

## تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای دوار با سطح مقطع متغیر با روش حل کالوکیشن نقطه‌ای

جعفر قنبری<sup>۱</sup>، رضا عادلخانی\*<sup>۲</sup>

- ۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم  
۲- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم

\* adelkhani.r@qut.ac.ir

ارسال: آبان ماه ۹۹ پذیرش: آذر ماه ۹۹

### چکیده

ارتعاشات آزاد عرضی تیر دوار یکسر گیردار با سطح مقطع متغیر با استفاده از روش کالوکیشن نقطه‌ای در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته و دو تابع تغییرات ضخامت خطی و سهموی برای تغییرات سطح مقطع تیر در نظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی، انرژی پتانسیل و جنبشی سازه محاسبه شده و به کمک روش اوپلر-لاگرانژ، معادله حرکت تیر دوار بدست آمده است. حل معادله حرکت و بدست آوردن فرکانسهای طبیعی از روش کالوکیشن نقطه‌ای با استفاده از نقاط گاوس-لژاندر صورت گرفته است. اثر توابع تغییرات سطح مقطع و سرعت‌های دورانی مختلف بر روی فرکانسهای طبیعی سازه بررسی شده و نتایج بدست آمده‌اند. از نرم افزار کامسول برای شبیه سازی سه بعدی تیر دوار استفاده و نتایج حاصل از کار تئوری با شبیه سازی اجزاء محدود و مقاله موجود مقایسه شده‌اند. از آنجاییکه برای انتخاب پارامتر شیب در دو تابع تغییرات سطح مقطع خطی و سهموی، به هم حجم بودن تیرها توجه شده است، نتایج حاصل علاوه بر اثرات هر تابع تغییر بر فرکانس طبیعی، در شرایط یکسان بودن جنس تیرها، در برگزیده مقایسه هم وزن دو سازه و تغییرات فرکانس طبیعی بر آن مبنای نیز می‌باشد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات آزاد، تیر دوار، سطح مقطع متغیر، روش حل کالوکیشن، شبیه سازی اجزاء محدود.

### ۱- مقدمه

تیرهایی با مقطع متغیر کاربرد گسترده‌ای در صنایع مانند توربو ماشین‌ها، توربین‌های بادی، ملخ هواپیما و پروانه کشتی دارند. برای دانستن رفتار دینامیکی این سازه‌ها و پیشگیری از وقایع مخربی مانند رزونانس، تحلیل ارتعاشی آنها از اهمیت بالایی برخوردار است. بررسی ارتعاشات آزاد تیرهایی با مقطع متغیر با روشهای تحلیلی [۱-۴]، تقریبی [۵-۱۰] و عددی [۱۱-۱۵] توسط محققین مختلف انجام شده است. بیلی<sup>۱</sup> [۱۶] از اولین کسانی است که بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای ساکن با مقطع متغیر مطالعه نموده‌اند. او روش تحلیلی برای بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای با مقطع غیر ثابت با شرایط مرزی مختلف ارائه کرده است. جانگ<sup>۲</sup> و برت<sup>۳</sup> [۱۷] ارتعاشات آزاد تیرهای چند تکه‌ای و دارای سطح مقطع و شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار داده‌اند. آبرات<sup>۴</sup> [۱۸] از روش ریلی-ریتر

<sup>1</sup> Bailey

<sup>2</sup> Jang

<sup>3</sup> Bert

<sup>4</sup> Abrate

برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی میله و تیرهای با مقطع متغیر به کمک توابع حدسی چند جمله ای استفاده کرده است. ژو<sup>۱</sup> و چونگ<sup>۲</sup> [۱۹] ارتعاشات تیر با مقطع مستطیلی و تغییرات خطی را به کمک روش ریلی-ریتز بررسی کرده اند. فیروز آبادی و همکاران [۲۰] به کمک روش تقریبی WKB ارتعاشات عرضی تیر با مقطع متغیر را مورد بحث قرار داده اند. جانگ و لی<sup>۳</sup> و جانگ یون لی<sup>۴</sup> [۲۱-۲۲] با استفاده از روش حل فروبنیوس و تبدیل ماتریسی به تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی ساکن و دوار دارای تغییرات ضخامت خطی، پرداخته و بر اساس پارامتر تغییرات ضخامت تیر و سرعت دورانی نتایج فرکانس طبیعی را ارائه کرده اند. بنرجی<sup>۵</sup> و همکاران [۲۳-۲۴] از روش سفتی دینامیکی برای یافتن فرکانسهای طبیعی تیر با تغییرات مقطع خطی بهره گرفته اند. مطالعه های دیگری نیز بر مبنای روش حل فروبنیوس صورت گرفته اند [۲۵-۲۶]. از روش تبدیل دیفرانسیل نیز در بررسی ارتعاشات آزاد تیرهایی با مقطع متغیر خطی استفاده شده است [۲۷-۲۹]. هوآنگ<sup>۶</sup> و همکاران [۳۰-۳۱] بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای نازک دوار با سطح مقطع متغیر پرداخته و اثر سرعت های دورانی و تغییرات شیب سازه بر فرکانس های طبیعی را به کمک حل سری توانی برای شکل مودهای آن، بدست آورده اند. دسموند آدیر<sup>۷</sup> و مارتین جایگر<sup>۸</sup> [۳۲] به تحلیل ارتعاشات عرضی تیرهای اویلر-برنولی غیر یکنواخت در شرایط دورانی سازه به کمک روش آدومین پرداخته و با توجه به سرعت های دورانی، پارامتر تغییر سطح مقطع و شرایط مرزی مختلف پرداخته و روش حل ارائه شده را با نتایج تحقیقات مشابه صورت گرفته، مقایسه نموده است.

بیشتر کارهای تحقیقاتی بر روی ارتعاشات آزاد تیرهایی با تغییرات خطی تمرکز دارند، در این مقاله ارتعاشات آزاد تیرهای دوار و دارای تغییرات مقطع خطی و سهموی به کمک روش کالوکیشن نقطه ای با استفاده از نقاط گاوس-لژاندر مورد بررسی قرار گرفته است. برای تابع تقریب شکل مود از جواب دقیق جابجایی تیر غیر دوار و با مقطع ثابت استفاده شده است. به کمک همین تابع تقریب و روش کالوکیشن نقطه ای و با در نظر گرفتن ۴ رقم اعشار برای دقت نتایج و همگرایی آنها، ۳ فرکانس طبیعی اول بر اساس پارامتر شیب تیر و سرعت دورانی سازه بدست آمده است. برای حالت خطی مقایسه با حل فروبنیوس [۲۲] انجام شده و برای هر دو حالت خطی و سهموی شبیه سازی اجزاء محدود به کمک نرم افزار کامسول صورت پذیرفته و مقایسه بین نتایج انجام گرفته است. از آنجاییکه به هم حجم بودن دو تیر مفروض با تغییرات خطی و سهموی توجه شده است، نتایج حاصل علاوه بر بیان تاثیرات توابع تغییر ضخامت و سرعت دورانی بر فرکانس طبیعی، در شرایط یکسان بودن جنس تیرها، دربرگیرنده مقایسه هم وزن دو سازه و تغییرات فرکانس طبیعی بر آن مبنای نیز می باشد.

