



## تحلیل رفتار پس از کمانش قاب به روش الاستیکا

محمد رضا رخی شهری<sup>۱</sup>، رضا ضیا توحیدی<sup>۲</sup>، عباسعلی صادقی<sup>۳</sup>، سیده وحیده هاشمی<sup>۴</sup>، کوروش مهدی زاده<sup>۵\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، گروه عمران، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران.

<sup>۲</sup> گروه عمران، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران.

<sup>۳</sup> دانشجوی دکتری، گروه عمران، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران.

<sup>۴</sup> دانشجوی دکترای تخصصی، گروه عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

<sup>۵\*</sup> گروه عمران، واحد گرمسار، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمسار، ایران (ko\_ma751@mail.um.ac.ir).

(تاریخ دریافت مقاله: ۹۸/۱۰/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۱/۱۲)

### چکیده

تحلیل و بررسی رفتار الاستیک پس از کمانش قاب‌ها پیچیده است. زمانی که به یک قاب نیروی بیش از بار بحرانی وارد شود، شروع به تغییر شکل‌های بزرگ می‌کند. در این حالت دیگر تئوری تغییر شکل‌های کوچک برای سازه معتبر نیست و باید از تئوری تغییر شکل‌های بزرگ استفاده گردد. تجزیه و تحلیل پس از کمانش سازه‌های الاستیک همواره نیازمند حل مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل غیرخطی بر اساس معادلات تعادل می‌باشد. در طراحی اعضای تحت نیروی محوری و یا نیروی محوری و لنگر خمشی در سازه علاوه بر معیار جاری‌شدگی، معیار کمانش نیز حائز اهمیت است. به نحوی که اگر طول عضو زیاد یا عضو لاغر باشد قبل از جاری‌شدگی، کمانش در عضو اتفاق می‌افتد که لازم است عضو برای کمانش احتمالی کنترل و بررسی شود. در این تحقیق، رفتار پس از کمانش قاب مهاربندی نشده جانبی به کمک تئوری الاستیکا تحلیل و بررسی گردیده است. بدین منظور ابتدا به تحلیل یک ستون طره‌ای به روش بسط مک‌لورن پرداخته شده و با بررسی نتایج رفتار پس از کمانش آن با پژوهش گذشته، صحت روش مذکور مورد ارزیابی قرار گرفته است. در ادامه با توجه به صحت روش مذکور به بررسی تغییر شکل‌های بزرگ و رفتار پس از کمانش قاب L شکل پرداخته شده است. برای تحلیل قاب مذکور نیاز به حل یک دستگاه معادلات غیرخطی می‌باشد. برای به دست آوردن معادلات غیرخطی از روش بسط مک‌لورن استفاده شده است. با به دست آمدن معادلات، به ترسیم نمودارهای تغییر شکل قاب پرداخته شده است. برای رسم نمودارها و حل معادلات غیرخطی، نرم‌افزار Mathematica به کاررفته است. در ادامه با مدل‌سازی قاب در نرم‌افزار اجزا محدودی ABAQUS، به مقایسه صحت نتایج نرم‌افزار با تحلیل مذکور پرداخته شده و همگرایی پاسخ‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

### کلمات کلیدی

قاب L شکل، تئوری الاستیکا، رفتار پس از کمانش، سری مک لورن، نرم افزار Mathematica، نرم افزار ABAQUS.



# The Post-Buckling Behavior Analysis of Frame by Elastica Method

Mohammadreza Rokhi Shahri<sup>1</sup>, Reza Zia Tohidi<sup>2</sup>, Abbasali Sadeghi<sup>3</sup>, Seyede Vahide Hashemi<sup>4</sup>, Kourosh Mehdizadeh<sup>5\*</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

<sup>2</sup> Department of Civil Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

<sup>3</sup> Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Mashhad Branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran.

