مجله نخبگان علوم و مهندسی

Journal of Science and Engineering Elites

جلد ۵- شماره ۳- سال ۱۳۹۹

www.ElitesJournal.ir

روش هایی برای یافتن مقدارهای ویژه عملگرهای خطی در فضاهای هیلبرت با بعد نامتناهی

رضا علی زاده[۱*]، علی ثامرپور[۲]

۱- دانشجوی دکتری آنالیز ریاضی دانشگاه لرستان

۲- دانشیار ریاضی دانشگاه لرستان

*Rezam_alizadeh@yahoo.com

ارسال: تیر ماه ۹۹ پذیرش: مرداد ماه ۹۹

چکیده

در این مقاله، هدف ما این است که با ارائه مثال هایی مناسب روش هایی برای یافتن مقدارهای ویژه و طیف عملگرهای خطی در فضاهای هیلبرت با بعد نامتناهی بیان کنیم. بردارها و مقدارهای ویژه یک عملگر خطی در بسیاری از شاخه های علوم از جمله علوم مهندسی کاربرد دارند. اکثر عملگرهایی که در این مقاله در نظر گرفته ایم غیرخوالحاق و یا دیفرانسیلی هستند.

کلمات کلیدی: عملگر خطی، مقدار ویژه، بردار ویژه، طیف، عملگر دیفرانسیل.

۱– مقدمه

مطالعه طیف و حلال عملگرهای خطی، از مسایل تاریخی و کاربردی در ریاضیات و علوم و مهندسی است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در فیزیک، شیمی، ریاضی، علوم زیستی و علوم مهندسی و بسیاری از شاخه های علمی دیگری کاربرد دارند. در این مقاله سعی شده است، مقادیر ویژه برخی عملگرهای خطی و بخصوص عملگرهای غیرخودالحاق و دیفرانسیلی پیدا شود. معمولا یافتن طیف عملگرها با کمک ماتریس های متناظرشان انجام می گیرد که این روش، بخصوص در جبرخطی، استفاده زیادی دارد. در این مقاله با در نظر گرفتن شرایط مرزی از جمله شرایط مرزی دیریکله، شرایط مرزی نیومن، شرایط مرزی متناوب، شرایط مرزی آمیخته و شرایط مرزی دلخواه، مقادیر ویژه یک عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم پیدا می شود.

۲– پیش نیازها

تعریف ۱: فرض کنید که H یک فضای هیلبرت مختلط و $A: H \to H$ یک عملگر خطی در این فضا باشد. به عدد مختلط λ یک مقدار ویژه، برای عملگر A گفته می شود هرگاه بردار غیر صفر v در H وجود داشته باشد که $Av = \lambda v$. در این صورت به v یک بردار ویژه مناظر با λ گفته می شود. مسلماً اگر عدد مختلط λ یک مقدار ویژه برای عملگر خطی A باشد آن گاه $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}$ یک به یک نیست و برعکس.

تعریف۲: فرض کنید که H یک فضای هیلبرت مختلط و $A: H \to H$ یک عملگر خطی در این فضا باشد. عدد مختلط λ یک مقدار منظم برای A است هرگاه $A-\lambda I$ یک به یک باشد و $(A-\lambda I)^{-1}$ یک عملگر خطی کراندار بر یک زیرمجموعه چگال از H باشد.

تعریف ۳ : به مجموعه تمام مقادیر منظم عملگر A مجموعه حلال این عملگر گفته می شود و آن را با $\rho(A)$ نشان می دهند به عبارت دیگر:

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: (A-\lambda I)^{-1} \in B(H), \overline{(A-\lambda I)D_A} = H\right\} \tag{۱}$$

مکمل $\rho(A)$ در اعداد مختلط با نماد $\sigma(A)$ نشان داده می شود و به آن طیف A گفته می شود. $\sigma(A)$ ازسه بخش دو به دو مجزا تشکیل می شود. طیف نقطه ای یعنی $\sigma_p(A)$ که در واقع مجموعه مقادیر ویژه A هستند. طیف پیوسته یعنی $\sigma_c(A)$ شامل همه اعداد مختلط λ هستند که عملگر $A-\lambda I$ یک به یک و با برد چگال در H باشد که $(A-\lambda I)^{-1}$ بی کران باشد و بالاخره طیف باقیمانده یعنی $\sigma_r(A)$ شامل همه اعداد مختلط λ هستند که عملگر $A-\lambda I$ یک به یک و با برد غیر چگال در H باشد.

مثال۱ : در فضای هیلبرت ℓ_2 عملگر B را روی همه دنباله های متناهی (دنباله هایی که از مرتبه ای به بعد جملات آنها صفر هستند) به شکل $Be_k = ke_k, k = ۱,۲,۳,...$ تعریف می شود. واضح است که هر عدد طبیعی یک مقدار ویژه این عملگر است و همه مقدارهای ویژه این عملگر، طبیعی هستند. یعنی $\sigma_p(B) = \mathbf{N}$.

