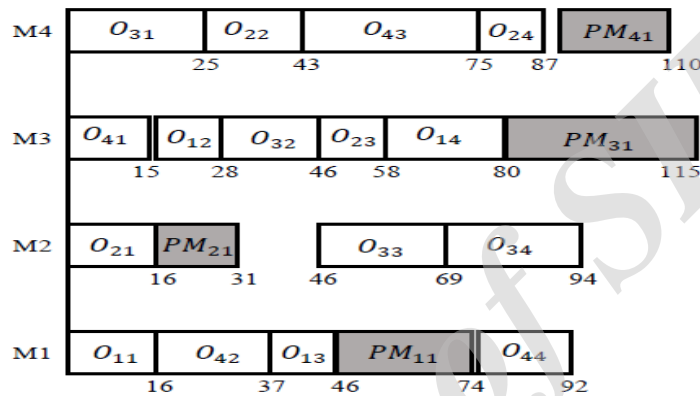
کار	عملیات	M1	M2	M3	M4
j_1	O_{11}	۱۶	-	۱۸	۱۶
	O_{12}	۳۲	۲۷	۱۲	۲۰
	O_{13}	۱۲	-	۱۸	۴۸
	O_{14}	۱۸	۱۵	۲۲	-
j_2	O_{21}	۱۲	۱۶	-	۳۳
	O_{22}	۲۰	۱۸	۲۷	۱۸
	O_{23}	۲۴	-	۱۲	۱۹
	O_{24}	-	۲۴	۱۷	۱۲
j_3	O_{31}	۳۸	۳۰	۲۱	۲۵
	O_{32}	۲۴	-	۱۸	۱۵
	O_{33}	-	۲۳	۴۰	۳۵
	O_{34}	۳۶	۲۵	-	۴۴
j_4	O_{41}	۱۲	۱۶	۱۵	-
	O_{42}	۲۱	-	۲۸	۳۰
	O_{43}	۲۵	۱۵	-	۳۲
	O_{44}	۱۷	۱۶	۲۴	-

هر کدام از فعالیت‌های نگهداری و تعمیرات دارای زمان اجرای مشخصی می‌باشند و می‌بایست در یک پنجره زمانی معین تکمیل شوند. در جدول (۲) فعالیت‌های نت مربوط به مثال (۴-۱)، مدت زمان اجرا و پنجره زمانی مربوط به هر فعالیت را مشاهده می‌کنید.

جدول ۲- زمان اجرای فعالیت نت در مساله (۱-۴)

مدت زمان اجرا	دیرترین زمان تکمیل	زودترین زمان تکمیل	فعالیت نت
۲۵	۹۵	۵۵	PM_{11}
۱۵	۵۵	۱۵	PM_{21}
۳۵	۱۱۵	۵۵	PM_{31}
۲۰	۱۱۰	۷۰	PM_{41}

با حل مساله فوق، زمان‌های شروع و خاتمه هر کار و بهترین زمان برای اجرای فعالیت نت با توجه به هدف مساله بدست می‌آید. در این بخش نمودار گانت مربوط به مثال (۱-۴) را با توجه به نتایج حاصل، ترسیم نمودیم. همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌کنید حداکثر زمان خاتمه (C_{max}) برابر ۹۴ می‌شود. زمان‌های شروع و خاتمه هر کار و بهترین زمان برای اجرای فعالیت نت را می‌توان از شکل (۱) استخراج نمود.



شکل ۱- جواب بینه مساله (۱-۴)

۲-۴- مساله 8×8

در این بخش یک مساله کار کارگاهی، با انعطاف‌پذیری جزئی که شامل ۸ کار، ۸ ماشین و ۲۷ عملیات است مورد بررسی قرار می‌گیرد. زمان پردازش مربوط به عملیات هر کار، روی ماشین‌هایی که قادر به پردازش آن عملیات می‌باشند، مطابق جدول (۳) است.