## ۲- بیان مسئله و روش حل

تیر با مقطع متغیر در شکل (۱) نمایش داده شده است. سطح مقطع تیر، مستطیلی در نظر گرفته شده که در آن عمق تیر با  $b(x)$  و ضخامت آن با  $h(x)$  مشخص شده اند. برای ارتعاشات آزاد خمشی تیر دوار، انرژی پتانسیل  $U$  و جنبشی  $T$ ، طبق تئوری تیر اویلر-برنولی مطابق زیر در نظر گرفته شده است:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x)(w_{xx}(x,t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L F(x)(w_x(x,t))^2 dx \quad (1)$$

<sup>1</sup> Zhou

<sup>2</sup> Cheung

<sup>3</sup> Jung Woo Lee

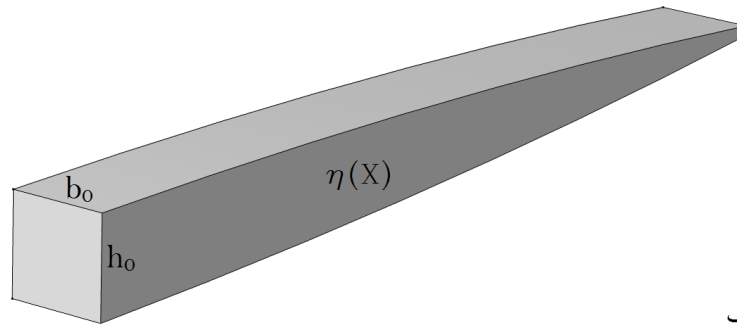
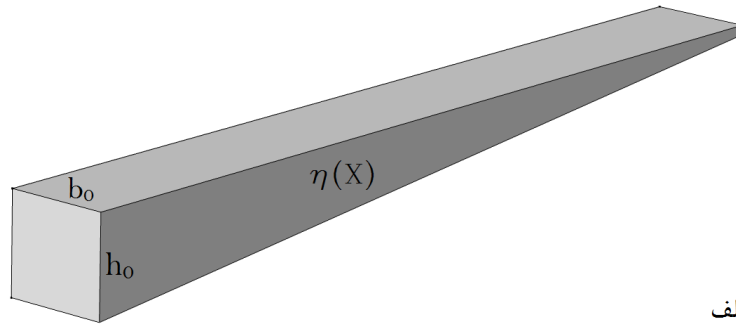
<sup>4</sup> Jung Youn Lee

<sup>5</sup> Banerjee

<sup>6</sup> C.Huang

<sup>7</sup> Desmond Adair

<sup>8</sup> Martin Jaeger



شکل ۱- تیر با سطح مقطع مستطیلی با ضخامت متغیر الف) تیر با تغییرات ضخامت خطی ب) تیر با تغییرات ضخامت سهموی

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (w_t(x, t))^2 dx \quad (2)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته،  $I(x)$  گشتاور دوم سطح،  $m(x)$  جرم،  $L$  طول و  $w(x, t)$  جابه جایی عرضی تیر بر حسب مکان  $x$  و زمان  $t$  هستند. ممان دوم سطح و جرم تیر به صورت زیر تعریف می شوند:

$$I(x) = \frac{b(x)h^3(x)}{12} \quad (3)$$

$$m(x) = \rho A = \rho b(x)h(x) \quad (4)$$

تابع تغییرات ضخامت و عمق تیر به شکل زیر تعریف می شوند:

$$b(x) = b_0 \xi(x) \quad h(x) = h_0 \eta(x) \quad (5)$$

در اثر دوران تیر حول محور عمودی  $\gamma$  با سرعت دورانی  $\Omega$ ، نیروی گریز از مرکز  $F(x)$  در راستای محور افقی به آن وارد می شود که بصورت زیر است:

$$F(x) = \int_x^L m(x) \Omega^2 x dx \quad (6)$$

بر اساس اصل همیلتون معادله زیر حاصل می شود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \quad (7)$$

که در آن لاگرانژین  $L$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$L(x, t, w_x, w_{xx}, w_t) = \frac{1}{2} (\rho A w_t^2 - EI w_{xx}^2 - F(x) w_x^2) \quad (8)$$

با توجه به مرتبه مشتقات، معادله اوایلر-لاگرانژ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial w_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial w_x} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial w_{xx}} \right) = 0 \quad (9)$$

با جاگذاری معادله (۸) در (۹)، معادله حرکت سازه به فرم زیر بدست می آید:

$$(EI(x)w_{xx})_{xx} - (F(x)w_x)_x + \rho A w_{tt} = 0 \quad (10)$$

با در نظر گرفتن ارتعاشات هارمونیک سازه، فرم زیر برای جابه جایی عرضی حاصل می شود:

$$w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}, i = \sqrt{-1} \quad (11)$$

با جاگذاری معادله (۱۱) در (۱۰) معادله زیر حاصل می شود:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI(x) \frac{d^2 W}{dx^2}) - \frac{d}{dx} (F(x) \frac{dW}{dx}) - \omega^2 \rho A W = 0 \quad (12)$$

که در آن  $W(x)$  شکل مود عرضی تیر و  $\omega$  فرکانس طبیعی آن است، با جاگذاری معادلات (۳) تا (۵) در معادله (۱۲) و بی بعد سازی مساله معادله زیر حاصل می شود:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left[ \xi(X) (\eta(X))^3 \left( \frac{d^2 \bar{W}}{dX^2} \right) \right] - \bar{\Omega}^2 \frac{d}{dX} \left[ \left( \int_x^1 \xi(X) \eta(X) X dX \right) \frac{d\bar{W}}{dX} \right] - \bar{\omega}^2 \xi(X) \eta(X) \bar{W} = 0, X = \frac{x}{L} \quad (13)$$

که در آن  $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4 \omega^2}{EI_0}}$  بیانگر فرکانس طبیعی بی بعد،  $\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4 \Omega^2}{EI_0}}$  بیانگر سرعت دورانی بی بعد و  $\bar{W}$  شکل مود بی بعد شده هستند.  $A_0$  و  $I_0$  سطح مقطع و اینرسی ابتدای تیر است. برای حل معادله فوق و یافتن فرکانسهای طبیعی از روش کالوکیشن نقطه ای استفاده شده است. برای این منظور فرم جابجایی به شکل زیر فرض می شود:

$$\bar{W}(X) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(X) \quad (14)$$

که در آن  $C_i$  ضرایب نامعین هستند و  $\varphi_i(X)$  تابع تقریب جابه جایی تیر است. با جاگذاری معادله (۱۴) در معادله (۱۳)، معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left[ \xi(X) (\eta(X))^3 \frac{d^2}{dX^2} \left( \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(X) \right) \right] - \bar{\Omega}^2 \frac{d}{dX} \left[ \left( \int_x^1 \xi(X) \eta(X) X dX \right) \frac{d}{dX} \left( \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(X) \right) \right] - \bar{\omega}^2 \xi(X) \eta(X) \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(X) = R \neq 0 \quad (15)$$