شرایط مرزی: برخی از شرایط مرزی معمول عبارتند از:

شرایط مرزی دیریکله : $u(۰) = u(۱)$

شرایط مرزی نیومن : $u'(۰) = ۰, u'(۱) = ۰$

شرایط مرزی تناوبی: $u(۰) = u(۱), u'(۰) = u'(۱)$

در شرایط مرزی آمیخته اعداد $\alpha_۰ u(۰) + \beta_۰ u'(۰) = ۰, \alpha_۱ u(۱) + \beta_۱ u'(۱) = ۰$ شرایط مرزی آمیخته:

$\alpha_۰, \beta_۰, \alpha_۱, \beta_۱$ ثابت های مختلطی هستند.

شرایط آغازین : $u(۰) = ۰, u'(۰) = ۰$

شرایط پایانی : $u(۱) = ۰, u'(۱) = ۰$

نوع شرایط مرزی در حل سوال های یافتن مقدارهای ویژه اهمیت دارند.

قضیه ۱: در عملگرهای طولپا، اندازه مقادیر ویژه برابر یک هستند.

تعریف: با در نظر گرفتن پایه استاندارد $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ از فضای هیلبرت ℓ_2، عملگر $A: \ell_2 \to \ell_2$ که $Ae_k = e_{k+۱}, k \geq ۱$ عملگر انتقال به راست نامیده می شود و اگر $Ae_1 = 0, Ae_k = e_{k-1}, k \geq 2$، عملگر A عملگر انتقال به چپ است.

۳- ورود به نتایج اصلی

قضیه ۲ : عملگر یک واحد انتقال به راست، فاقد مقدار ویژه است.

برهان : اگر عدد مختلط λ یک مقدار ویژه A باشد و v بردار ویژه متناظر با این مقدار و $v = \sum_{k=۱}^{\infty} a_k e_k$ و a_n اولین اندیس غیرصفر این سری باشد. براساس تعریف این عملگر :

$\left\langle Av, e_n \right\rangle = \left\langle A\sum_{k=n}^{\infty} a_k e_k, e_n \right\rangle = ۰$ از طرف دیگر $\left\langle Av, e_n \right\rangle = \left\langle \lambda v, e_n \right\rangle = \lambda a_n$ پس $\lambda = ۰$. اما عملگر انتقال به راست، طولپاست و لذا $|\lambda| = ۱$ و این دو نتیجه متناقض هستند. پس عملگر انتقال به راست نمی تواند مقدار ویژه داشته باشد. می توان طیف این عملگر را هم براحتی پیدا کرد. چون این عملگر، طولپاست پس طیف آن در دایره ای به مرکز مبدا و شعاع واحد

در صفحه مختلط قرار دارد.حال اگر $0<|\lambda|<1$ می توان نشان داد λ در طیف این عملگر قرار دارد. توجه کنید که برای هر بردار غیرصفر v: $(A-\lambda I)v \neq e_1$.چنان چه بردار غیرصفر $v=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k$ وجود داشته باشد که $(A-\lambda I)v=e_1$ آن گاه:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k e_{k+1}-\lambda a_k e_k)=e_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k-1}e_k-\lambda a_k e_k)=e_1, a_0=0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k-1}-\lambda a_k)e_k=e_1$$

$$a_0-\lambda a_1=1 \Rightarrow a_1=\frac{-1}{\lambda}$$

$$a_1-\lambda a_2=0 \Rightarrow a_2=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{-1}{\lambda}\right)=-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$a_2-\lambda a_3=0 \Rightarrow a_3=-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3,\ldots,a_k=-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k$$

با توجه به این که $0<|\lambda|\leq 1$ نتیجه می شود سری $v=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k$ واگراست که این تناقض است.پس $(A-\lambda I)v \neq e_1$ اگر λ در طیف نباشد، لاجرم یک نقطه منظم عملگر خواهد شد پس طبق تعریف باید: $\overline{(A-\lambda I)D_A}=\ell_2$ و این با رابطه ای که در بالا اثبات شد تناقض دارد. پس λ در طیف قرار دارد. خود صفر هم در طیف قرار دارد پس:

$$\begin{aligned}&\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|\leq 1\}\\&\sigma_p(A)=\varnothing\\&\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|=1\}\\&\sigma_r(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|<1\}\end{aligned} \tag{2}$$

به صورت مشابه می توان نتایج بدست آمده در قضیه ۲ را برای عملگرهای انتقال به راست به اندازه دو واحد و سه واحد و غیره اثبات کرد.

