



## حل مسائل مهندسی با معادلات هارمونیک با استفاده از توابع پایه متعادل شده در مختصات قطبی به روش ضعیف وزنی

امید باطنی پرور<sup>۱\*</sup>، نیما نورمحمدی<sup>۲</sup> و بیژن برومند<sup>۳</sup>

<sup>۱\*</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران  
(o.batani@cv.iut.ac.ir)

<sup>۲</sup> استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.

<sup>۳</sup> استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.

(تاریخ دریافت مقاله: ۹۸/۱۰/۱۴، تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۲۰)

### چکیده

در حل بسیاری از مسائل مهندسی از جمله مسائل مربوط به مدلسازی جریان آب در مهندسی عمران، استفاده از روشهای بدون شبکه به دلیل ارائه میدان پتانسیل و سرعت پیوسته و دقیق رواج دارد. روش های استفاده از توابع پایه از جمله تکنیک های بدون شبکه هستند که مبنای آنها، استفاده از توابع پایه ای است که ارضای دقیق آنها در صورت همگن معادله ضرورت دارد. این موضوع یک محدودیت عمده به حساب می آید. روش توابع پایه متعادل شده قادر است با ارضای تقریبی صورت همگن معادله به فرم انتگرال وزنی در عین حفظ پیوستگی تابع حل و مشتقات آن در سرتاسر دامنه، به رفع این نقیصه کمک کند. در مطالعه ی حاضر فرم ضعیف انتگرال وزنی، که در آن درجات مشتق پایین تری نسبت به فرم قوی وزنی ایجاد می شود، به کار گرفته خواهد شد. در این مقاله روابط لازم بر مبنای دستگاه قطبی نوشته میشود و برای نشان دادن توانایی و کارایی روش در تحلیل مسائل مهندسی، به بررسی مسئله جریان پتانسیل در اطراف یک مانع استوانه ای پرداخته خواهد شد.

### کلمات کلیدی

توابع پایه متعادل شده، مسائل هارمونیک، فرم ضعیف وزنی، مختصات قطبی.



# Solution of harmonic engineering problems using equilibrated basis functions in a weak weighted residual approach in polar coordinates

Omid Bateni Parvar<sup>1\*</sup>, Nima Nourmohammadi<sup>2</sup>, Bijan Broumand<sup>3</sup>

<sup>1\*</sup> M.Sc. student, Department of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran (o.bateni@cv.iut.ac.ir).

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

<sup>3</sup> Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

(Date of received: 04/01/2020, Date of accepted: 09/02/2020)

## ABSTRACT

*In solution of many engineering problems, including problems related to flow modeling in civil engineering, the use of mesh-less methods is common due to the provision of the potential field along with continuous and accurate velocity. Methods using basis functions are among the mesh-less techniques that use a set of basic functions that necessarily satisfy the homogeneous form of the equation, which is a major limitation. The equilibrated basis functions are capable of dissolving that defect by approximately satisfying the homogeneous equation in the form of a weighted residual integration, while still providing the continuity of the solution function and its derivatives throughout the domain. In the present study the weak weighted residual form, in which lower derivation orders appear than the strong form, will be implemented. The relations are expanded in a polar coordinate system. To demonstrate the efficiency of the method in engineering problems, the potential flow around a cylindrical barrier will be examined.*

## Keywords:

*Equilibrated basis functions, Harmonic problems, Weak weight form, Polar coordinate.*