جدول ۳- زمان پردازش عملیات در مساله (۲-۴)

کار	عملیات	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
j_1	O_{11}	۵	۳	۵	۳	۳	-	۱۰	۹
	O_{12}	۱۰	-	۵	۸	۳	۹	۹	۶
	O_{13}	-	۱۰	-	۵	۶	۲	۴	۵
j_2	O_{21}	۵	۷	۳	۹	۸	-	۹	-
	O_{22}	-	۸	۵	۲	۶	۷	۱۰	۹
	O_{23}	-	۱۰	-	۵	۶	۴	۱	۷
	O_{24}	۱۰	۸	۹	۶	۴	۷	-	-
j_3	O_{31}	۱۰	-	-	۷	۶	۵	۲	۴
	O_{32}	-	۱۰	۶	۴	۸	۹	۱۰	-
	O_{33}	۱	۴	۵	۶	-	۱۰	-	۷
j_4	O_{41}	۳	۱	۶	۵	۹	۷	۸	۴
	O_{42}	۱۲	۱۱	۷	۸	۱۰	۵	۶	۹

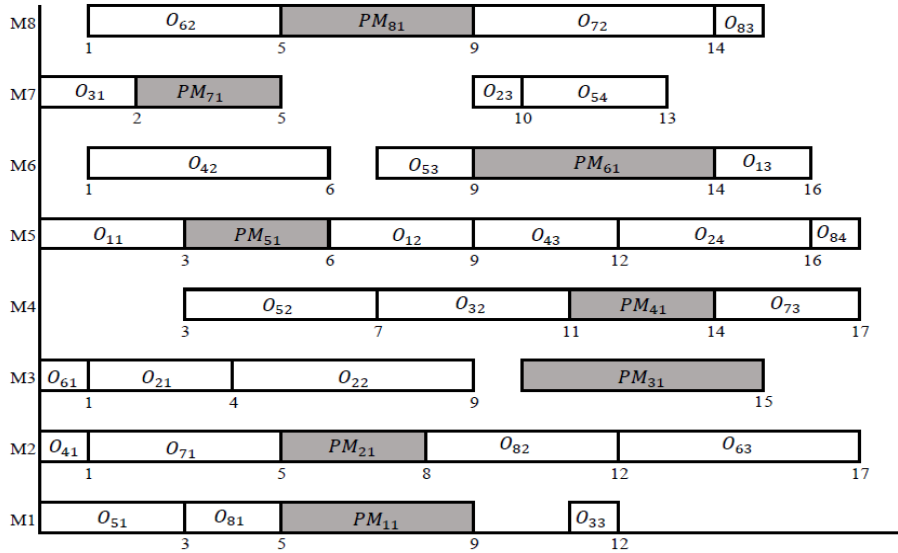
۷	۵	۹	۳	۱۰	۲	۶	۴	O_{43}	
-	۱۰	-	۹	۸	۷	۶	۳	O_{51}	j_5
-	۶	۸	۹	۴	۷	-	۱۰	O_{52}	
-	۷	۲	۴	۷	۸	۹	-	O_{53}	
۶	۳	۵	۷	۶	-	۹	۱۱	O_{54}	
۱۰	-	۹	۶	۴	۱	۷	۶	O_{61}	j_6
۴	۶	۷	۹	۹	۹	-	۱۱	O_{62}	
-	۱۰	-	۱۱	۱۰	۹	۵	۱۰	O_{63}	
-	۱۰	-	۷	۶	۲	۴	۵	O_{71}	j_7
۵	۱۰	۹	۱۱	۹	-	۹	-	O_{72}	
۱۰	-	۶	۸	۳	۹	۸	-	O_{73}	
۱۰	-	۴	-	۹	۵	۸	۲	O_{81}	j_8
-	۱۰	-	۹	۸	۷	۴	۷	O_{82}	
۱	۷	۶	۵	۸	-	۹	۹	O_{83}	
-	۸	۵	۱	۷	۳	-	۹	O_{84}	

در جدول (۴) فعالیت‌های نت مربوط به مثال (۲-۴)، مدت زمان اجرا و پنجره زمانی خاتمه، برای هر فعالیت نت را مشاهده می‌کنید.