که تابع  $R$  باقیمانده نام می گیرد. در روش باقیمانده وزنی و کالوکیشن نقطه ای، باقیمانده بصورت زیر کمینه می شود:

$$\int_0^1 \delta(X - X_i) R dX = R(X_i) = 0 \quad (16)$$

که  $\delta$  بیانگر تابع دلتای دیراک است و  $X_i \in [0,1], (i = 1,2,3, \dots, n)$  نقاط کالوکیشن را تشکیل میدهند. تعداد این نقاط باید برابر با تعداد ضرایب مجهول  $C_i$  در نظر گرفته شوند. تابع باقیمانده  $R$  باید در تمام نقاط  $X_i$  مطابق معادله (۱۶) برابر صفر باشد بنابراین:

$$\begin{bmatrix} R(X_1, \varphi_1(X_1)) & R(X_1, \varphi_2(X_1)) & \dots & R(X_1, \varphi_n(X_1)) \\ R(X_2, \varphi_1(X_2)) & R(X_2, \varphi_2(X_2)) & \dots & R(X_2, \varphi_n(X_2)) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ R(X_n, \varphi_1(X_n)) & R(X_n, \varphi_2(X_n)) & \dots & R(X_n, \varphi_n(X_n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = KC = 0 \quad (17)$$

مقادیر ویژه ماتریس  $K$ ، فرکانسهای طبیعی سازه هستند. با توجه به شرط مرزی یکسر گیردار معادلات زیر حاصل می شوند:

$$\bar{W}(0) = \frac{d\bar{W}}{dX}(0) = \frac{d^2\bar{W}}{dX^2}(1) = \frac{d^3\bar{W}}{dX^3}(1) = 0 \quad (18)$$

تابع تقریب  $\varphi_i(X)$  باید تمام شرایط مرزی مطابق معادله (۱۸) را ارضاء نماید، برای این منظور از تابع حل دقیق جابجایی تیر غیر دوآر یکسر گیردار با مقطع ثابت استفاده می شود:

$$\varphi_i(X) = \cos(\gamma_i X) - \cosh(\gamma_i X) - \alpha_i (\sin(\gamma_i X) - \sinh(\gamma_i X)) \quad (19)$$

که در آن:

$$\alpha_i = -\frac{\cosh(\gamma_i) + \cos(\gamma_i)}{\sinh(\gamma_i) + \sin(\gamma_i)} \quad (20)$$

در روابطه (۱۹) و (۲۰)، مقدار ویژه  $\gamma_i$  از حل معادله زیر بدست می آید:

$$1 + \cosh(\gamma_i) \cos(\gamma_i) = 0 \quad (21)$$

حال با توجه به رابطه ۱۷، نقاط گوس-لژاندر  $Xg$  به عنوان نقاط کالوکیشن در نظر گرفته می‌شوند. از آنجاییکه این نقاط در بازه ۱- تا ۱ تعریف شده هستند، بنابراین از تبدیل زیر جهت یافتن  $X_i$  در بازه به محدوده ۰ تا ۱ استفاده می‌شود:

$$X_i = \left( \frac{Xg_i + 1}{2} \right) \quad (22)$$

### ۳- نتایج عددی و بحث بر روی آنها

برای نتایج عددی مطابق حل ارایه شده، با فرض ثابت بودن عمق تیر، تابع تغییرات ضخامت به صورت زیر بیان می‌شود:

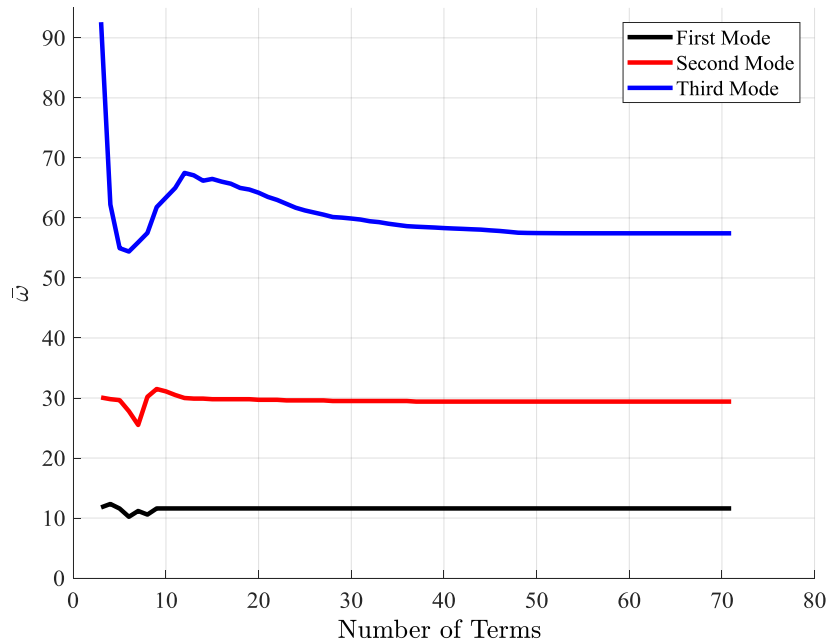
$$\eta(X) = 1 - \beta_s X^s, s = 1, 2 \quad (23)$$

که در آن  $\beta$  بیانگر پارامتر شیب،  $s = 1$  بیانگر حالت خطی و  $s = 2$  حالت تغییرات سهموی هستند. برای حالت خطی و سهموی، ۳ فرکانس طبیعی اول متناسب با تغییرات شیب و سرعت دورانی تیر بدست آمده است. برای اینکه شرایط هم حجمی و با فرض یکسان بودن جنس تیرها، هم وزنی نیز در نتایج بدست آمده مورد قیاس دو تابع تغییرات واقع گردد، پارامترهای شیب معادل دو تابع تغییرات، با فرض یکسان بودن طول و ابعاد سطح مقطع ابتدایی، بدست آمده و بر مبنای آن فرکانس‌های طبیعی سازه بدست آمده است. نتایج فرکانس طبیعی حل حاضر برای تابع خطی با نتایج مرجع [۲۲] مقایسه شده و علاوه بر آن نتایج حاصل از شبیه سازی سه بعدی المان محدود به کمک نرم افزار کامسول نیز برای مقایسه نتایج هر دو حالت خطی و سهموی مورد استفاده قرار گرفته است. در ابتدا بحث همگرایی نتایج با روش حل کنونی و روش فروبنیوس مطابق جدول (۱) برای دو تیر یونیفرم و تیر با تغییرات ضخامت خطی در سرعت دورانی بی بعد ۱۰ ارائه شده است. علت انتخاب این دو نمونه برای مقایسه همگرایی، موجود بودن نتایج آن طبق حل فروبنیوس [۲۲] بودند.