## ۱- مقدمه

امروزه استفاده از روش‌های عددی برای حل مسائل مهندسی راه‌کار اصلی و اساسی به‌شمار می‌رود؛ زیرا این مسائل دارای تنوع و پیچیدگی‌های زیادی بوده و عموماً با روش‌های تحلیلی قابل حل نیستند. از جمله عوامل مهم در انتخاب یک روش حل مناسب، دقت و سرعت آن برای رسیدن به پاسخ است. روش‌های بدون شبکه دسته‌ای از روش‌های عددی به‌شمار می‌آیند که بدون نیاز به ایجاد شبکه‌ی المان در دامنه‌ی حل مورد نظر و تنها با جایگزینی شبکه‌ی مذکور با مجموعه‌ای از نقاط دارای ساختار بسیار ساده‌تر و هزینه‌ی محاسبات کمتر، به تسهیل حل معادلات دیفرانسیل کمک می‌کنند. در این میان روش‌های مبتنی بر استفاده از توابع پایه با ارضای خودکار معادله دیفرانسیل و محدود کردن نقاط مذکور به مرزهای دامنه، تاثیر قابل توجهی در افزایش سرعت فرآیند حل مسئله دارند. یکی از نخستین روش‌هایی که در این زمینه مطرح شد، روش ترفتر نام دارد [۱]. منطق حاکم بر این روش در انتخاب پایه‌های حل تقریبی مسئله به شکلی است که هر کدام از آن‌ها صورت همگن معادله را ارضا کنند. پس از این روش، ایده‌ی حل‌های اساسی توسط الکسیدزه و کوپرادزه مطرح شد [۲]. در ادامه با الهام از دو روش ذکر شده، برپا روش المان‌های مرزی را توسعه داد [۳،۴]. پس از آن ایده‌ی توابع پایه شعاعی توسط برومهد و لوو [۵،۶] مطرح گردید. در تحقیقات اخیر، برومند، سقراطی و مسیبی چگونگی استفاده از توابع پایه‌ی نمای را در حل معادلات گوناگون مکانیک جامدات بررسی کردند و روش توابع پایه‌ی نمای را بنا نهادند [۷،۸]. در راستای رفع مشکل اساسی روش‌های معمول استفاده از توابع پایه که لزوم صادق بودن پایه‌های آن‌ها در صورت همگن معادله دیفرانسیل است، برومند و نورمحمدی مجموعه‌ی جدیدی از پایه‌ها را معرفی کردند [۹] که قادر به ارضای فرم انتگرال وزنی صورت همگن معادله دیفرانسیل می‌باشند. این روش تحت عنوان روش توابع پایه متعادل شده مطرح گردید و در سال ۲۰۱۴ میلادی تحلیل مسائل هارمونیک و بای‌هارمونیک توسط آن‌ها در مختصات کاتزین با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبی شف به عنوان پایه‌های حل صورت گرفت [۱۰]. در تحقیق حاضر روش توابع پایه متعادل شده در دستگاه مختصات قطبی برای حل مسائل مهندسی دارای معادلات هارمونیک به روش ضعیف وزنی بسط داده شده است. مهمترین مزیت فرمول‌بندی حاضر، رفع عملگر مشتق از ضرایب معادله دیفرانسیل و کاهش مرتبه مشتق‌گیری در صورت انتگرال وزنی است که به افزایش دقت حل می‌انجامد. همچنین استفاده از سری فوریه برای تخمین پاسخ در راستای زاویه‌ای، منجر به ساده شدن روابط نهایی و امکان ذخیره‌سازی انتگرال‌های لازم خواهد شد که افزایش قابل توجه سرعت حل مسئله را به دنبال دارد.

## ۲- توابع پایه معادل شده

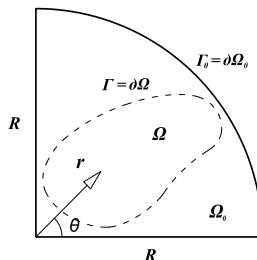
توابعی که به عنوان پایه‌های اولیه در سری حل تقریبی دستگاه معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شوند، لزوماً در صورت همگن معادله صدق نمی‌کنند و از آن‌جا که یکی از ارکان اساسی حل معادلات دیفرانسیل ارضای معادله می‌باشد، ارضای تقریبی آن به صورت انتگرال وزنی مورد نظر است. صورت همگن معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی مرتبط با آن به این صورت است،

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{f}_b \quad \text{on } \Gamma = \partial \Omega. \quad (1)$$

$\mathbf{S}$  عملگر معادله دیفرانسیل،  $\mathbf{D}$  ماتریس ضرایب وابسته به نوع مسئله،  $\mathbf{b}$  بردار نیروهای بدنه،  $\mathbf{B}$  عملگر شرایط مرزی مسئله و  $\mathbf{f}_b$  مقادیر مرزی معلوم هستند. در این تحقیق حالت همگن معادله ( $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ) در نظر گرفته می‌شود.  $\Omega$  دامنه اصلی حل مسئله می‌باشد که



دارای مرز  $\Gamma$  است.  $\Omega_0$  دامنه‌ی تصویری نامیده می‌شود و دارای مرز  $\Gamma_0$  می‌باشد. این دامنه ( $\Omega_0$ ) در فضای قطبی به صورتی قطاعی از دایره به شعاع  $R$  می‌باشد (شکل ۱).



شکل ۱: دامنه حل  $\Omega$  و دامنه تصویری  $\Omega_0$  برای توابع پایه متعادل شده.

پاسخ تقریبی مسئله به صورت ترکیب خطی از توابع پایه اولیه  $f_j$  تشکیل می‌شود،

$$u \approx \hat{u} = \sum_{j=1}^N f_j c_j = \mathbf{f}^T \mathbf{c} . \quad (2)$$

در سری فوق  $c_j$  ضریب مجهول مرتبط با توابع پایه اولیه است. این توابع پایه قادر به ارضای دقیق صورت همگن معادله نمی‌باشند، بنابراین با قرار دادن آن در صورت انتگرال ضعیف وزنی معادله به منظور ارضای تقریبی آن و پس از اعمال قضیه‌ی گرین، نتیجه به این صورت خواهد بود،

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{w} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{f}^T \mathbf{c} \, d\Omega = \left( - \int_{\Omega_0} [(\mathbf{S} \mathbf{w})^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{f}^T] \, d\Omega + \int_{\Gamma_0} \mathbf{w} \mathbf{n}_0 \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{f}^T \, d\Gamma \right) \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{0} . \quad (3)$$