۴– طیف عملگر انتقال به چپ

فضای هیلبرت ℓ_2 را در نظر بگیرید. عملگر $A:\ell_2\to\ell_2$ عملگر انتقال به چپ است، هرگاه:

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)=(\alpha_2,\alpha_3,\ldots) \tag{3}$$

فرض کنید که $|\lambda|=1$. اگر بردار غیر صفر $v=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e_k$ در ℓ_2 موجود باشد که

$(A-\lambda I)v=0$ آنگاه :

$$Av=\lambda v \Rightarrow (a_2,a_3,\ldots)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\ldots)$$

$$\Rightarrow a_2=\lambda a_1, a_3=\lambda a_2=\lambda^2 a_1, a_4=\lambda a_3=\lambda^3 a_1,\ldots$$

پس :

$$\|v\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2=\sum_{i=0}^{\infty}|\lambda|^{2(i-1)}|a_1|^2=\sum_{i=0}^{\infty}|a_1|^2=\infty$$

و این تناقض نشان می دهد که $A-\lambda I$ یک به یک است. حال اگر $|\lambda|<1$ عملگر $A-\lambda I$ یک به یک نیست. مثلا اگر بردار v به صورت $(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\ldots)$ تعریف شود اولا این بردار در ℓ_2 قرار دارد و ثانیا $(A-\lambda I)v=0$. پس λ مقدار ویژه است، لذا:

$$\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|\leq 1\}$$

$$\sigma_p(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|<1\}$$
$$\sigma_c(A)=\{\lambda\in\mathbf{C}:|\lambda|=1\} \qquad (۴)$$
$$\sigma_r(A)=\varnothing$$

۵- مقدارهای ویژه عملگرهای دیفرانسیلی

تعریف: مجموعه همه چند جمله ای های با درجه حداکثر n که ضرایب آنها عضو اعداد حقیقی باشند را با P_n نشان می دهند. یعنی:

$$P_n=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n:a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathrm{R}\} \qquad (۵)$$

این مجموعه به همراه جمع برداری و ضرب اسکالر زیر یک فضای برداری است.

به ازای هر $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\in P_n,g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n\in P_n,c\in\mathrm{R}$

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$$
$$cf(x)=ca_0+ca_1x+ca_2x^2+\ldots+ca_nx^n \qquad (۶)$$

در این فضا دو عملگر تعریف کرده و مقدارهای ویژه آنها را پیدا می کنیم.

مثال۲: مقدارهای ویژه عملگر خطی $T:P_n(\mathrm{R})\to P_n(\mathrm{R}),T(f(x))=x^2f''(x)$ را در صورت وجود بیابید.

حل: اگر λ مقدار ویژه ای از این عملگر خطی و $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ بردار ویژه متناظر با آن باشد:

$$T(f(x))=\lambda f(x)\Rightarrow x^2f''(x)=\lambda f(x)$$
$$\Rightarrow n(n-1)a_nx^n+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+2a_2x^2=\lambda a_nx^n+\lambda a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0$$

پس:

$$\lambda a_0=0$$
$$\lambda a_1=0$$
$$\lambda a_2=2a_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda a_n=n(n-1)a_n$$

از این معادلات نتیجه می شود که مجموعه مقادیر ویژه این عملگر برابر است با: $\{j(j-1):j=1,2,\ldots,n\}$ و تابع $f_j(x)=x^j$ می تواند تابع ویژه متناظر با مقدار ویژه $j(j-1)$ باشد که $j=1,2,\ldots,n$. با روش مشابه می توان مقدارهای ویژه عملگر $Tf(x)=x^kf^{(k)}(x),k=1,2,3,\ldots,n$ را در این فضا پیدا کرد.

مثال۳: نشان دهید که اگر $T:P_n(\mathrm{R})\to P_n(\mathrm{R}),T(f(x))=f'(x)$ فاقد مقدار ویژه غیرصفر است.

حل: واضح است که صفر یک مقدار ویژه T است زیرا اگر $f(x)=1$ آن گاه $Tf=0\times f$. حال اگر λ (غیر صفر) مقدار ویژه ای از این عملگر خطی باشد:

$$Tf(x)=\lambda f(x)\Rightarrow f'(x)=\lambda f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\lambda$$
$$Ln|f(x)|=\lambda x+c\Rightarrow|f(x)|=e^{\lambda x+c}$$

اما f چندجمله ای است و لذا این تساوی تناقض است. در ادامه مقدارهای ویژه چندین عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم حساب شده است. برای شروع کار عملگر دیفرانسیلی $Af(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ را در فضای $L^2(0,1)$ در نظر بگیرید. می دانید که این عملگر، خودالحاق است. پس مقدار های ویژه این عملگر در صورت وجود حقیقی هستند. خواهید دید که تغییر شرایط مرزی این عملگر باعث تغییر مقدارهای ویژه می شود.

مثال۴ : مقدارهای ویژه عملگر A که در بالا تعریف شد را بشرطی بیابید که در شرایط مرزی $f(0)=f(1)=0$ صدق کنند. (با شرایط مرزی دیریکله)

حل: اگر λ مقدار ویژه این عملگر باشد: $Af=\lambda f$. اکنون سه حالت در نظر گرفته می شود.