جدول ۴- زمان اجرای فعالیت نت در مساله (۲-۴)

مدت زمان اجرا	دیرترین زمان تکمیل	زودترین زمان تکمیل	فعالیت نت
۴	۱۰	۵	PM_{11}
۳	۹	۶	PM_{21}
۵	۱۵	۱۰	PM_{31}
۳	۱۷	۹	PM_{41}
۳	۱۰	۳	PM_{51}
۵	۱۶	۸	PM_{61}
۳	۱۴	۴	PM_{71}
۴	۱۳	۷	PM_{81}

مساله (۲-۴) را می‌توان با استفاده مدل ریاضی و به کمک نرم‌افزار GAMZ در کمتر از ۲۷۰ ثانیه حل نمود. با حل مساله فوق، زمان‌های شروع و خاتمه هر کار و بهترین زمان برای اجرای فعالیت نت با توجه به هدف مساله بدست می‌آید. در این بخش نمودار گانت مربوط به مثال (۲-۴) را با توجه به نتایج حاصل، ترسیم نمودیم. همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌کنید حداکثر زمان خاتمه (C_{max}) برابر ۱۷ می‌شود. زمان‌های شروع و خاتمه هر کار و بهترین زمان برای اجرای فعالیت نت را می‌توان از شکل (۲) استخراج نمود.



شکل ۲- جواب بهینه مساله (۲-۴)

۳-۴- مساله 10×10

در این بخش، به منظور ارزیابی مدل ریاضی ارائه شده یک مساله کار کارگاهی، با انعطاف پذیری کلی که شامل ۱۰ کار، ۱۰ ماشین و ۳۰ عملیات است مورد بررسی قرار می گیرد. زمان پردازش مربوط به عملیات هر کار، روی ماشین هایی که قادر به پردازش آن عملیات می باشند، مطابق جدول (۵) است.

جدول ۵- زمان پردازش عملیات در مساله (۳-۴)

کار	عملیات	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
j_1	O_{11}	۱	۴	۶	۹	۳	۵	۲	۸	۹	۵
	O_{12}	۴	۱	۱	۳	۴	۸	۱۰	۴	۱۱	۴
	O_{13}	۳	۲	۵	۱	۵	۶	۹	۵	۱۰	۳
j_2	O_{21}	۲	۱۰	۴	۵	۹	۸	۴	۱۵	۸	۴
	O_{22}	۴	۸	۷	۱	۹	۶	۱	۱۰	۷	۱
j_3	O_{23}	۶	۱۱	۲	۷	۵	۳	۵	۱۴	۹	۲
	O_{31}	۸	۵	۸	۹	۴	۳	۵	۳	۸	۱
	O_{32}	۹	۳	۶	۱	۲	۶	۴	۱	۷	۲
j_4	O_{33}	۷	۱	۸	۵	۴	۹	۱	۲	۳	۴
	O_{41}	۵	۱۰	۶	۴	۹	۵	۱	۷	۱	۶
	O_{42}	۴	۲	۳	۸	۷	۴	۶	۹	۸	۴
j_5	O_{43}	۷	۳	۱۲	۱	۶	۵	۸	۳	۵	۲
	O_{51}	۷	۱۰	۴	۵	۶	۳	۵	۱۵	۲	۶
	O_{52}	۵	۶	۳	۹	۸	۲	۸	۶	۱	۷
j_6	O_{53}	۶	۱	۴	۱	۱۰	۴	۳	۱۱	۱۳	۹
	O_{61}	۸	۳	۱۰	۸	۴	۲	۷	۸	۳	۱۰
	O_{62}	۷	۳	۱۲	۵	۴	۳	۶	۹	۲	۱۵
j_7	O_{63}	۴	۷	۳	۶	۳	۴	۱	۵	۱	۱۱
	O_{71}	۱	۷	۸	۳	۴	۹	۴	۱۳	۱۰	۷
	O_{72}	۳	۸	۱	۲	۳	۶	۱۱	۲	۱۳	۳
j_8	O_{73}	۵	۴	۲	۱	۲	۱	۸	۱۴	۵	۷
	O_{81}	۵	۷	۱۱	۳	۲	۹	۸	۱۲	۱۲	۸
	O_{82}	۸	۳	۱۰	۷	۵	۱۳	۴	۶	۸	۴
	O_{83}	۶	۲	۱۳	۵	۴	۳	۵	۷	۹	۵