$\mathbf{w}$  شامل توابع وزن  $w_i$  به صورت زیر است،

$$\mathbf{w} = [w_1 \quad \dots \quad w_M]^T . \quad (4)$$

$\mathbf{n}_0$  بردار یکه عمود بر مرز  $\Gamma_0 = \partial \Omega_0$  می‌باشد. اگر تساوی (۳) به ازای تمام حالات ممکن  $w_i$  برقرار باشد می‌توان نتیجه گرفت که صورت همگن معادله دیفرانسیل به طور تقریبی ارضا شده است. برقراری رابطه‌ی (۳) در صورتی امکان‌پذیر است که بردار  $\mathbf{c}$  عضو فضای پوچ ماتریس  $\mathbf{A}$  باشد. این فضا در تحقیق حاضر  $\Phi$  نامیده می‌شود؛ بنابراین می‌توان پاسخ نهایی مسئله را به صورت ترکیب خطی از ستون‌های فضای پوچ مذکور ( $\Phi_r$ ) توسط ضرایب مجهول جدید ( $d_r$ ) در نظر گرفت،

$$\mathbf{c} = \sum_{r=1}^{\bar{M}} \Phi_r d_r = \Phi \mathbf{d} . \quad (5)$$

$\bar{M}$  مرتبه‌ی ماتریس  $\Phi$  است. با بازنویسی رابطه (۲) پاسخ تقریبی معادله دیفرانسیل به این شکل خواهد بود،

$$\hat{u} = \sum_{r=1}^{\bar{M}} \mathbf{f}^T \Phi_r d_r = \sum_{r=1}^{\bar{M}} \mathbf{F}_r d_r = \mathbf{F}^T \mathbf{d} . \quad (6)$$



$F_i$  توابع پایه جدیدی هستند که توانایی ارضای تقریبی صورت همگن معادله دیفرانسیل را در محدوده  $\Omega_0$  دارند و به عنوان توابع پایه متعادل شده شناخته می شوند. ضرایب مجهول جدید نیز با اعمال شرایط مرزی به دست می آیند. برای توسعه ی روابط در فضای قطبی، ابتدا به تعریف توابع پایه اولیه و وزن های انتخابی پرداخته می شود. توابع پایه اولیه ترکیبی از چند جمله ای های چبی شف نوع اول در راستای شعاعی و توابع مثلثاتی در راستای زاویه ای هستند،

$$\hat{u} = \sum_{n=0}^0 f_n^c(r) \cos n\theta + \sum_{n=0}^0 f_n^s(r) \sin n\theta = \mathbf{F}^T \mathbf{c}. \quad (7)$$

اندیس های  $S$  و  $C$  به ترتیب نشان دهنده ی توابع سینوس و کسینوس هستند.  $f_n^c(r)$  و  $f_n^s(r)$  به صورت زیر تعریف می شوند و تنها در ضرایب مجهول با یکدیگر تفاوت دارند،

$$f_n^{c,s}(r) = \sum_{j=0}^0 T_j(\xi) c_{n,j}^{c,s}. \quad (8)$$

$O_r$  و  $O_\theta$  به ترتیب مرتبه توابع پایه اولیه در راستای شعاعی و زاویه ای هستند. متغیر هم پایه ساز  $\xi$  به صورت زیر تعریف می شود،

$$\xi = \frac{2r}{R} - 1. \quad (9)$$

$r$  در بازه ی بسته ی  $[0, R]$  تغییر می کند و تغییرات  $\theta$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  در نظر گرفته می شود. بنابراین ناحیه تصویری یک دایره کامل خواهد بود. توابع وزنی مورد استفاده نیز ترکیبی از توابع نمایی و مثلثاتی به صورت زیر می باشند،

$$\mathbf{w} = \left[ \dots \quad (\mathbf{w}_m^s)^T \quad (\mathbf{w}_m^c)^T \quad \dots \right]^T, \quad m = 0, 1, \dots, O_r, \\ \mathbf{w}_m^s = [w_1 \quad \dots \quad w_{n_s}]^T \sin m\theta, \quad \mathbf{w}_m^c = [w_1 \quad \dots \quad w_{n_c}]^T \cos m\theta. \quad (10)$$

توابع وزن راستای شعاعی برای حذف انتگرال مرزی در رابطه (۳) به صورت زیر انتخاب می شوند،

$$w_i = (1 - \xi^2) e^{-W(\xi - \xi_i)^2}, \quad i = 1, \dots, n_w. \quad (11)$$

$\xi_i$  یک نقطه وزنی در راستای شعاعی بوده و تعداد کل آن ها برابر  $n_w$  است که رابطه مستقیم با مرتبه چند جمله ای های چبی شف در این راستا دارد،

$$n_w = O_r - 1. \quad (12)$$

پارامتر وزنی  $W$  نیز برای مسائل هارمونیک برابر با ۲۵ در نظر گرفته می شود. عملگر معادله دیفرانسیل و ماتریس ضرایب در رابطه ی (۱) برای حالت همگن معادله ی هارمونیک (معادله لاپلاس) در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر هستند،

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

بنابراین ماتریس ضرایب در فرم ضعیف انتگرال وزنی معادله، با استفاده از رابطه فوق در رابطه ی (۳)، به صورت زیر بازنویسی می شود.



$$\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ r \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \theta} \right\} dr d\theta. \quad (14)$$