جدول ۱- بررسی تعداد جملات همگرایی برای حل حاضر و روش حل فروبنیوس

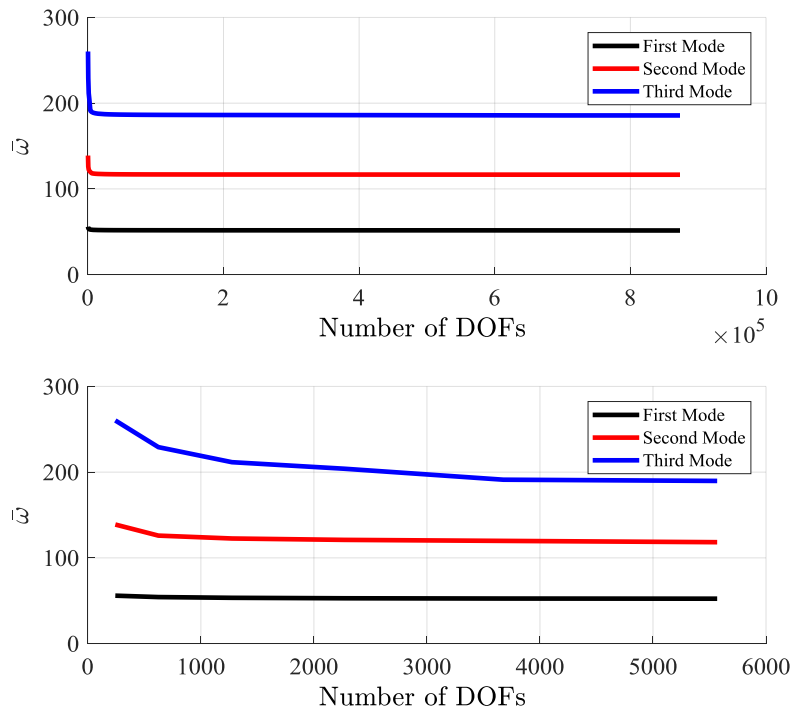
		برای تیر با تغییرات ضخامت خطی $C=0.9$ و سرعت دورانی ۱۰			برای تیر با مقطع ثابت و سرعت دورانی ۱۰		
		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
جواب همگرا شده		۴.۶۳۰۷۲۴	۱۴.۹۳۰۷۹	۳۲.۸۳۳۱۲	۱۲.۱۵۹۲۵	۲۶.۹۶۹۴۹	۴۶.۸۶۳۷۲
تعداد نرم‌های همگرایی	حل حاضر	۲۸	۳۷	۵۵	۳۶	۵۹	۸۶
	فروبنیوس [۲۲]	۲۴۰	۲۵۰	۲۹۰	۳۰۰	۳۱۰	۳۴۰

اما با توجه به مجموعه نتایج ارایه شده در این مقاله، در شکل (۲) روند همگرایی تا چهار رقم اعشار برای تیر با شیب تغییرات ضخامت ۰.۶ و سرعت دورانی بی بعد ۱۰ ارایه شده است.



شکل ۲- همگرایی نتایج سه فرکانس طبیعی اول تیر خطی با شیب تغییرات ضخامت ۰.۶ و سرعت دورانی ۱۰

با توجه به اینکه از شبیه سازی کامسول برای اعتبار سنجی نتایج استفاده شده، نمونه ای از روند همگرایی نتایج آن برای تیر خطی با شیب تغییرات ضخامت ۰.۶ و سرعت دورانی بی بعد ۵۰، برحسب تعداد درجات آزادی سازه، مطابق شکل (۳) ارایه شده است. مطابق شکل (۳)، رسیدن به دقت نتایج تا چهار رقم اعشار بر اساس حل شبیه سازی سه بعدی به کمک کامسول در ۸۷۳۱۸۰ درجه آزادی برای سازه ای با تغییرات ضخامت ۰.۶ و سرعت دورانی بی بعد ۵۰ صورت می گیرد.



شکل ۳- بررسی همگرایی نتایج سه فرکانس اول تیر براساس حل شبیه سازی سه بعدی کامسول

جدول (۲) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی اول برای پارامتر شیب ۰.۱ حالت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۱۵ برای حالت سهموی است. تغییرات سرعت دورانی شامل حالت ساکن و سرعتهای دورانی ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ می باشد. درصد خطای حل کالوکیشن و حل کامسول نیز گزارش شده است.

جدول ۲- فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.1$  و معادل هم وزن حالت سهموی  $\beta_2 = 0.15$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی و $\beta_1 = 0.1$				حالت سهموی و $\beta_2 = 0.15$		
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا
۰	۳.۵۵۸۷	۳.۵۶۵۸	۰.۱۹۹۵	۳.۵۵۸۷	۳.۶۵۴۵	۳.۶۵۶۱	۰.۰۴۳۸
۵	۶.۴۹۱۲	۶.۴۹۹۲	۰.۱۲۳۲	۶.۴۹۱۲	۶.۵۴۱۷	۶.۵۴۹۶	۰.۱۲۰۸
۱۰	۱۱.۲۴۵۵	۱۱.۲۶۵۲	۰.۱۷۵۱	۱۱.۲۴۵۵	۱۱.۲۷۵۴	۱۱.۲۸۸۸	۰.۱۱۸۸
۲۰	۲۱.۱۶۱۱	۲۱.۲۲۳۶	۰.۲۹۵۳	---	۲۱.۱۸۱۷	۲۱.۲۳۴۴	۰.۲۴۸۸
۵۰	۵۱.۱۲۵۸	۵۱.۴۵۰۱	۰.۶۳۴۳	---	۵۱.۱۴۱۸	۵۱.۲۵۰۱	۰.۲۱۱۸

جدول (۳) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی دوم برای پارامتر شیب ۰.۱ برای حالت تغییرات ضخامت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۱۵ برای حالت تغییرات ضخامت سهموی است.

جدول ۳- فرکانس طبیعی دوم بی‌بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.1$  و معادل سهموی هم وزن آن  $\beta_2 = 0.15$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی و $\beta_1 = 0.1$				حالت سهموی و $\beta_2 = 0.15$		
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا
۰	۲۱.۳۳۸۱	۲۱.۳۰۱۳	۰.۱۷۲۵	۲۱.۳۳۸۱	۲۰.۲۸۵۵	۲۰.۲۶۸۱	۰.۰۸۵۸
۵	۲۴.۷۸۰۵	۲۴.۷۳۸۴	۰.۱۶۹۹	۲۴.۷۸۰۵	۲۴.۹۳۹۵	۲۴.۹۹۵۴	۰.۲۲۴۱
۱۰	۳۲.۹۹۶۸	۳۲.۹۸۸۷	۰.۰۲۴۵	۳۲.۹۹۶۸	۳۲.۹۸۰۵	۳۲.۹۸۲۰	۰.۰۰۴۵
۲۰	۵۳.۳۸۳۸	۵۳.۴۱۸۴	۱.۹۳۸۰	---	۵۴.۰۷۲۰	۵۴.۵۱۱۷	۰.۸۱۳۲
۵۰	۱۲۵.۲۰۱۶	۱۲۵.۴۳۳۵	۰.۱۸۵۲	---	۱۲۴.۲۴۱۰	۱۲۴.۲۵۴۰	۰.۰۱۰۵

جدول (۴) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی سوم برای پارامتر شیب ۰.۱ حالت تغییرات ضخامت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۱۵ برای حالت تغییرات ضخامت سهموی است.