حالت اول : $\lambda=0$ پس در این جا باید مشتق دوم تابع f صفر باشد و لذا تابع f خطی است. پس $f(x)=ax+b$ با در نظر گرفتن شرایط مرزی:

$$\begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow b=0 \\ f(1)=0 \Rightarrow a=0 \end{cases}$$

پس باید تابع ویژه f برابر صفر باشد که امکان ندارد. پس نتیجه می شود که $\lambda=0$ مقدار ویژه A نیست.

حالت دوم: $\lambda<0$ اکنون از رابطه ی $Af=\lambda f$ نتیجه میشود که معادله مشخصه بصورت $r^2=\lambda<0$ است که جواب های آن مختلط هستند و در واقع $r=\pm\sqrt{-\lambda}i$. در این حالت جواب عمومی این معادله دیفرانسیلی به صورت زیر است.

$$f(x)=a\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+b\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \tag{7}$$

در این جا هم با کمک شرایط مرزی نتیجه می شود:

$$\begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow a=0 \\ f(1)=0 \Rightarrow b\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)=0 \end{cases} \tag{8}$$

چون تابع ویژه f نمی تواند صفر باشد پس باید $\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)=0$ و لذا $\sqrt{-\lambda}=k\pi, k>0$ و یا $\lambda=-(k\pi)^2$ که $k=1,2,3,...$ و تابع های ویژه متناظر عبارتند از $f_k(x)=\sin(k\pi x)$ که $k=1,2,3,...$

حالت سوم: $\lambda>0$. در اینجا ریشه های معادله مشخصه عبارتند از: $r=\pm\sqrt{\lambda}$ و جواب عمومی این معادله عبارت است از :

$$f(x)=a\cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right)+b\sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{9}$$

در این جا هم شرایط مرزی را اعمال کنید:

$$\begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow a=0 \\ f(1)=0 \Rightarrow b\sinh\left(\sqrt{\lambda}\right)=0 \end{cases} \tag{10}$$

چون $\lambda>0$ پس $\sinh\left(\sqrt{\lambda}\right)\neq 0$ و لذا $b=0$ و از این جا نتیجه می شود که f باید صفر باشد که این گونه نیست. پس در این حالت، عملگر داده شده مقدار ویژه ندارد.

مثال۵: در اینجا باز هم همین عملگر را با شرایط مرزی نیومن یعنی $f'(0)=f'(1)=0$ در نظر گرفته می شود. باز هم سه حالت قبلی را در نظر گرفته و در هر حالت به یافتن مقدارهای ویژه احتمالی پرداخته می شود.

حالت اول: $\lambda=0$ پس در این جا باید مشتق دوم تابع f، صفر باشد و لذا تابع f خطی است. $f(x)=ax+b$ پس از در نظر گرفتن شرایط مرزی:

$$\begin{cases} f'(0)=0 \Rightarrow a=0 \\ f'(1)=0 \Rightarrow a=0 \end{cases}$$

خوب در این حالت $\lambda=0$ بیک مقدار ویژه است و تابع ویژه متناظرش، تابع ثابت غیر صفر است.

حالت دوم: $\lambda<0$ اکنون از رابطه $Af=\lambda f$ نتیجه می شود که معادله مشخصه بصورت $r^2=\lambda<0$ است که جواب های آن مختلط هستند و در واقع $r=\pm\sqrt{-\lambda}i$. در این حالت جواب عمومی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$f(x)=a\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+b\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \tag{11}$$

در اینجا هم اگر از شرایط مرزی استفاده شود ، نتیجه می شود :

$$\lambda=-(k\pi)^2, k=1,2,3,\ldots \tag{12}$$

و تابع های ویژه عبارتند از :

$$f_k(x)=\cos(k\pi x) \qquad \text{که } k=1,2,3,\ldots \tag{13}$$

حالت سوم: $\lambda>0$. در اینجا ریشه های معادله مشخصه عبارتند از $r=\pm\sqrt{\lambda}$ و جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$f(x)=a\cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right)+b\sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{14}$$

اگر از شرایط مرزی استفاده شود نتیجه می شود که در این حالت مقدار ویژه ای بدست نمی آید.

مثال۶: مجددا همان عملگر مثال های ۴ و۵ را با شرایط مرزی $f(0)=f'(0), f(1)=f'(1)$ در نظر گرفته ، باز هم با در نظر گرفتن سه حالت قبلی به جستجوی مقدارهای ویژه پرداخته می شود.

حالت اول: $\lambda=0$ پس در این جا باید مشتق دوم تابع f باید صفر باشد و لذا تابع f خطی است. $f(x)=ax+b$ پس از در نظر گرفتن شرایط مرزی :

$$\begin{cases} f(0)=f'(0) \\ f(1)=f'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=a \end{cases} \Rightarrow a=b=0$$

در این حالت تابع ویژه باید صفر باشد که قابل قبول نیست. لذا در این حالت عملگر داده شده، مقدار ویژه ندارد.