<sup>4</sup> Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

<sup>5\*</sup> Department of Civil Engineering, Garmsar Branch, Islamic Azad University, Garmsar, Iran. (ko\_ma751@mail.um.ac.ir)

(Date of received: 15/01/2020, Date of accepted: 31/03/2020)

## ABSTRACT

The elastic behavior analysis of post-buckling of the frames is complex. When a frame is exerted force over critical load, it begins large deformations. In this case, the theory of small deformations is not valid for the structure, and it must be used the theory of large deformations. Post-buckling analysis of the elastic structures always requires solving method with a set of nonlinear differential equations based on equilibrium equations. In designing the members under the axial force or the axial force and the bending moment in the structure, in addition to the yielding criterion, the buckling criterion is important too. However, if the length of the member is too much or the member is slender, before yielding, buckling occurs in the member, which requires the member to be checked for possible buckling. In this research, the post-buckling behavior of the lateral unbraced frame is analyzed with the help of Elastica theory. For this purpose, the first step is to analyses a cantilever column by the Maclaurin Series method. By examining the results of the post-buckling behavior of this column with the previous research, the verification of this method has been evaluated. In the following, due to the verification of the method, the large deformations and post-buckling behavior L-shaped frame are investigated. To analyses the frame, it is necessary to solve a nonlinear equation system. The Maclaurin Series method has been used to obtain nonlinear equations. With the help of the equations, the frame deformations diagrams have been plotted. Mathematica software is used to draw charts and solve nonlinear equations. In the following, with the modelling of the frame in Finite Element ABAQUS software, the comparison of the accuracy of the software results with this analysis has been checked and the convergence of the responses has been examined.

## Keywords:

L-shaped Frame, Elastica Theory, Post-Buckling Behavior, Maclaurin Series, Mathematica Software, ABAQUS Software.



### ۱- مقدمه

تیر-ستون‌ها اعضای سازه‌ای هستند که تحت اثر بارهای محوری و لنگر خمشی می‌باشند. این لنگرهای خمشی شامل دودسته می‌باشند: لنگرهای خمشی اولیه ناشی از لنگرهای وارده و یا ایجاد شده در انتهای عضو و یا لنگرهای ناشی از انتقال بارها در عضو و لنگرهای خمشی ثانویه که ناشی از اثر نیروی محوری به واسطه تغییر مکان جانبی عضو است. با توجه به شکل (۱-الف) لنگر  $p - \delta$  لنگری است که در اثر نیروی محوری مؤثر به دلیل تغییر مکان جانبی عضو ایجاد می‌گردد. در حالی که لنگر  $p - \Delta$  لنگر به وجود آمده در اثر نیروی محوری به دلیل تغییر مکان نسبی دو انتهای عضو مطابق شکل (۱-ب) است.



شکل ۱: نمودار تغییر مکان ستون تحت نیروی محوری الف- نمودار  $p - \delta$ ، ب- نمودار  $p - \Delta$  [۱].

تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ غیرخطی و رفتار پس کمانش میله‌ها و تیر-ستون‌ها از اهمیت زیادی در فیزیک، مهندسی سازه و مهندسی مکانیک برخوردار است. به‌ویژه هنگامی که آن‌ها لاغر هستند و از مواد الاستیک با مقاومت بالا مانند FRP و یا کامپوزیت‌ها ساخته شده‌اند. این هدف بر مبنای بررسی‌های دقیق بر روی انحنا در معادله دیفرانسیل منحنی تغییر شکل (روش الاستیکا، تیموشینکو و غیره) و یا بر مبنای تحلیل مرتبه دوم از قبیل روش اجزا محدود با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ و یا بدون آن میسر است [۱].

### ۲- مروری بر تحقیقات پیشینیان

گورفینکل<sup>۱</sup> و روبینسون<sup>۲</sup> (۱۹۶۵)، اولین کسانی بودند که اقدام به محاسبه بار بحرانی ستون با شرایط مرزی مقید کردند. آن‌ها تحلیل کمانش را با حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم انجام دادند. اگرچه بر مبنای تحقیقات آن‌ها بار بحرانی ستون محاسبه گردید، اما امروزه جهت به دست آوردن بار کمانش ستون از حل معادله مشخصه آن، با استفاده از معادلات دیفرانسیلی خطی مرتبه چهارم استفاده می‌گردد. همچنین آنان با استفاده از شرایط لبه‌ای دونقطه از ستون و روش shooting method اقدام به محاسبه پس کمانش ستون کردند. بر اساس این مطالعه از حل غیرخطی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به روش الگوریتم Runge-Kutta استفاده گردید [۲].