جدول ۴- فرکانس طبیعی سوم بی‌بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.1$  و معادل هم وزن حالت سهموی  $\beta_2 = 0.15$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی و $\beta_1 = 0.1$				حالت سهموی و $\beta_2 = 0.15$		
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا
۰	۵۸.۹۸۰۰	۵۸.۵۳۲۰	۰.۷۵۹۶	۵۸.۹۷۹۹	۵۰.۹۴۰۵	۵۰.۶۹۶۴	۰.۴۷۹۲
۵	۶۲.۵۱۱۳	۶۲.۰۷۹۰	۰.۶۹۱۶	۶۲.۵۱۱۳	۶۲.۶۳۷۱	۶۲.۷۹۹۴	۰.۲۵۹۱
۱۰	۷۱.۹۸۳۴	۷۱.۵۰۰۲	۰.۶۷۱۲	۷۱.۹۸۳۳	۷۱.۸۵۶۷	۷۱.۸۸۰۰	۰.۰۳۲۴
۲۰	۱۰۰.۶۸۲۹	۹۹.۰۹۷۸	۱.۵۷۴۳	---	۹۹.۹۹۱۹	۱۰۰.۲۶۹۱	۰.۲۷۷۲
۵۰	۲۰۷.۰۴۸۷	۲۰۶.۱۱۲۵	۰.۴۵۲۱	---	۲۰۵.۰۹۵۳	۲۱۰.۹۹۰۵	۲.۸۷۴۳

جدول (۵) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی اول برای پارامتر شیب ۰.۴ حالت تغییرات ضخامت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۶ برای حالت تغییرات ضخامت سهموی است.

جدول ۵- فرکانس طبیعی اول بی‌بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.4$  و معادل هم وزن حالت سهموی  $\beta_2 = 0.6$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی و $\beta_1 = 0.4$				حالت سهموی و $\beta_2 = 0.6$		
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا
۰	۳.۷۳۷۱	۳.۷۴۳۲	۰.۱۶۳۲	۳.۷۳۷۱	۴.۲۸۲۲	۴.۲۹۰۶	۰.۱۹۶۱
۵	۶.۶۶۲۱	۶.۶۷۰۱	۰.۱۲۰۱	۶.۶۶۲۱	۶.۹۶۶۲	۷.۰۰۵۰	۰.۵۵۷۰
۱۰	۱۱.۴۲۰۰	۱۱.۴۲۷۰	۰.۰۶۱۳	۱۱.۴۲۰۰	۱۱.۶۰۶۸	۱۱.۶۱۰۹	۰.۰۳۵۳
۲۰	۲۱.۳۳۹۹	۲۱.۳۳۸۷	۰.۰۰۵۶	---	۲۱.۴۷۱۳	۲۱.۴۶۵۰	۰.۰۲۹۳
۵۰	۵۱.۳۰۹۷	۵۱.۳۱۲۰	۰.۰۰۴۵	---	۵۱.۴۱۴۴	۵۱.۴۱۸۷	۰.۰۰۸۳

جدول (۶) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی دوم برای پارامتر شیب ۰.۴ حالت تغییرات ضخامت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۶ برای حالت تغییرات ضخامت سهموی است.

جدول ۶- فرکانس طبیعی دوم بی بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.4$  و معادل سهموی هم وزن آن  $\beta_2 = 0.6$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی و $\beta_1 = 0.4$				حالت سهموی و $\beta_2 = 0.6$			
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا	
۰	۱۹.۱۱۳۸	۱۹.۱۰۰۰	۰.۰۷۲۱	۱۹.۱۱۳۸	۲۰.۲۸۵۵	۲۰.۲۶۸۱	۰.۰۸۵۷	
۵	۲۲.۶۶۱۲	۲۲.۶۷۲۰	۰.۰۴۷۶	۲۲.۶۶۱۲	۲۳.۳۹۵۲	۲۳.۳۹۰۰	۰.۰۲۲۲	
۱۰	۳۰.۹۲۹۲	۳۰.۹۲۸۰	۰.۰۰۳۹	۳۰.۹۲۹۲	۳۰.۸۹۴۱	۳۰.۵۵۴۱	۱.۱۰۰۵	
۲۰	۵۱.۹۳۹۰	۵۲.۰۱۵۴	۰.۱۴۷۱	---	۵۰.۶۲۷۸	۵۰.۵۴۹۹	۰.۱۵۳۷	
۵۰	۱۲۰.۵۱۸۷	۱۲۰.۵۰۱۱	۰.۰۱۴۶۰	---	۱۱۶.۳۸۱۸	۱۱۶.۳۵۰۵	۰.۰۲۷۰	

جدول (۷) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی سوم برای پارامتر شیب ۰.۴ حالت تغییرات ضخامت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۶ برای حالت تغییرات ضخامت سهموی است.

جدول ۷- فرکانس طبیعی سوم بی بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.4$  و معادل هم وزن حالت سهموی  $\beta_2 = 0.6$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی $\beta_1 = 0.4$				حالت سهموی $\beta_2 = 0.6$			
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا	
۰	۵۰.۳۵۳۷	۵۰.۱۱۳۱	۰.۴۷۷۸	۵۰.۳۵۳۷	۵۰.۹۴۰۵	۵۰.۶۹۶۴	۰.۴۷۹۱	
۵	۵۳.۹۷۹۰	۵۳.۱۵۷۴	۱.۵۲۲۰	۵۳.۹۷۹۰	۵۴.۱۰۱۹	۵۴.۲۶۸۰	۰.۳۰۷۰	
۱۰	۶۳.۵۵۹۷	۶۴.۰۱۴۹	۰.۷۱۶۲	۶۳.۵۵۹۷	۶۲.۶۰۷۳	۶۲.۳۵۷۷	۰.۳۹۸۷	
۲۰	۹۱.۹۲۶۴	۹۱.۳۸۸۸	۰.۵۸۴۸	---	۸۸.۵۷۳۳	۸۹.۰۰۱۴	۰.۴۸۳۳	
۵۰	۱۹۵.۰۹۲۸	۱۹۴.۹۵۲۱	۰.۰۷۲۱	---	۱۸۶.۰۲۳۷	۱۸۵.۷۵۵۹	۰.۱۴۴۰	

جدول (۸) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی اول برای پارامتر شیب ۰.۶ حالت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۹ برای حالت سهموی است.

جدول ۸- فرکانس طبیعی اول بی بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.6$  و معادل هم وزن حالت سهموی  $\beta_2 = 0.9$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی و $\beta_1 = 0.6$				حالت سهموی و $\beta_2 = 0.9$			
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا	
۰	۳.۹۳۴۲	۳.۹۳۹۹	۰.۱۴۴۹	۳.۹۳۴۳	۵.۱۰۶۵	۵.۱۱۶۲	۰.۱۹۰۰	
۵	۶.۸۴۵۴	۶.۸۵۱۵	۰.۰۸۹۱	۶.۸۴۵۴	۷.۵۴۵۳	۷.۵۵۲۱	۰.۰۹۰۱	
۱۰	۱۱.۶۰۲۳	۱۱.۶۱۸۷	۰.۱۴۱۳	۱۱.۶۰۲۳	۱۲.۰۴۲۵	۱۲.۱۰۳۳	۰.۵۰۴۹	
۲۰	۲۱.۵۲۴۴	۲۱.۵۳۵۷	۰.۰۵۲۵	---	۲۱.۸۳۵۸	۲۱.۸۳۹۹	۰.۰۱۸۸	
۵۰	۵۱.۴۹۹۱	۵۱.۵۱۱۱	۰.۰۲۳۳	---	۵۱.۷۴۹۴	۵۱.۷۳۲۴	۰.۰۳۲۸	

جدول (۹) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی دوم برای پارامتر شیب ۰.۶ حالت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۹ برای حالت سهموی است.