حالت دوم: $\lambda<0$ اکنون از رابطه $Af=\lambda f$ نتیجه می شود که معادله مشخصه بصورت $r^2=\lambda<0$ است که جواب های آن مختلط هستند و در واقع $r=\pm\sqrt{-\lambda}i$. در این حالت جواب عمومی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$f(x)=a\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)+b\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) \tag{15}$$

با کمک شرایط مرزی :

$$\begin{cases} f(0)=f'(0) \\ f(1)=f'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b\sqrt{-\lambda} \\ a\cos\left(\sqrt{-\lambda}\right)+b\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)=-a\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)+b\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\right) \end{cases}$$

نتیجه می شود: $b\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)=-a\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)$ و لذا $\lambda_k=-(k\pi)^2$ وتابع های ویژه متناظر با این مقدار های ویژه عبارتند از $f_k(x)=\cos(k\pi x)$.

حالت سوم: $\lambda>0$. در اینجا ریشه های معادله مشخصه عبارتند از $r=\pm\sqrt{\lambda}$ و جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$f(x) = a\cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right) \quad (16)$$

در این جا هم با اثر دادن شرایط مرزی، نتیجه می شود که عملگر داده شده مقدار ویژه ندارد.

مثال۷: در فضای $L^2(0,1)$ عملگر دیفرانسیلی $Ay = y'' - 4y' + 3y$ را با شرایط مرزی $y(0) = y(1) = 0$ در نظر بگیرید. مقدارهای ویژه این عملگر را در صورت وجود بیابید.

حل: فرض کنید که λ مقدار ویژه این عملگر باشد (چون این عملگر خودالحاق است پس مقدارهای ویژه آن حقیقی هستند) پس y یعنی تابع ویژه متناظر با این مقدار وجود دارد که $Ay = \lambda y$ و لذا $y'' - 4y' + 3y = \lambda y$ یا بصورت معادل $y'' - 4y' + (3-\lambda)y = 0$. معادله مشخصه متناظر با این معادله دیفرانسیل عبارت است از: $r^2 - 4r + (3-\lambda) = 0$ جواب های این معادله عبارتند از $r = \frac{4 \pm \sqrt{4+4\lambda}}{2} = 2 \pm \sqrt{1+\lambda}$ اکنون سه حالت در نظر بگیرید.

حالت اول: $\lambda = -1$ در این حالت معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف است و لذا جواب معادله دیفرانسیل به صورت $y = (ax+b)e^{2x}$ است. حال شرایط مرزی را در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow ae^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

می بینیم که باید $y = 0$ باشد که قابل قبول نیست. پس $\lambda = -1$ نمی تواند مقدار ویژه این عملگر باشد.

حالت دوم : $\lambda > -1$ در این حالت جواب کلی معادله دیفرانسیل $y'' - 4y' + (3-\lambda)y = 0$ به صورت زیر است.

$$y = ae^{\left(2+\sqrt{1+\lambda}\right)x} + be^{\left(2-\sqrt{1+\lambda}\right)x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow ae^{\left(2+\sqrt{1+\lambda}\right)} + be^{\left(2-\sqrt{1+\lambda}\right)} \end{cases} \Rightarrow a = b = 0$$

پس در این وضعیت هم ، عملگر داده شده فاقد مقدار ویژه است.

حالت سوم: $\lambda < -1$. در این حالت ریشه های معادله مشخصه، مختلط و برابر $2 \pm \sqrt{-(1+\lambda)}i = 2 \pm mi$ هستند. جواب عمومی معادله $y'' - 4y' + (3-\lambda)y = 0$ بصورت $y = e^{2x}\left(a\cos mx + b\sin mx\right)$ است.

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ y(1) = 0 \Rightarrow e^2\left(b\sin m\right) = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم و این که y صفر نیست نتیجه می شود که $\sin m = 0$ و لذا $\sqrt{-(1+\lambda)} = k\pi$ و در نتیجه $\lambda_k = -1 - k^2\pi^2$ که $k = 1,2,3,...$. تابع ویژه متناظر با λ_k برابر $y_k = e^{2x}\sin\left(k\pi x\right)$ که $k = 1,2,3,...$.

قضیه۳: در فضای هیلبرت $L^2(0,1)$ عملگر دیفرانسیلی $Ay = ay'' + by', y(0) = y(1) = 0$ که a,b دو مقدار ثابت حقیقی هستند دارای مجموعه ای شمارش پذیر از مقدارهای ویژه است.