ترکمنی<sup>۳</sup> و همکاران (۱۹۹۸)، به بررسی یک قاب دویعدی با وجود بار جانبی، لنگر خمشی در انتها و نیروی محوری در اعضای قاب پرداختند. در تحلیل آن قاب از روش‌های مختلفی همانند روش‌های کلاسیکی تحلیل، تحلیل مرتبه اول، تحلیل مرتبه دوم و

<sup>1</sup> Gurfinkel

<sup>2</sup> Robinson

<sup>3</sup> Torkamani



پوش آور استفاده گردید. آنان همچنین با تغییر در شرایط اولیه و روش حل مسئله، نتایج را با یکدیگر مقایسه کردند. سپس با تحلیل غیرخطی و مرتبه دوم سازه، ایجاد ارتباط بین کرنش‌ها و چرخش‌های بزرگ، کرنش و جابجایی در حالت الاستیک سازه را بررسی کردند. آن‌ها همچنین با استفاده از روش اجزا محدود و بررسی تغییرات در ماتریس سختی قاب الگوریتمی جهت محاسبه مجموع انرژی ذخیره شده در قاب تغییرشکل داده شده در دو حالت تحلیل مرتبه اول و تحلیل مرتبه دوم سازه را ارائه کردند [۳].

اسمیت پاردو<sup>۴</sup> و آریستیزابل اوچوآ<sup>۵</sup> (۱۹۹۹)، اقدام به تحلیل کمانش و پس از کمانش یک تیر-ستون با مقطع متقارن کردند. مدل‌سازی آن‌ها بر اساس نظریه تیموشینکو بوده با این تفاوت که تیر موردنظر دارای دو بار با جهت‌های عمود بر هم و دارای مقدار کمی خیز اولیه است. در این تحقیق سه هدف کلی مدنظر قرار گرفت [۴]:

- محاسبه‌ی پاسخ‌های سازه پیش از کمانش و مقدار بار لازم در لحظه اولیه ایجاد کمانش.
  - توضیح رفتار پس کمانشی.
  - محاسبه‌ی تأثیر موده‌های بالای کمانش بر روی رفتار کمانشی تیر-ستون‌ها با پیش‌خیز به مقدار کم.
- همچنین آن‌ها به بررسی تأثیر وجود بارگذاری به صورت مختلف بر روی ایجاد تغییرشکل‌های محوری بر روی تیر-ستون و نحوه ایجاد تنش ناشی از خمش در دهانه تیر پرداخته و نشان دادند که رفتار پیش کمانشی، کمانشی و پس کمانشی ستون‌ها به عوامل زیر بستگی دارد.

- سطح مقطع و رفتار مصالح مورد استفاده.
- شرایط تکیه‌گاهی.
- نوع و شرایط هندسی المان تیر-ستون و میزان تقارن و وجود نقص اولیه در هندسه المان.
- محل قرارگیری بارهای مختلف بر روی المان سازه

هوری<sup>۶</sup> و ساساگوا<sup>۷</sup> (۲۰۰۰)، به مدل‌سازی یک المان سه‌بعدی قاب به روش تحلیل غیرخطی هندسی و غیرخطی مصالح اقدام کردند. برای این مدل‌سازی آن‌ها از المان فایبر استفاده کردند، و رفتار تنش-کرنش، بر اساس مدل ارائه شده توسط رمبرگ اسگود<sup>۸</sup> مورد تحلیل قرار گرفته است. آن‌ها با تبدیل این المان قابی به اجزای کوچک‌تر، در هنگام بارگذاری و باربرداری از روی سازه سختی المان‌ها را محاسبه کردند. تا اولین عضوی که دچار کمانش می‌گردد را مشخص نمایند. آن‌ها همچنین با مدل‌سازی این المان‌ها در آزمایشگاه تحت بارگذاری رفت و برگشتی و مقایسه نتایج آزمایشگاهی و محاسباتی از صحت نتایج تحلیل خود اطمینان حاصل کردند. در پژوهش فوق تحلیل غیرخطی هندسی و مصالح قاب‌های سه‌بعدی با دهانه‌های بزرگ به روش اجزای محدود صورت گرفته است. نتایج تحلیل آن‌ها با نتایج حاصل از داده‌های آزمایشگاهی درباره محل‌هایی از سازه که دچار تغییرشکل‌های بزرگ می‌شوند، هم‌خوانی دارد [۵ و ۶].