انتگرال دوبعدی فوق به صورت ترکیب انتگرال‌های یک‌بعدی در راستای شعاعی و زاویه‌ای قابل بیان است. انتگرال‌های راستای شعاعی به شکل‌های زیر و در قالب درایه‌های تعدادی ماتریس هستند،

$$(A_1)_{i,j+1} = G_1^{i,j} = \frac{-2}{I_i} \int_{-1}^1 (1+\xi) \left( \xi + W(1-\xi^2)(\xi - \xi_j) \right) e^{-W(\xi-\xi_j)} \frac{\partial T_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad (15)$$

$$(A_2)_{i,j+1} = G_2^{i,j} = \frac{1}{I_i} \int_{-1}^1 (1-\xi) e^{-W(\xi-\xi_j)} T_j(\xi) d\xi, \quad i = 1, \dots, n_w, \quad j = 0, 1, \dots, O_r.$$

$I_i$  پارامتر هم‌پایه‌ساز توابع وزن است و به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$I_i = \int_{-1}^1 (1-\xi^2) e^{-W(\xi-\xi_j)} d\xi. \quad (16)$$

انتگرال‌های راستای زاویه‌ای نیز در انواع زیر خواهند بود،

$$\bar{I}_{m,n}^1 = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(m\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad \bar{I}_{m,n}^2 = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(m\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad (17)$$

$$\bar{I}_{m,n}^3 = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \sin(m\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad \bar{I}_{m,n}^4 = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(m\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$\bar{I}_{m,n}^5 = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) \sin(m\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad \bar{I}_{m,n}^6 = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \sin(m\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$\bar{I}_{m,n}^7 = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \cos(m\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad \bar{I}_{m,n}^8 = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(m\theta) \sin(n\theta) d\theta,$$

$$\bar{I}_{m,n}^9 = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos(m\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad \bar{I}_{m,n}^{10} = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$\bar{I}_{m,n}^{11} = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad \bar{I}_{m,n}^{12} = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$m, n = 0, 1, \dots, O_r.$$

لازم به توجه است که ساختار انتگرال‌های فوق مستقل از شکل دامنه حل بوده و بنابراین قابلیت محاسبه و ذخیره‌سازی آن‌ها به صورت مقادیر کتابخانه‌ای وجود دارد. این موضوع به کاهش قابل توجه حجم عملیات برای حل مسائل گوناگون خواهد انجامید. در تشکیل ساختار ماتریس  $\mathbf{A}$  برای ورود ضرایب حاصل از اعمال مشتق بر جملات مثلثاتی، از ماتریس قطری زیر استفاده می‌شود،

$$\mathbf{D}_\theta = \text{Diag} [0, 1, \dots, O_r]. \quad (18)$$



با استفاده از تعاریف فوق، ساختار ماتریس  $A$  به صورت زیر در نظر گرفته می شود،

$$\mathbf{A}^S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{O_i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{m+1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{ss}^h)^{1,m+1} & (\mathbf{A}_{sc}^h)^{1,m+1} \\ (\mathbf{A}_{ss}^h)^{2,m+1} & (\mathbf{A}_{sc}^h)^{2,m+1} \\ \vdots & \vdots \\ (\mathbf{A}_{ss}^h)^{n_w,m+1} & (\mathbf{A}_{sc}^h)^{n_w,m+1} \\ (\mathbf{A}_{cs}^h)^{1,m+1} & (\mathbf{A}_{cc}^h)^{1,m+1} \\ (\mathbf{A}_{cs}^h)^{2,m+1} & (\mathbf{A}_{cc}^h)^{2,m+1} \\ \vdots & \vdots \\ (\mathbf{A}_{cs}^h)^{n_w,m+1} & (\mathbf{A}_{cc}^h)^{n_w,m+1} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

برای هر نقطه‌ی وزنی در راستای شعاعی و هر مرتبه تابع وزن در راستای زاویه‌ای که به ترتیب با اندیس‌های  $i$  و  $m$  نمایش داده شده‌اند، درایه‌های ماتریس فوق به صورت‌های زیر به دست می آیند،

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{ss}^h)^{i,m+1} &= ((\bar{\mathbf{I}}_{1,m+1}) + (\bar{\mathbf{I}}_{3,m+1})^T) (\mathbf{A}_{1,i}) + m\mathbf{D}_\theta ((\bar{\mathbf{I}}_{12,m+1}) + (\bar{\mathbf{I}}_{10,m+1})^T) (\mathbf{A}_{2,i}), \\ (\mathbf{A}_{cs}^h)^{i,m+1} &= ((\bar{\mathbf{I}}_{7,m+1}) + (\bar{\mathbf{I}}_{9,m+1})^T) (\mathbf{A}_{1,i}) + m\mathbf{D}_\theta (-(\bar{\mathbf{I}}_{6,m+1}) - (\bar{\mathbf{I}}_{4,m+1})^T) (\mathbf{A}_{2,i}), \\ (\mathbf{A}_{sc}^h)^{i,m+1} &= ((\bar{\mathbf{I}}_{4,m+1}) + (\bar{\mathbf{I}}_{6,m+1})^T) (\mathbf{A}_{1,i}) + m\mathbf{D}_\theta (-(\bar{\mathbf{I}}_{9,m+1}) - (\bar{\mathbf{I}}_{7,m+1})^T) (\mathbf{A}_{2,i}), \\ (\mathbf{A}_{cc}^h)^{i,m+1} &= ((\bar{\mathbf{I}}_{10,m+1}) + (\bar{\mathbf{I}}_{12,m+1})^T) (\mathbf{A}_{1,i}) + m\mathbf{D}_\theta ((\bar{\mathbf{I}}_{3,m+1}) + (\bar{\mathbf{I}}_{1,m+1})^T) (\mathbf{A}_{4,i}). \end{aligned} \quad (20)$$