جدول ۹- فرکانس طبیعی دوم بی بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.6$  و معادل سهموی هم وزن آن  $\beta_2 = 0.9$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\bar{\Omega}$	حالت خطی و $\beta_1 = 0.6$				حالت سهموی و $\beta_2 = 0.9$			
	حل کالوکیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالوکیشن	حل کامسول	درصد خطا	
۰	۱۷.۴۸۷۹	۱۷.۴۸۵۰	۰.۰۱۶۶	۱۷.۴۸۷۹	۲۰.۱۱۱۷	۲۰.۱۲۲۷	۰.۰۵۴۷	
۵	۲۱.۱۲۰۷	۲۱.۱۱۷۹	۰.۰۱۳۳	۲۱.۱۲۰۷	۲۲.۹۸۸۴	۲۳.۰۰۵۹	۰.۰۷۶۱	
۱۰	۲۹.۴۰۱۳	۲۹.۳۸۹۹	۰.۰۳۸۸	۲۹.۴۰۱۳	۲۹.۹۸۹۵	۳۰.۱۱۱۵	۰.۴۰۶۸	
۲۰	۴۹.۹۹۲۸	۵۰.۰۰۸۱	۰.۰۳۰۶	---	۴۸.۵۹۲۰	۴۸.۶۲۱۰	۰.۰۵۹۷	
۵۰	۱۱۶.۳۸۷۲	۱۱۶.۵۵۷۴	۰.۱۴۶۲	---	۱۱۰.۹۵۲۵	۱۱۱.۶۴۷۷	۰.۶۲۶۶	

جدول (۱۰) دربرگیرنده نتایج فرکانس طبیعی سوم برای پارامتر شیب ۰.۶ حالت خطی و معادل هم حجم آن، پارامتر شیب ۰.۹ برای حالت سهموی است.

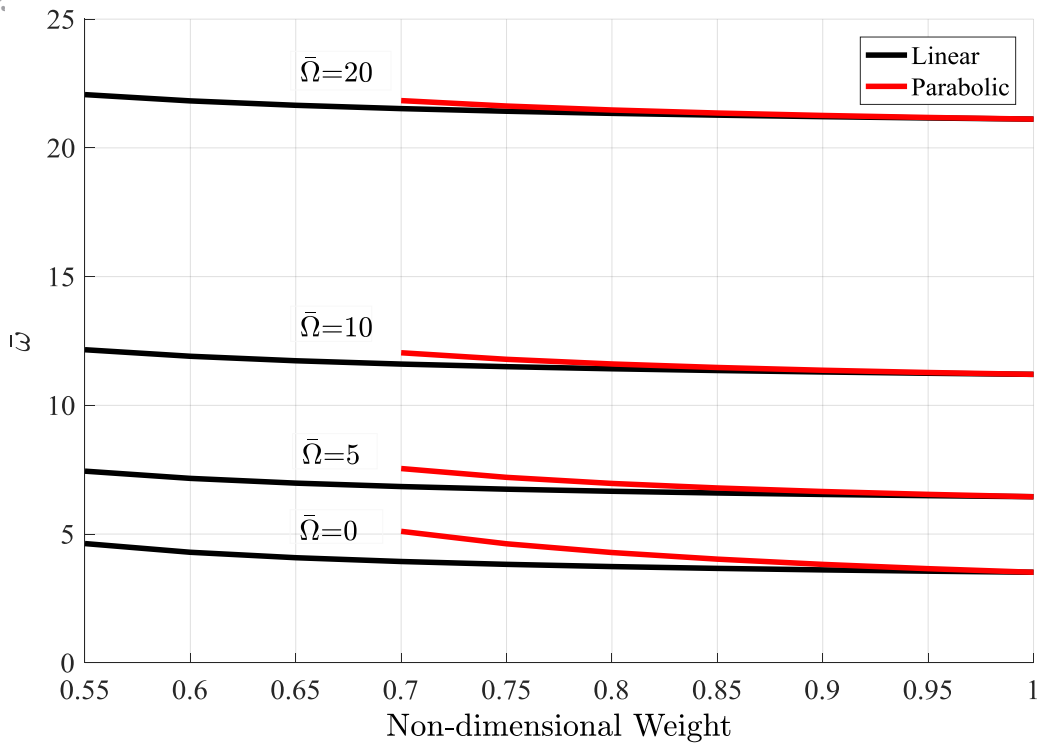


جدول ۱۰- فرکانس طبیعی سوم بی بعد برای حالت خطی  $\beta_1 = 0.6$  و معادل هم وزن حالت سهموی  $\beta_2 = 0.9$  به ازای سرعت دورانی مختلف

$\Omega$	حالت خطی $\beta_1 = 0.6$				حالت سهموی $\beta_2 = 0.9$			
	حل کالو کیشن	کامسول	درصد خطا	مرجع [۲۲]	حل کالو کیشن	حل کامسول	درصد خطا	
۰	۴۴.۰۲۴۸	۴۳.۸۹۱۰	۰.۳۰۳۹	۴۴.۰۲۴۸	۴۴.۸۹۴۲	۴۴.۷۶۶۰	۰.۲۸۵۵	
۵	۴۷.۷۴۷۸	۴۷.۶۹۶۲	۰.۱۰۸۰	۴۷.۷۴۷۸	۴۷.۸۸۴۹	۴۷.۶۵۴۴	۰.۴۸۱۴	
۱۰	۵۷.۴۳۷۹	۵۷.۳۹۴۴	۰.۰۷۵۷	۵۷.۴۳۷۹	۵۵.۸۳۲۰	۵۵.۰۰۵۶	۱.۴۸۰۱	
۲۰	۸۵.۴۸۱۰	۸۵.۴۷۸۳	۰.۰۰۳۲	---	۸۰.۰۳۱۷	۷۹.۳۵۷۹	۰.۸۴۱۹	
۵۰	۱۸۵.۵۱۹۳	۱۸۵.۶۶۹۰	۰.۰۸۰۷	---	۱۷۰.۳۸۱۴	۱۶۸.۱۳۰۱	۱.۳۲۱۳	