خام لیچی<sup>۹</sup> و همکاران (۲۰۰۱)، به بررسی ارتباط غیرخطی بین میزان جابه‌جایی و کرنش که تأثیر زیادی بر روی رفتار پس کمانشی دارد، پرداختند. همچنین ارتباط بین کرنش و میزان اعضاء درگیر با یکدیگر را در یک سازه دوبعدی با اتصالات مفصلی بیان کردند. شکل (۲) نشان‌دهنده‌ی اتصال موردبررسی می‌باشد. آن‌ها از فرضیات فیزیکی مختلفی جهت مدل‌سازی حالات مختلف اعضاء

<sup>4</sup> Smith-Pardo

<sup>5</sup> Aristizabal-Ochoa

<sup>6</sup> Hori

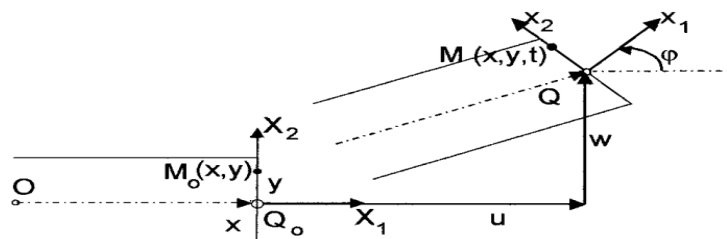
<sup>7</sup> Sasagawa

<sup>8</sup> Ramberg-Osgood

<sup>9</sup> Khamlichi



سازه بهره گرفتند. در این فرضیات برای محاسبه کرنش به‌طور کلی از روش‌های تقریبی چندجمله‌ای استفاده گردید. همچنین برای محاسبه اولین مود کمانش یک تیر از روابط تعادل بر مبنای حداقل انرژی لازم سیستم استفاده کردند. بر مبنای نتایج این محاسبات در لحظه وقوع پس کمانش تغییرشکل‌های کششی و کرنش‌های برشی در تار وسط تیر قابل مشاهده هستند [۷].



شکل ۲: نمایش وجود تغییرشکل در مقطع تیر در لحظه وقوع پس کمانش [۷].

داریو اریستیزابل<sup>۱۰</sup> (۲۰۰۱)، به محاسبه تغییرشکل‌های بزرگ یک المان لاغر تیر-ستون با مقطع متقارن و تکیه‌گاه‌های نیمه صلب، همراه با بارگذاری در انتهای المان به روش تحلیل غیرخطی پرداختند. نحوه بارگذاری به‌صورت محوری و دارای مقداری انحراف از محور طولی عضو بود. تحلیل غیرخطی تیر مذکور با استفاده از توابع ارائه‌شده در نظریه تیموشینکو تغییرشکل‌های تیر تحت وجود تکیه‌گاه با حالات مختلف همانند اتصال صلب، اتصال نیمه صلب و اتصال مفصلی محاسبه شد. در این مدل‌سازی جهت ایجاد انحراف و به وجود آمدن تغییرشکل‌های بزرگ در تیر، ۱/۵ درصد مقدار بارمحوری به‌صورت جانبی به تیر وارد گردید. به جهت راستی آزمایشی معادلات، نتایج و روش مدل‌سازی مورد استفاده از روش‌های کلاسیک حل مسائل مربوط به تغییرشکل‌های بزرگ همچون روش الاستیکا استفاده گردید [۸]. اریستیزابل و همکاران (۲۰۰۴)، اقدام به بررسی رفتار تغییرشکل بزرگ یک تیر-ستون کردند. در این تحلیل شرایط مرزی تیر-ستون را نیمه صلب در نظر گرفتند و با قرار دادن لنگر و یک‌بار به‌صورت مایل در انتهای تیر-ستون اقدام به تحلیل الاستیک آن کردند. آن‌ها با تغییر در شرایط مرزی و تغییر در شرایط بارگذاری بر روی تیر-ستون با استفاده از تئوری الاستیکا و روش‌های انتگرال بیضوی پایداری آن را بررسی کردند. قابل ذکر است تئوری الاستیکا قابلیت در نظر گرفتن کرنش‌های خمشی و محاسبه دقیق ایجاد انحنا و تغییرشکل‌های خمشی از مقدار کم تا مقدار زیاد ناشی از بارگذاری خمشی را دارد. تحلیل تغییرشکل بزرگ در تیر-ستونی با اتصالات صلب در دو انتها نیازمند حل پیچیده روابط مربوط به مدل‌سازی غیرخطی سازه است، که پاسخ این روابط را می‌توان با استفاده از انتگرال بیضوی به دست آورد [۹]. فانگ پیانگان<sup>۱۱</sup> و چاچیپ ساکال<sup>۱۲</sup> (۲۰۰۵)، بر روی رفتار پس کمانش ستون با شروط چرخشی متفاوت و وجود نیروی فشاری در بالای ستون تحقیق کردند. آن‌ها برای محاسبه بار مورد نیاز جهت کمانش ستون از حل معادله مشخصه ستون با در نظر گرفتن شرایط مرزی آن استفاده نمودند. همچنین برای محاسبه رفتار پس کمانش ستون از معادلات دیفرانسیل غیرخطی بر مبنای شرایط فیزیکی مسئله استفاده کردند. سپس معادله دیفرانسیل مربوطه را با استفاده از روش عددی shooting method حل نمودند [۱۰]. اریستیزابل (۲۰۰۶)، اقدام به تحلیل غیرخطی تغییرشکل‌های بزرگ یک تیر و رفتار پس کمانش آن بر مبنای مدل‌سازی به روش تیر تیموشینکو برای یک تیر با اتصالات نیمه صلب و وجود بار در انتهای آن به‌صورت بارمحوری و لنگر خمشی کرد. در این مدل‌سازی نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی به تیر وارد گردید و تأثیر ترکیب این نیروها با یکدیگر به‌صورت وجود نیروی محوری خارج از محور قائم و تکیه‌گاه جانبی