با چین سطرهای هر کدام از ماتریس‌های فوق به طور متوالی در کنار یکدیگر و مطابق زیر، اجزای ماتریس ضرایب  $A$  محاسبه می شود،

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{ss}^h)^{i,m+1} &= [(\mathbf{A}_{ss}^h)^{i,m+1}_1 \quad (\mathbf{A}_{ss}^h)^{i,m+1}_2 \quad \dots \quad (\mathbf{A}_{ss}^h)^{i,m+1}_{O_i+1}], \quad (\mathbf{A}_{sc}^h)^{i,m+1} = [(\mathbf{A}_{sc}^h)^{i,m+1}_1 \quad (\mathbf{A}_{sc}^h)^{i,m+1}_2 \quad \dots \quad (\mathbf{A}_{sc}^h)^{i,m+1}_{O_i+1}], \\ (\mathbf{A}_{cs}^h)^{i,m+1} &= [(\mathbf{A}_{cs}^h)^{i,m+1}_1 \quad (\mathbf{A}_{cs}^h)^{i,m+1}_2 \quad \dots \quad (\mathbf{A}_{cs}^h)^{i,m+1}_{O_i+1}], \quad (\mathbf{A}_{cc}^h)^{i,m+1} = [(\mathbf{A}_{cc}^h)^{i,m+1}_1 \quad (\mathbf{A}_{cc}^h)^{i,m+1}_2 \quad \dots \quad (\mathbf{A}_{cc}^h)^{i,m+1}_{O_i+1}]. \end{aligned} \quad (21)$$

پس از ایجاد ماتریس  $A$  و با محاسبه‌ی فضای پوچ آن، توابع پایه متعادل شده حاصل می شوند. در نهایت با اعمال شرایط مرزی بر سری پاسخ مسئله روند حل تکمیل می شود.

### ۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی در مسائل هارمونیک به طور کلی شامل دو دسته شرایط مرزی دریشه<sup>۱</sup> و شرایط نویمان<sup>۲</sup> هستند. شرایط مرزی دریشه به صورت مقدار تابع در هر نقطه مشخص می شود، در حالی که شرایط مرزی نویمان از نوع مقادیر معلوم مشتقات تابع پاسخ می باشد. برای اعمال شرایط مرزی با در نظر گرفتن تعدادی نقطه در امتداد مرزهای دامنه‌ی حل، با توجه به نوع شرایط مرزی برای آن نقاط مقدار مشتقات تابع تعیین می شود. با توجه به رابطه‌ی (۱)، اعمال شرایط مرزی با استفاده از عملگر مناسب به صورت زیر انجام می شود،

<sup>1</sup> Dirichlet boundary conditions

<sup>2</sup> Neumann boundary conditions



$$\mathbf{B} = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet type} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{DS} & \text{Neumann type} \end{cases} \quad (22)$$

$\mathbf{n}$  بردار یک‌ه‌ی عمود بر مرز در نقطه‌ی مرزی مورد نظر است. همچنین مقادیر معلوم تابع حل مسئله ( $u_b$ ) و یا مشتقات آن ( $q_b$ ) در نقاط مرزی، اجزای  $\mathbf{f}_b$  را به ترتیب برای شرایط دریشله و نویمان تشکیل می‌دهند. برای اعمال شرایط مرزی نویمان در فضای قطبی نیاز به تبدیلات زیر است،

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (23)$$

در نهایت با تشکیل ماتریس  $\mathbf{V}$  و همچنین بردار  $\mathbf{U}_b$  به صورت زیر، بردار ضرایب مجهول  $\mathbf{d}$  محاسبه شده و طبق رابطه‌ی (۶)، پاسخ تقریبی مسئله به‌دست می‌آید،

$$\mathbf{Vd} = \mathbf{U}_b, \quad \mathbf{V}^i = (\mathbf{Bf})^T \Big|_{x,y} \varphi, \quad i = 1, \dots, N_b. \quad (24)$$

$\mathbf{V}^i$  نشان‌دهنده‌ی سطر  $i$ ام ماتریس  $\mathbf{V}$  بوده و  $N_b$  تعداد نقاط مرزی می‌باشد. بردار  $\mathbf{U}_b$  نیز مقادیر معلوم مرزی را بر اساس نوع شرایط مرزی در خود جای می‌دهد. برای محاسبه بردار ضرایب مجهول از روش حداقل مربعات استفاده می‌شود،

$$\mathbf{d} = (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^+ \mathbf{V}^T \mathbf{U}_b. \quad (25)$$

علامت + بیانگر شبه وارون مور-پنروز است.