برهان: اگر λمقدار ویژه ای از این عملگر خطی باشد آنگاه بخاطر خودالحاق بودن این عملگر، λ حقیقی است و $ay'' + by' = \lambda y$. معادله مشخصه دارای دو ریشه است که عبارتند از $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a\lambda}}{2a}$ همان طوری که در مثال بالا هم دیدیم اگر $b^2 + 4a\lambda \geq 0$ آن گاه λ مقدار ویژه نیست. پس فرض کنید که $b^2 + 4a\lambda < 0$. در این حالت هر دو ریشه مختلط هستند: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a\lambda}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 + 4a\lambda}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\left(b^2 + 4a\lambda\right)}}{2a}i$ پس جواب عمومی معادله دیفرانسیل $ay'' + by' = \lambda y$ برابر است با :

$$y = e^{\frac{-b}{۲a}x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{-\left(b^{۲}+۴a\lambda\right)}}{۲a}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{-\left(b^{۲}+۴a\lambda\right)}}{۲a}x\right)\right) \quad (۱۷)$$

اگر شرایط آغازین را در نظر بگیریم خواهیم داشت : $\sin\left(\frac{\sqrt{-\left(b^{۲}+۴a\lambda\right)}}{۲a}\right)=۰$ و لذا:

$$\frac{\sqrt{-\left(b^{۲}+۴a\lambda\right)}}{۲a}=k\pi \Rightarrow \sqrt{-\left(b^{۲}+۴a\lambda\right)}=۲ak\pi \Rightarrow b^{۲}+۴a\lambda=-\left(۲ak\pi\right)^{۲} \Rightarrow \lambda=\frac{-\left(۲ak\pi\right)^{۲}-b^{۲}}{۴a}$$

پس مقادیر ویژه عبارتند از :

$$\lambda_k=\frac{-\left(۲ak\pi\right)^{۲}-b^{۲}}{۴a}, k=۱,۲,۳,... \quad (۱۸)$$

که بردار (تابع) ویژه متناظر با λ_k برابر است با:

$$y_k\left(x\right)=e^{\frac{-b}{۲a}x}\sin\left(k\pi x\right), k=۱,۲,... \quad (۱۹)$$

در ادامه شرایط مرزی را عوض می کنیم و مجددا مقدارهای ویژه عملگر دیفرانسیلی مثال قبل را پیدا می کنیم.

مثال۸: در مثال قبل شرایط داده شده را به صورت $y\left(۰\right)=۱, y'\left(۰\right)=۰$ در نظر گرفته مقدارهای ویژه آن را پیدا کنید. (تقریبا شرایط آمیخته)

حل: فرض کنید که λ مقدار ویژه این عملگر باشد (چون این عملگر خودالحاق است پس مقدارهای ویژه آن حقیقی هستند) پس y یعنی تابع ویژه متناظر با این مقدار وجود دارد که $Ay=\lambda y$ و لذا $y''-۴y'+۳y=\lambda y$ یا بصورت معادل $y''-۴y'+\left(۳-\lambda\right)y=۰$. معادله مشخصه متناظر با این معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$r^{۲}-۴r+\left(۳-\lambda\right)=۰$ جواب های این معادله عبارتند از $r=\frac{۴\pm\sqrt{۴+۴\lambda}}{۲}=۲\pm\sqrt{۱+\lambda}$ اکنون سه حالت در نظر بگیرید.

حالت اول: $\lambda=-۱$ در این حالت معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف است و لذا جواب معادله دیفرانسیل به صورت $y=\left(ax+b\right)e^{۲x}$ است. حال شرایط مرزی را در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} y\left(۰\right)=۱ \\ y'\left(۰\right)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۱ \\ a=-۲ \end{cases}$$

پس $\lambda=-۱$ مقدار ویژه این عملگر است و تابع ویژه متناظر هم برابر $y=\left(-۲x+۱\right)e^{۲x}$ است.

حالت دوم: $\lambda>-۱$ در این حالت جواب کلی معادله دیفرانسیل $y''-۴y'+\left(۳-\lambda\right)y=۰$ به صورت زیر است.

$$y=ae^{\left(۲+\sqrt{۱+\lambda}\right)x}+be^{\left(۲-\sqrt{۱+\lambda}\right)x}$$

$$\begin{cases} y\left(۰\right)=۱ \\ y'\left(۰\right)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{۱+\lambda}-۲}{۲\sqrt{۱+\lambda}} \\ b=\frac{\sqrt{۱+\lambda}+۲}{۲\sqrt{۱+\lambda}} \end{cases}$$

ملاحظه می کنید که هر $\lambda>-۱$ یک مقدار ویژه برای این عملگر است.

حالت سوم: $\lambda<-۱$. در این حالت ریشه های معادله مشخصه، مختلط و برابر $۲\pm\sqrt{-\left(۱+\lambda\right)}i=۲\pm mi$ هستند. جواب عمومی معادله $y''-۴y'+\left(۳-\lambda\right)y=۰$ بصورت $y=e^{۲x}\left(a\cos mx+b\sin mx\right)$ است.

$$\begin{cases} y(\cdot)=1 \\ y'(\cdot)=\cdot \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{-2}{\sqrt{-(1+\lambda)}} \end{cases}$$

پس هر $\lambda < -1$ یک مقدار ویژه برای این عملگر است . در مجموع می توان گفت طیف این عملگر برابر اعداد حقیقی است!