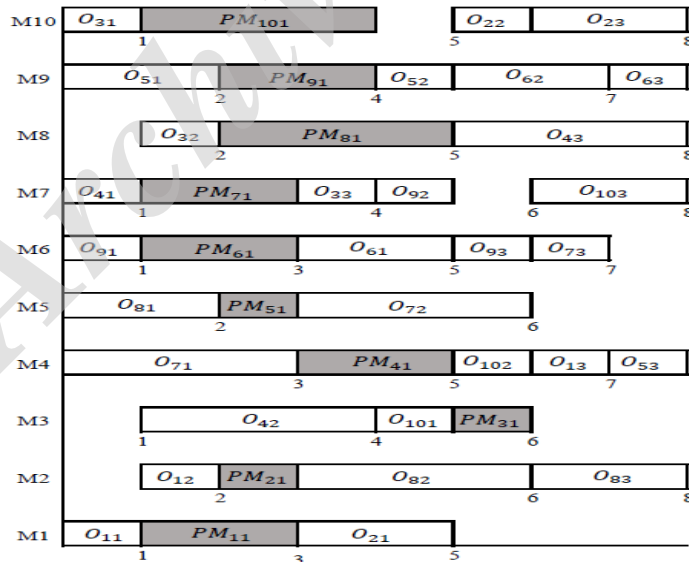
۴	۵	۷	۶	۱	۸	۳	۱	۹	۳	O_{91}	j_9
۷	۶	۹	۱	۳	۷	۵	۲	۶	۴	O_{92}	
۱۲	۱۰	۳	۲	۱	۶	۸	۴	۵	۸	O_{93}	
۶	۲۰	۶	۲	۱	۷	۶	۱	۳	۴	O_{101}	j_{10}
۱۵	۱۷	۴	۱	۴	۹	۱	۸	۱	۳	O_{102}	
۲۳	۱۰	۴	۲	۵	۳	۲	۴	۲	۹	O_{103}	

در جدول (۶) فعالیت‌های نت مربوط به مثال (۳-۴)، مدت زمان اجرا و پنجره زمانی خاتمه، برای هر فعالیت نت را مشاهده می‌کنید. بیشترین زمان اجرای فعالیت نت مربوط به ماشین ۸ و ۱۰ می‌باشد که برابر ۳ واحد زمانی است. در این مثال مجموع زمان اجرای فعالیت‌های نت ۱۹ واحد زمانی می‌باشد.

جدول ۶- زمان اجرای فعالیت نت در مساله (۳-۴)

فعالیت نت	زودترین زمان تکمیل	دیرترین زمان تکمیل	مدت زمان اجرا
PM_{11}	۲	۴	۲
PM_{21}	۲	۷	۱
PM_{31}	۱	۶	۱
PM_{41}	۲	۵	۲
PM_{51}	۳	۷	۱
PM_{61}	۲	۶	۲
PM_{71}	۲	۵	۲
PM_{81}	۳	۷	۳
PM_{91}	۲	۵	۲
PM_{101}	۳	۶	۳

جواب بهینه مساله (۳-۴) و زمان اجرای فعالیت‌های نت را، می‌توان در شکل (۳) مشاهده نمود. در این مثال مقدار بهینه C_{max} برابر ۸ می‌شود.