#### ۴- جریان پتانسیل در اطراف یک مانع استوانه‌ای

برای محاسبه‌ی خطا در مثال آتی از خطای میانگین به صورت زیر استفاده می‌شود،

$$\varepsilon_{avg} (\%) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_E} (u_{ex}|_{P_i} - u_{ap}|_{P_i})^2}{\sum_{i=1}^{N_E} (u_{ex}|_{P_i})^2}} \times 100, \quad i = 1, \dots, N_E. \quad (26)$$

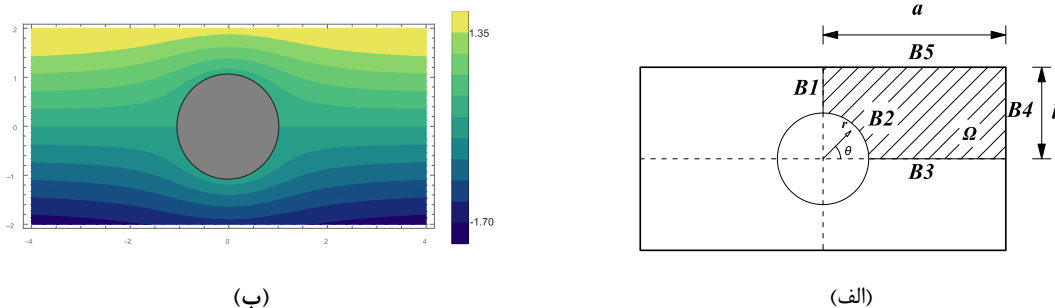
$u_{ap}$  و  $u_{ex}$  به ترتیب پاسخ دقیق و تقریبی مسئله هستند.  $N_E$  تعداد نقاط در نظر گرفته شده برای برآورد خطا در دامنه‌ی حل مسئله می‌باشند. در این مثال به بررسی جریان آب عبوری از اطراف یک مانع استوانه‌ای پرداخته شده و با بررسی فشار ناشی از سیال به بدنه‌ی مانع استوانه‌ای و همچنین نحوه‌ی حرکت سیال و محاسبه‌ی دقت آن‌ها، توانایی روش حاضر نشان داده می‌شود. معادله‌ی لاپلاس، حاکم بر مسئله بوده و شرایط مرزی متناظر آن به صورتی که در جدول ۱ نمایش داده شده است، از حل دقیق موجود برای تابع پتانسیل سرعت ( $\varphi$ ) استخراج می‌شود،

$$\varphi = U \times x \left( 1 + \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right). \quad (27)$$





شرایط دریشه معادل با مقدار پتانسیل سرعت، و شرایط نویمان متناظر با مشتق سویی تابع پتانسیل سرعت (سرعت سیال عمود بر مرز) هستند. برای تحلیل این مثال به دلیل وجود تقارن، بخشی از کل دامنه به صورت مشخص شده در شکل (۲-الف) به عنوان دامنه‌ی حل در نظر گرفته شده است.



شکل ۲: (الف) دامنه حل و شرایط مرزی مربوط به مثال، (ب) خطوط جریان در دامنه‌ی اطراف مانع استوانه‌ای حاصل از روش حاضر.

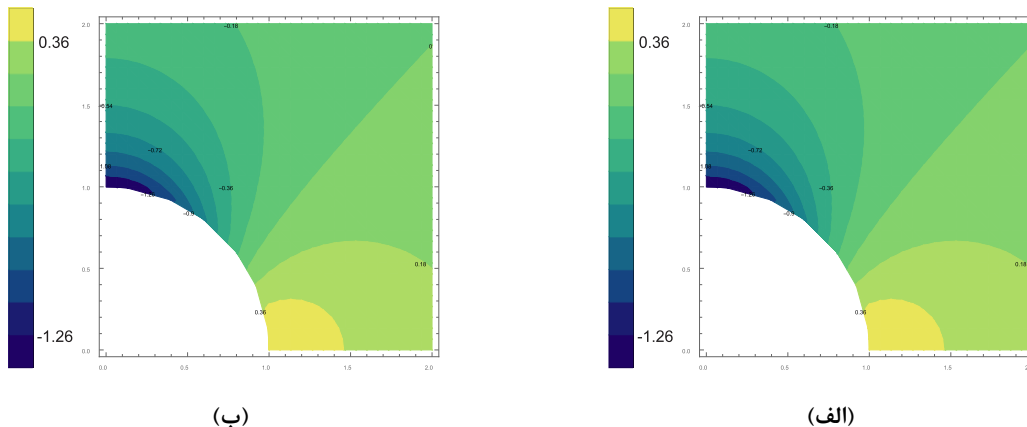
جدول ۱. شرایط مرزی و تعداد نقاط مرزی مربوط به مثال.