اما یکی از ساده ترین مثال ها در معادلات دیفرانسیل که دارای نقطه تکین منظم هستند معادله $Ay = x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ یعنی معادله اویلر است. در اینجا α, β دو مقدار ثابت حقیقی هستند. $x = 0$ نقطه تکین منظم این معادله است.

قضیه۴: جواب عمومی معادله $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ در هر بازه ای که شامل صفر نباشد بوسیله r_1, r_2 ریشه های معادله شاخص $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$ مشخص می شوند.

الف) اگر ریشه ها حقیقی و متمایز باشند آن گاه جواب عمومی معادله اویلر به فرم $y = a|x|^{r_1} + b|x|^{r_2}$ است که a,b ثابت هستند.

ب) اگر ریشه ها حقیقی و برابر باشند آن گاه جواب عمومی معادله اویلر به فرم $y = (a + b\ln|x|)|x|^{r_1}$ است که a,b ثابت هستند.

پ) اگر ریشه ها مختلط باشند و $r_1, r_2 = \lambda \pm \mu i$ آن گاه جواب عمومی معادله اویلر به فرم $y = |x|^{\lambda}\left(a\cos(\mu \ln|x|) + b\sin(\mu\ln|x|)\right)$ است که a,b ثابت هستند.

مثال۹: در فضای هیلبرت $L^2(1,2)$ عملگر دیفرانسیلی $Ay = x^2 y'' + 4xy', y(1) = y(2) = 0$ را در نظر می گیریم. مقدارهای ویژه این عملگر را بیابید.

حل: هرگاه λ مقدار ویژه این عملگر باشد $x^2 y'' + 4xy' - \lambda y = 0$. ریشه های معادله شاخص یعنی $r(r-1) + 4r - \lambda = 0$ برابرند با : $r = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+4\lambda}}{2}$حال در مورد λ باید سه حالت در نظر گرفت:

حالت اول: $\lambda = -\dfrac{9}{4}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل به صورت $y = ax^{\frac{-3}{2}} + bx^{\frac{-3}{2}}\ln x$ است با در نظر گرفتن شرایط آغازین نتیجه می شود: $a = b = 0$ که قابل قبول نیست. پس $\lambda = -\dfrac{9}{4}$ مقدار ویژه این عملگر نمی باشد.

حالت دوم: $\lambda > -\dfrac{9}{4}$ در این حالت جواب های معادله شاخص، حقیقی هستند و جواب عمومی معادله دیفرانسیل ما به صورت $y = ax^{\frac{-3+\sqrt{9+4\lambda}}{2}} + bx^{\frac{-3-\sqrt{9+4\lambda}}{2}}$ است. در اینجا هم با اعمال شرایط آغازین، نتیجه می شود: $a = b = 0$ که باز هم قابل قبول نیست، پس در این حالت هم $\lambda > -\dfrac{9}{4}$ نمی تواند مقدار ویژه باشد.

حالت سوم: $\lambda < -\dfrac{9}{4}$ در این حالت جواب های معادله شاخص، مختلط هستند و جوابهای آن صورت $r = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+4\lambda}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-(9+4\lambda)}\,i}{2}$ هستند و لذا جواب عمومی این معادله برابر است با :

$$y = ax^{\frac{-3}{2}}\cos\left(\ln(x)\frac{\sqrt{-(9+4\lambda)}}{2}\right) + bx^{\frac{-3}{2}}\sin\left(\ln(x)\frac{\sqrt{-(9+4\lambda)}}{2}\right) \qquad (20)$$

با کمک شرایط نتیجه می شود:

$$\begin{cases} y(1)=0 \\ y(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\times 2^{\frac{-3}{2}}\sin\left(\ln(2)\frac{\sqrt{-(9+4\lambda)}}{2}\right)=0 \end{cases}$$

پس باید $\frac{\ln(2)\sqrt{-(9+4\lambda)}}{2}$ مضرب طبیعی π باشد.

$$\frac{\ln(2)\sqrt{-(9+4\lambda)}}{2}=k\pi \Rightarrow \sqrt{-(9+4\lambda)}=\frac{2k\pi}{\ln(2)} \Rightarrow \lambda_k=\frac{-\left(\frac{2k\pi}{\ln(2)}\right)^2-9}{4}, k=1,2,3,\ldots$$

و تابع های ویژه متناظر با این مقدارهای ویژه عبارتند از $y_k(x)=x^{\frac{-3}{2}}\sin\left(\ln(x)\frac{k\pi}{\ln(2)}\right), k=1,2,3,\ldots$