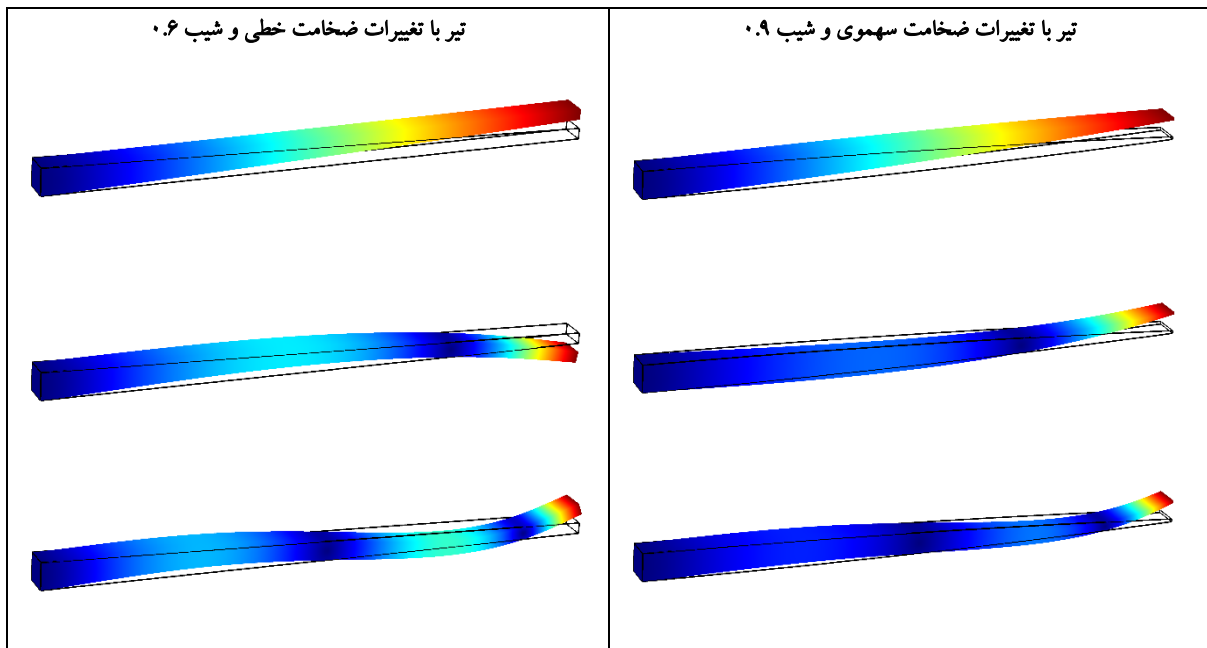
در شکل (۴) روند تغییرات فرکانس طبیعی به ازای سرعت های دورانی مختلف برای تیر با تغییرات سطح مقطع خطی رسم شده است. اثر سرعت دورانی سازه بر سه فرکانس طبیعی اول بطور مشخصی در سرعت های دورانی بی بعد در محدوده ۵ و پایین تر، نسبت به سرعت های بالاتر از ۵، کمتر می باشد. روند تاثیر پذیری فرکانس های طبیعی سازه از سرعت دورانی، صعودی است و با افزایش سرعت دورانی، هر سه فرکانس طبیعی سازه بیشتر می شوند.

در حالت هم حجم تیرهای خطی و سهموی ارابه شده، فرکانس طبیعی اول تیر سهموی همواره بیشتر از حالت خطی است اما این تفاوت در فرکانسهای طبیعی دوم و سوم به سرعت دورانی وابسته می شود، برای حالت تیر ساکن و تیر دوار با سرعت دورانی برابر ۵، فرکانس حالت تغییرات مقطع سهموی بیشتر و برای سرعت دورانی ۱۰ و بعد از آن فرکانس حالت تغییرات مقطع خطی بیشتر است. درصد تغییرات فرکانس اول تا سوم بر مبنای تغییرات سرعت دورانی، در تیر با تغییرات مقطع خطی بیشتر از تیر با تغییرات مقطع سهموی است. تغییرات فرکانس طبیعی اول به ازای سرعت های دورانی مختلف و نسبت وزنی تیر در حالت تغییرات مقطع خطی و سهموی به تیر با مقطع ثابت، در شکل (۵) نمایش داده شده است. فرکانس های اول تیر با تابع تغییرات ضخامت سهموی بیشتر از تیر با تابع تغییرات ضخامت خطی هستند اما با افزایش سرعت دورانی از اختلاف نتایج فرکانسی تیر با تابع تغییرات سهموی و خطی کاسته می شود، دلیل این امر افزایش سهم انرژی پتانسیل ناشی از دوران سازه در مقابل سهم انرژی پتانسیل خمشی است که سبب کاهش اثر تفاوت در توابع تغییرات ضخامت تیر می شود. با در نظر گرفتن هم حجم بودن سازه ها، تیر با تغییرات ضخامت سهموی گستره وزنی کمتری را نسبت به تیر با تغییرات مقطع خطی پوشش می دهد و دلیل این امر محدوده پارامتر  $\beta$  است که از صفر تا ۱ را شامل می شود.



شکل ۵- فرکانس طبیعی اول تیر با تغییرات سطح مقطع خطی و سهموی به ازای وزن بی بعد و سرعت های دورانی مختلف

شکل مودهای تیر با تغییرات ضخامت خطی و سهموی به ازای شیب ۰.۶ برای خطی و معادل هم حجم آن در تغییرات سهموی (شیب ۰.۹) در شکل (۶) به کمک شبیه سازی کامسول ارایه شده است.



شکل ۶- فرکانس طبیعی اول تیر با تغییرات سطح مقطع خطی و سهموی به ازای وزن بی بعد و سرعت های دورانی مختلف

#### ۴- نتیجه گیری

ارتعاشات آزاد تیر دوار با سطح مقطع متغیر به روش کالوکیشن نقطه‌ای با استفاده از نقاط گاوس-لژاندر و در نظر گرفتن تابع جابه‌جایی تیر ساکن با سطح مقطع ثابت به عنوان تابع تقریب، در این مقاله ارائه و دو تابع تغییرات ضخامت خطی و سهموی جهت بررسی اثرات تغییرات سطح مقطع بر فرکانس طبیعی سازه در نظر گرفته شدند. با در نظر گرفتن شرایط هم حجم تیرها، سه فرکانس

طبیعی اول به ازای توابع خطی و سهموی برای تغییرات ضخامت و پارامترهای شیب معادل آنها در شرایط دورانی سازه بدست آمده است. نتایج حالت تغییرات ضخامت خطی با نتایج حاصل از مقاله ای که با روش حل فروبنیوس، ارتعاشات آزاد تیر دوآر را مورد بررسی قرار داده بود، مقایسه شدند. به کمک نرم افزار کامسول جهت شبیه سازی سه بعدی ارتعاشات تیر دوآر اقدام شد و نتایج تئوری بدست آمده از روش حاضر برای هر دو حالت تغییرات خطی و سهموی با آن مقایسه شدند. با در نظر گرفتن سرعت های دورانی مختلف، مقایسه هم وزن دو تیر با تغییرات ضخامت خطی و سهموی انجام و مطابق شکل (۴) اثر پارامتر شیب و سرعت دورانی بر تغییرات فرکانس طبیعی پایه، ارائه شدند و نتایج مورد بحث قرار گرفتند. نتایج حاصل شده، نشان می دهد روش کالوکیشن نقطه ای با استفاده از نقاط گوس-لژاندر دقت خوبی در مقایسه با سایر نتایج موجود و همچنین شبیه سازی های اجزاء محدود دارد. همچنین در روش ارائه شده در این مقاله با توجه به استفاده از توابع شکل مربوط به حل دقیق تیر با سطح مقطع ثابت و شرط مرزی یکسر گیردار، نرخ همگرایی مناسبی در مقایسه با سایر روش ها از جمله روش حل فروبنیوس حاصل شده است.