شکل ۳- جواب بهینه مساله (۳-۴)

۵. نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر مساله زمان‌بندی کار کارگاهی انعطاف‌پذیر با محدودیت دسترسی به ماشین‌ها را بررسی نمودیم. عدم دسترسی به ماشین یکی از محدودیت‌هایی است که سیستم‌های ساخت و تولید همواره با آن مواجه‌اند. در این پژوهش سعی نمودیم با

ارائه یک مدل ریاضی، کارها را به گونه‌ای زمان‌بندی نماییم که با توجه به محدودیت‌های عدم دسترسی، از ظرفیت‌های موجود به صورت بهینه استفاده شود. به منظور ارزیابی مدل ریاضی ۳ مثال عددی با ابعاد مختلف انتخاب و حل نمودیم. در آینده می‌توان فرضیاتی از قبیل در نظر گرفتن اثر یادگیری و زمان‌های آماده‌سازی را به مساله افزود تا در محیط‌های صنعتی واقعی بیش از پیش مورد استفاده قرار گیرد.

۶. مراجع

- Gao, J., Gen, M., & Sun, L. (2006). Scheduling jobs and maintenances in flexible job shop with a hybrid genetic algorithm. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 17(4), 493-507.
- Adiri, I., Bruno, J., Frostig, E., & Kan, A. R. (1989). Single machine flow-time scheduling with a single breakdown. *Acta Informatica*, 26(7), 679-696.
- Yazdani, M., Khalili, S. M., Babagolzadeh, M., & Jolai, F. (2017). A single-machine scheduling problem with multiple unavailability constraints: A mathematical model and an enhanced variable neighborhood search approach. *Journal of Computational Design and Engineering*, 4(1), 46-59.
- Schmidt, G. (1984). Scheduling on semi-identical processors. *Zeitschrift für Operations Research*, 28(5), 153-162.
- Lee, C-Y. (1997). Minimizing the make-span in the two-machine flow-shop scheduling problem with an availability constraint. *Operations Research Letters*, 20(3), 129-139.
- Graves, G. H., & Lee, C. Y. (1999). Scheduling maintenance and semiresumable jobs on a single machine. *Naval Research Logistics (NRL)*, 46(7), 845-863.
- Brucker, P., & Schlie, R. (1990). Job-shop scheduling with multi-purpose machines. *Computing*, 45(4), 369-375.
- Fattahi, P., Mehrabad, M. S., & Jolai, F. (2007). Mathematical modeling and heuristic approaches to flexible job shop scheduling problems. *Journal of intelligent manufacturing*, 18(3), 331.
- Saidi-Mehrabad, M., & Fattahi, P. 2007. Flexible job shop scheduling with tabu search algorithms. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 32(5), 563-570.
- Roshanaei, V., Azab, A., & ElMaraghy, H. (2013). Mathematical modelling and a meta-heuristic for flexible job shop scheduling. *International Journal of Production Research*, 51(20), 6247-6274.
- Zhang, G., Shao, X., Li, P., & Gao, L. (2009). An effective hybrid particle swarm optimization algorithm for multi-objective flexible job-shop scheduling problem. *Computers & Industrial Engineering*, 56(4), 1309-1318.
- Wang, S., & Yu, J. (2010). An effective heuristic for flexible job-shop scheduling problem with maintenance activities. *Computers & Industrial Engineering*, 59(3), 436-447.
- Rajkumar, M., Asokan, P., & Vamsikrishna, V. (2010). A GRASP algorithm for flexible job-shop scheduling with maintenance constraints. *International Journal of Production Research*, 48(22), 6821-6836.
- نهادی، ن، عباسیان، م، بهار (۱۳۹۰). مساله زمان‌بندی کار کارگاهی چند هدفی انعطاف‌پذیر پویا با در نظر گرفتن محدودیت نگهداری و تعمیرات، نشریه بین‌المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید، شماره اول، ۱۴-۲۶.
- Ziaee, M. (2014). An efficient heuristic algorithm for flexible job shop scheduling with maintenance constraints. *Applied Mathematics and Sciences*, 1(1).