مرز	B1	B2	B3	B4	B5
نوع شرایط مرزی	دریشه	نویمان	دریشه	نویمان	نویمان
تعداد نقاط در امتداد مرز	۲۰	۳۰	۳۰	۴۰	۴۰

برای حل این مثال با در نظر گرفتن  $a = 4$ ،  $b = 2$  و شعاع استوانه برابر واحد، پس از حل مسئله تغییرات فشار به صورت زیر از رابطه برنولی استخراج می‌شود.

$$P = \frac{1}{2} \rho (U^2 - v^2) + p_e \quad (28)$$

$\rho$  چگالی سیال بوده و  $v = \|\nabla \phi\|$  بزرگی بردار سرعت سیال است. فشار در فاصله زیاد از مانع است که برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین  $U$  برابر واحد فرض می‌شود. با انتخاب پارامترهای حل به صورت  $O_r = 25$ ،  $O_i = 25$  و  $R = 4.48$ ، تغییرات فشار در اطراف مانع استوانه‌ای با استفاده از حل دقیق موجود و نیز حل تقریبی به روش حاضر به صورت شکل ۳ می‌باشد. تطابق کامل نتایج حاصل از روش با پاسخ دقیق، نشان از توانایی بالای آن در حل مسئله دارد.

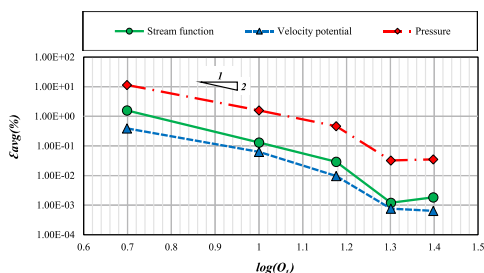


شکل ۳: تغییرات فشار در ناحیه‌ی اطراف مانع استوانه‌ای (الف) با استفاده از حل دقیق، (ب) با استفاده از روش حاضر.

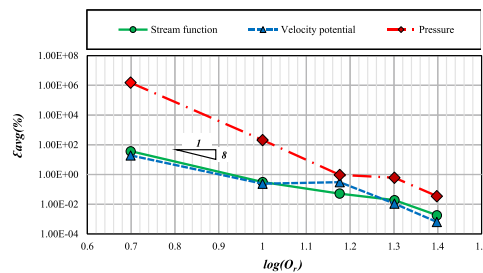
درصد خطای میانگین برای تخمین تابع  $\varphi$  برابر  $\varepsilon_{avg} = 6.4 \times 10^{-4} \%$  و برای تخمین فشار  $P$  برابر  $\varepsilon_{avg} = 3.5 \times 10^{-2} \%$  به دست می‌آید. برای بررسی چگونگی حرکت سیال از تابع جریان ( $\psi$ ) به شکل زیر استفاده می‌شود،

$$\psi = U \times y \left( 1 - \frac{r_0^2}{x^2 + y^2} \right). \quad (29)$$

تعداد پایه‌های حل همانند قبل می‌باشد. بررسی‌ها نشان می‌دهد درصد خطای میانگین برای تخمین تابع  $\psi$  برابر  $\varepsilon_{avg} = 1.8 \times 10^{-3} \%$  به دست می‌آید. پاسخ حاصل در قالب خطوط جریان در شکل (۲-ب) نشان داده شده است. در ادامه، بررسی همگرایی پاسخ با افزایش جملات در راستای شعاعی و زاویه‌ای برای نمایش تأثیر تعداد پایه‌ها در برآورد پاسخ نیز به شرح شکل ۴ آورده شده است؛ به این صورت که با ثابت فرض کردن یکی از مرتبه‌های زاویه‌ای یا شعاعی برابر ۲۵، تأثیر افزایش مرتبه‌ی دیگر بر دقت پاسخ نمایش داده شده است. با توجه به خروجی‌های حاصل از روش حاضر و دقت‌های به دست آمده و همچنین نرخ همگرایی بالا، می‌توان به توانایی روش در برآورد مناسب پاسخ مسئله پی برد.



(ب)

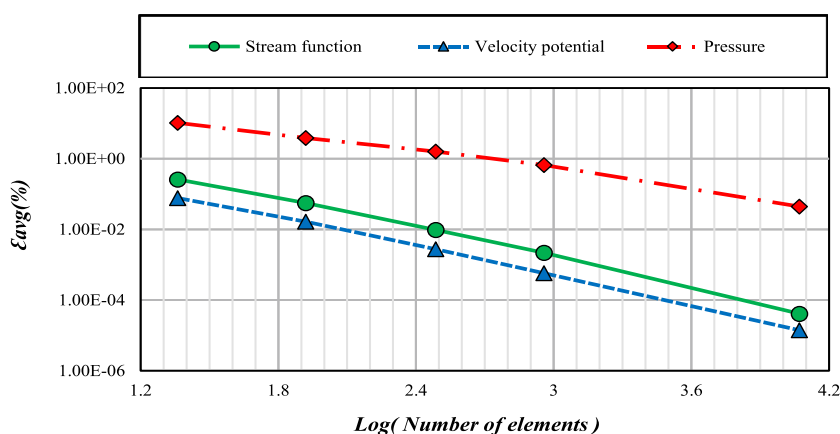


(الف)

شکل ۴: خطای میانگین در اثر (الف) افزایش پایه‌های راستای شعاعی، (ب) افزایش پایه‌های راستای زاویه‌ای.