<sup>10</sup> Dario Aristizabal

<sup>11</sup> Phungpaingan

<sup>12</sup> Chucheepsakul



مورد بررسی قرار گرفت. در تحلیل این سازه از تابع پایداری جدیدی که در آن تأثیر تغییرشکل‌های برشی و ترکیب نیروی برشی و نیروی محوری دیده شده بود استفاده شد. روش مذکور یک روش تقریبی بر مبنای نظریه تیموشینکو برای محاسبه تغییرشکل‌های بزرگ یک المان سازه‌ای می‌باشد که قابلیت محاسبه پایداری تیر-ستون تحت نیروهای محوری کششی و یا فشاری و در هر حالت تکیه‌گاه همانند اتصال صلب، نیمه صلب و مفصلی را دارا می‌باشد. نتایج محاسبات آریستیزابل نشان داد، در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی باعث افزایش انحناهای ناشی از برش و تغییر طول محوری می‌گردد. همچنین مقدار بار بحرانی جهت ایجاد کمناش در تیر-ستون را کاهش می‌دهد. در انتها آن‌ها با طرح و تحلیل چهار مثال تأثیر اهمیت در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی بر روی پایداری ستون در فشار و کشش و رفتار دینامیکی الاستیک ساختمان‌ها را نشان دادند [۱۱]. السراف<sup>۱۳</sup> و همکاران در سال‌های ۲۰۰۶ و ۲۰۰۸ به تحلیل پس کمناش الاستیک-پلاستیک و الاستیک غیرخطی بر روی قاب‌های فولادی با عضوهای متصل با ورق، منشوری و غیرمنشوری با استفاده از تئوری تیر-ستون پرداخته‌اند و سپس حالات مختلف پس کمناشی المان‌های تیر-ستون را با مقاطع منشوری و غیرمنشوری مورد مقایسه قرار دادند و حالت بحرانی پس کمناشی مقاطع قاب فولادی را تعیین نمودند [۱۲ و ۱۳]. بسaglia<sup>۱۴</sup> و همکاران (۲۰۱۰)، بر روی رفتار پس از کمناش تیرهای فولادی جدار نازک مهار شده با استفاده از تئوری عمومی (کلی) تیرها، تحقیق نمودند و سپس با استفاده از تحلیل اجزای محدود، جان تیر فولادی جدار نازک در محدوده‌ی مفصل پلاستیک توسط ورقی تقویت شده است. تحلیل اجزای محدود نشان داد که رفتار پس کمناش با حالت تئوری عمومی تیرها یکسان می‌باشد [۱۴]. نووسلک<sup>۱۵</sup> و همکاران (۲۰۱۲)، تحلیل خطی و غیرخطی کمناش و پس کمناشی میله با تأثیر نواقص را ارائه دادند، تحلیل غیرخطی با استفاده از روش ریکس<sup>۱۶</sup> انجام شده است. نتایج نشان داد که رفتار پس کمناشی با تأثیر نواقص در تحلیل غیرخطی با توجه به روش ریکس نسبت به تحلیل خطی بیشتر می‌باشد [۱۵]. بونتارا استنلی<sup>۱۷</sup> و همکاران (۲۰۱۷)، بر روی رفتار پس از کمناش تیرها و قاب‌های صفحه‌ای ساخته شده از مواد درجه‌بندی شده با عملکرد محوری با استفاده از روش اجزای محدود مطالعه نمودند. نتایج به دست آمده با مراجع منتشر شده مقایسه می‌شوند و صحت فرمولاسیون و روش عددی ارائه شده، مورد بررسی قرار می‌گیرد، اثر توزیع مصالح بر روی پاسخ پس کمناشی سازه‌های درجه‌بندی شده با عملکرد محوری مورد تأکید می‌باشد [۱۶].