تا این جا روی عملگرهای دیفرانسیلی کار شد و مقدارهای ویژه آنها را پیدا کردیم. با این حال بسیاری از عملگرهای دیفرانسیلی وجود دارند که قادر به محاسبه مقدارهای ویژه آنها و یا طیف آنها نیستیم. در عملگرهای دیفرانسیلی بیضوی غیرخودالحاق، نمونه های زیادی از این عملگرها وجود دارند. در زمینه عملگرهای غیرخودالحاق، یک نظریه طیفی در حالت کلی وجود ندارد و همین امر مطالعه این دسته از عملگرها را دشوار می کند. حلال این نوع عملگرها با تغییر بسیار کوچکی در عملگر، دست خوش تغییرات غیرقابل پیش بینی می شود. در این زمینه مقالات بسیاری توسط بایماتف ([۹]) و علی ثامرپور([۷،۸،۱۰]) نوشته شده است. در اینجا به ذکر نمونه ای از این عملگرها پرداخته می شود که در [۱۲] ارائه شده است.

عملگر دیفرانسیلی غیرخودالحاق $Au(t)=-\left(e^{2\alpha t}\mu(t)u'(t)\right)'$ در فضای هیلبرت $H=L^2(0,1)$ را با شرایط مرزی دیریکله، در نظر گرفته که $0\le\alpha<1$ و μ یک تابع مختلط مقدار است و $\mu\in C^2[0,1]$ و برد تابع μ در زاویه زیر قرار دارد.

$$\Phi_{\theta_1\theta_2}=\left\{z\in\mathbf{C}:\frac{\pi}{2}<\theta_1\le|\arg z|\le\theta_2<\pi\right\} \tag{21}$$

قضیه ۴ (قضیه تخمین حلال): هرگاه $\lambda\in\Phi_{\theta_1\theta_2}$ و $|\lambda|$ به قدر کافی بزرگ باشد آن گاه عملگر $(A-\lambda I)^{-1}$ موجود و پیوسته و در نتیجه کراندار است و عدد مثبت $M_{\theta_1\theta_2}$ وجود دارد که:

$$\left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|\le\frac{M_{\theta_1\theta_2}}{|\lambda|} \tag{22}$$

مقادیر ویژه این عملگر در داخل قطاع $\{z\in\mathbf{C}:|z|\le\theta_2\}$ قرار دارند و این مقدارها رفته رفته به محور طول ها نزدیک و نزدیک تر می شوند.

۶- نتیجه گیری

مطالعه عملگرهای دیفرانسیلی، بخصوص در حوزه چندمتغیره ها و عملگرهای بیضوی از دیرباز مورد توجه ریاضیدان ها بوده است. البته مطالعه در این حوزه بسیار وسیع است و بهتر است که محققین، توجه خود را بر روی نوع های بسیار خاصی از این عملگرها معطوف کنند. یکی از این زمینه ها که دارای کاربردهای بسیار زیادی در فیزیک و کوانتوم است، عملگرهای دیفرانسیلی بیضوی غیرخودالحاق و قطاعی است.

۷- فهرست منابع

1. Gilbert Helmberg, introduction to spectral theory in Hilbert space, North- Holland Publishing Company -1969

2. William E.Boyce, Richard C.Diprima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, Inc. 2001

3. Paul Dawkins, Differential Equations 2018, http://tutorial.math.lamar.edu

4. T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, New York, 1966.

5. S. Agmon, lectures on elliptic boundary value problems, American mathematical society, 1965

6. M.S.Agranovich, elliptic boundary problems, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 1997

7. A. Sameripour and K.Seddigh, on the spectral properties of generalized non-selfadjoint elliptic systems of differential operators degenerated on the boundary of domain, bull. Iranian Math. Soc, 24(1998), no.1, 15-32

8. A. Sameripour and K. Seddigh, Distribution of the eigenvalues nonselfadjoint elliptic systems that degenerated on the boundary of domain, (Russian) Mat. Zametki 61(1997), no, 3, 463-467 translation in Math. Notes 61(1997) no, 3-4. 379-384.

9. K. Kh.Boimatov and K.Seddighi, on some spectra properties of ordinary differential operators generated by noncoercive forms, Dokl. Akad. Nauk. Rossyi, 1996, to appear (Russian).

10. A.Sameripour, Y.Yadollahi, Topics on the spectral properties of degenerate non-self-adjoint differential operators, Journal of Inequality and applications (2016) 2016:207, DOI 10.1186/s13660-016-1138-5

11. El Maati Ouhabaz, Analysis of heat equations on domains, Published by Princeton University Press2005

۱۲. رضا علی زاده و علی ثامری پور ، خواص طیفی و توزیع مقادیر ویژه عملگرهای دیفرانسیلی بیضوی غیرخودالحاق ،فصلنامه علمی پژوهش در علوم پایه و مهندسی تیرماه ۱۳۹۸