برای بررسی بیشتر دقت در روش حاضر، مسئله با استفاده از نرم‌افزار COMSOL که در آن از روش اجزا محدود بهره‌گیری می‌شود مدل سازی شده است. در این مثال با استفاده از المان‌های مثلثی مرتبه دوم نتایج تخمین زده شده اند و درصد خطای میانگین با افزایش تعداد المان برای تابع پتانسیل سرعت ( $\varphi$ )، فشار ( $P$ ) و تابع جریان ( $\psi$ ) در شکل ۵ نشان داده شده است. نتایج حاکی از آن است که برای تعداد المان‌های بسیار زیاد همگرایی برای پاسخ‌ها اتفاق می‌افتد، بنابراین از نظر زمان و هزینه مقرون به صرفه نیست؛ در حالی که روش حاضر با توجه به دقت خروجی از سرعت بسیار خوبی برخوردار می‌باشد. از طرفی مشاهده می‌شود که به منظور رسیدن به دقت تخمین روش حاضر برای توابع پتانسیل سرعت و جریان از حدود هزار المان و برای فشار از بیش از ۱۰ هزار المان محدود استفاده شده است، این در حالی است که ابعاد معادله ماتریسی نهایی در تحقیق حاضر برابر ۱۲۸ است. این نشان می‌دهد که روش حاضر دقت و بازدهی بسیار خوبی در تخمین توابع و مشتقات آن‌ها دارد.



شکل ۵: تغییرات خطای میانگین با افزایش تعداد المان‌ها با استفاده از نرم‌افزار COMSOL.

## ۵- جمع بندی و نتیجه گیری

روش توابع پایه متعادل شده در مختصات قطبی برای حل مسائل هارمونیک ارائه شد. روش مذکور در قالب روش‌های استفاده از توابع پایه بوده و قادر به ارائه میادین پتانسیل کاملاً پیوسته با دقت بسیار بالا می‌باشد. مهمترین مزیت روش، قابلیت در نظر گرفتن پایه‌های اولیه‌ای است که لزومی به صادق بودن آن‌ها در معادله نیست. به منظور ارضای معادله دیفرانسیل از فرم ضعیف انتگرال وزنی آن در یک ناحیه تصویری استفاده شد که در ضمن آن، مشتقات با مرتبه‌ی کمتری در روابط ظاهر می‌شوند. لازم به ذکر است که با توسعه این ساختار همچنین می‌توان معادلات دیفرانسیل مطرح در مسائل مهندسی با ضرایب غیرثابت را، همزمان با ارضای معادله دیفرانسیل، بدون اعمال مشتق بر ضرایب معادله تحلیل کرد. همچنین توسعه فرمول بندی روش در مختصات قطبی می‌تواند مقدمه‌ای بر حل مسائل دارای تکینگی ضعیف در مواد غیرهمگن باشد. به دلیل ساختار تفکیک پذیر پارامترهای حل، انتگرال‌های موجود با ترکیب تعدادی انتگرال یک‌بعدی تشکیل شدند که به کاهش قابل توجه حجم عملیات می‌انجامد. با بررسی مسئله جریان پتانسیل در اطراف مانع استوانه‌ای، دقت و کارایی روش به خوبی مورد تایید قرار گرفت.



## ۶- مراجع

- [1]-Trefftz, E., 1926, **Ein Gegenstück zum ritzschen Verfahren**, Proceedings of 2nd International Congress on Applied Mechanics, Zurich, pp.131-137.
- [2]- Kupradze, V. D., and Aleksidze, M. A., 1964, **The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems**, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 4, pp.82-126.
- [3]-Cheng, A. H. D., and Cheng, D. T., 2005, **Heritage and early history of the boundary element method**, Engineering Analysis with Boundary Elements, 29, pp.268-302.
- [4]- Brebbia, C. A., 1978, **The boundary element method for engineers**, Halstead Press, New York.
- [5]-Broomhead, D. S., and Lowe, D., 1988, **Multivariable functional interpolation and adaptive network**”, Complex Systems, 2, pp.321-355.
- [6]- Buhmann, M. D., 2000, **Radial Basis Functions**, Acta Numerica, Cambridge Press, pp.1-38.
- [7]-سقراطی، س، ۱۳۸۳، استفاده از توابع پایه هموار در حل برخی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل مکانیک جامدات، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [۸]- مسیبی، ف، ۱۳۸۹، حل مسائل مکانیک جامدات در محیط های محدود و نامحدود با استفاده از روش های نیمه تحلیلی و اجزا محدود، رساله دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [۹]- نورمحمدی، ن، ۱۳۹۰، حل مسائل مکانیک جامدات با استفاده از توابع پایه تعمیم یافته، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [10]-Noormohammadi, N., and Boroomand, B., 2014, **A fictitious domain method using equilibrated basis functions for harmonic and bi-harmonic problems in physics**, Journal of Computational Physics, 272, pp. 189-217.