## ۵- مراجع

1. Bayat M, Pakar I, Bayat M. Analytical study on the vibration frequencies of tapered beams. *Lat Am J Solids Struct* 2011;8:149-62.
2. Salmani H, Rahimi GH, Hosseini Kordkheili SA. An Exact Analytical Solution to Exponentially Tapered Piezoelectric Energy Harvester. *Shock Vib* 2015;2015.
3. Khoshgoftar MJ, Rahimi GH, Arefi M. Exact solution of functionally graded thick cylinder with finite length under longitudinally non-uniform pressure. *Mech Res Commun* 2013;51:61-6.
4. Çelik İ. Free vibration of non-uniform Euler-Bernoulli beam under various supporting conditions using Chebyshev wavelet collocation method. *Appl Math Model* 2018;54:268-80.
5. Yildirim S, Tutuncu N. On the inertio-elastic instability of variable-thickness functionally-graded disks. *Mech Res Commun* 2018;91:1-6.
6. Tang AY, Li XF, Wu JX, Lee KY. Flapwise bending vibration of rotating tapered Rayleigh cantilever beams. *J Constr Steel Res* 2015;112:1-9.
7. Cheung YK, Zhou D. The free vibrations of tapered rectangular plates using a new set of beam functions with the Rayleigh-Ritz method. *J Sound Vib* 1999;223:703-22.
8. Pradhan KK, Chakraverty S. Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method. *Compos Part B Eng* 2013;51:175-84.
9. Bhat RB. Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method. *J Sound Vib* 1986;105:199-210.
10. Omprakash V, Ramamurti V. Natural frequencies of bladed disks by a combined cyclic symmetry and Rayleigh-Ritz method. *J Sound Vib* 1988;125:357-66.
11. Cheng Y, Yu Z, Wu X, Yuan Y. Vibration analysis of a cracked rotating tapered beam using the p-version finite element method. *Finite Elem Anal Des* 2011;47:825-34.
12. Li GQ, Li JJ. A tapered Timoshenko-Euler beam element for analysis of steel portal frames. *J Constr Steel Res* 2002;58:1531-44.
13. Shin D, Choi S, Jang GW, Kim YY. Finite element beam analysis of tapered thin-walled box beams. *Thin-Walled Struct* 2016;102:205-14.
14. Mohri F, Meftah SA, Damil N. A large torsion beam finite element model for tapered thin-walled open cross sections beams. *Eng Struct* 2015;99:132-48.
15. Khalili SMR, Jafari AA, Eftekhari SA. A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. *Compos Struct* 2010;92:2497-511.
16. Bailey CD. Direct analytical solutions to non-uniform beam problems. *J Sound Vib* 1978;56:501-7.
17. Jang SK, Bert CW. Free vibration of stepped beams: Higher mode frequencies and effects of steps on frequency. *J Sound Vib* 1989;132:164-8.
18. Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams. *J Sound Vib* 1995;185:703-16.
19. Zhou D, Cheung YK. Free vibration of a type of tapered beams. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2000;188:203-16.
20. Firouz-Abadi RD, Haddadpour H, Novinzadeh AB. An asymptotic solution to transverse free vibrations of variable-section beams. *J Sound Vib* 2007;304:530-40.

21. Lee JW, Lee JY. Free vibration analysis using the transfer-matrix method on a tapered beam. *Comput Struct* 2016;164:75–82.
22. Lee JW, Lee JY. An exact transfer matrix expression for bending vibration analysis of a rotating tapered beam. *Appl Math Model* 2018;53:167–88.
23. Banerjee JR. Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *J Sound Vib* 2000;233:857–75.
24. Banerjee JR. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beams. *J Sound Vib* 2001;247:97–115.
25. Banerjee JR, Su H, Jackson DR. Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method. *J Sound Vib* 2006;298:1034–54.
26. Banerjee JR, Jackson DR. Free vibration of a rotating tapered rayleigh beam: A dynamic stiffness method of solution. *Comput Struct* 2013;124:11–20.
27. Ozdemir Ozgumus O, Kaya MO. Flapwise bending vibration analysis of a rotating double-tapered Timoshenko beam. *Arch Appl Mech* 2008;78:379–92.
28. Rajasekaran S. Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods. *Appl Math Model* 2013;37:4440–63.
29. Ghafarian M, Ariaei A. Free vibration analysis of a system of elastically interconnected rotating tapered Timoshenko beams using differential transform method. *Int J Mech Sci* 2016;107:93–109.
30. Huang CL, Lin WY, Hsiao KM. Free flapping vibration of rotating inclined Euler beams. vol. 56. 2009.
31. Huang CL, Lin WY, Hsiao KM. Free vibration analysis of rotating Euler beams at high angular velocity. *Comput Struct* 2010;88:991–1001
32. Adair D, Jaeger M. Simulation of tapered rotating beams with centrifugal stiffening using the Adomian decomposition method. *Appl Math Model* 2016;40:3230–41.

## فهرست نمادهای انگلیسی

A	مساحت سطح مقطع ( $m^2$ )
b	عمق تیر (m)
C	ضرایب نامعین تابع حدسی
E	مدول الاستیسیته (Pa)
F	نیروی گریز از مرکز (N)
h	ضخامت تیر (m)
I	ممان دوم سطح ( $m^4$ )
L	طول تیر (m)
m	جرم سازه (Kg)
n	تعداد جملات تابع حدسی
R	تابع باقیمانده
T	انرژی جنبشی (J)
U	انرژی پتانسیل (J)
W	شکل مود تیر (m)
$\bar{W}$	شکل مود بی بعد شده

## فهرست نمادهای یونانی

$\alpha$	ضریب نسبت در تابع حدسی
$\beta$	پارامتر شیب
$\gamma$	مقدار ویژه فرکانسی
$\delta$	تابع دلتای دیراک
$\eta$	تابع تغییرات ضخامت تیر
$\xi$	تابع تغییرات عمق تیر
$\rho$	چگالی ( $Kgm^{-3}$ )
$\varphi$	تابع حدسی شکل مود در حالت بی بعد شده
$\Omega$	سرعت دورانی تیر ( $rads^{-1}$ )
$\bar{\Omega}$	سرعت دورانی بی بعد شده
$\omega$	فرکانس طبیعی سازه ( $rads^{-1}$ )
$\bar{\omega}$	فرکانس طبیعی بی بعد شده

**Abstract**

Free transverse vibration of rotating tapered beams with linear and parabolic variations of the cross-section is investigated in this paper. The equation of motion is derived using the Euler-Bernoulli beam theory and the governing differential equation is solved using the weighted residual collocation method. The Gauss-Legendre points are employed to derive the algebraic system of equations in the collocation method. For the trial functions, the exact solution shape functions for the uniform beam are used in the presented method. The effects of various parameters, including taper parameter, profile function, and rotating speed on the natural frequencies are investigated. For the cases considered in this paper, the results of available published data for similar problems along with those obtained from the 3D finite element simulations using COMSOL were used for validation of the proposed method.