### ۳- مفاهیم اساسی

#### ۳-۱- کمناش

کمناش یک حالت ناپایداری است. زمانی که یک سازه بلند و باریک تحت فشار قرار بگیرد، برای بارهای کوچک، به ندرت در آن تغییر قابل ملاحظه‌ای در هندسه و ظرفیت باربری رخ می‌دهد ولی در نقطه بار بحرانی سازه به‌طور ناگهانی شاهد یک تغییرشکل بزرگ خواهد بود و شاید توانایی خود را برای تحمل بار از دست بدهد که به این مرحله، مرحله‌ی کمناش گویند. اگر تغییرشکلی که در اثر کمناش در عضو ایجاد می‌شود سبب فروپاشی کامل عضو نشود، آن عضو می‌تواند بار وارده که سبب کمناش آن می‌شود را تحمل نماید. بار بحرانی کمناش برای یک ستون دو سر مفصل به صورت زیر خواهد بود:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1)$$

<sup>13</sup> Al-Sarraf

<sup>14</sup> Basaglia

<sup>15</sup> Novoselac

<sup>16</sup> Riks

<sup>17</sup> BuntaraSthenly



## ۳-۲- پس از کمانش

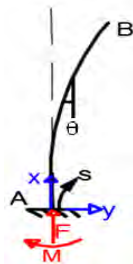
هنگامی که به سازه بیش از بار بحرانی نیرو اعمال شود، سازه وارد محدوده پس از کمانش می‌شود. در این محدوده ممکن است بار تغییر نکند و حتی شروع به کاهش کند اما تغییر شکل رو به افزایش باشد. در برخی موارد سازه به‌طور پیوسته حتی بعد از مقدار معین تغییر شکل به گرفتن بار بیشتر نیز ادامه می‌دهد که این عمل باعث افزایش تغییر شکل‌ها می‌شود و در نهایت منجر به ادامه در چرخه کمانش دوم یعنی مسیر پس از کمانش می‌شود. تحلیل و بررسی رفتار پس از کمانش سازه‌ها عمدتاً در محدوده غیرخطی می‌باشد که اطلاعاتی به‌مراتب فراتر از حالت خطی در اختیار ما قرار می‌دهد. رابطه غیرخطی بار-جابجایی، می‌تواند ناشی از رابطه تنش و کرنش با یک تابع غیرخطی از تنش و یا کرنش و یا حتی زمان باشد و یا ناشی از تغییرات در هندسه با توجه به جابجایی‌های بزرگ، رفتار غیرقابل بازگشت سازه پس از حذف بارهای خارجی، تغییر در شرایط مرزی از قبیل تغییر در سطوح تماس و یا نحوه بارگیری بر روی رفتار سازه باشد. از این‌رو معمولاً سازه نیازمند تحلیل غیرخطی می‌باشد.

## ۳-۳- تئوری الاستیکا

در تئوری الاستیکا هدف بررسی میزان خمیدگی یک میله تحت باری بیش از بار بحرانی کمانش می‌باشد که در آن رفتار سازه از ابتدا تا انتها در محدوده الاستیک باقی می‌ماند [۱۷]. در ابتدای اعمال بار بیش از بار بحرانی به میله، ممکن است هنوز مقدار کمی امکان تغییر شکل در سازه باقی‌مانده باشد. در نتیجه با استفاده از معادلات دیفرانسیل بار بحرانی این مقدار قابل محاسبه می‌باشد. این معادلات بر پایه عبارت تقریبی  $\frac{d^2y}{dx^2}$  مربوط به انحنای کمانش میله قابل محاسبه است. اگر عبارت دقیق محاسبه انحنای در میله استفاده گردد، نتایج تغییر شکل بدون خطا خواهد بود. به شکل منحنی الاستیک به‌دست‌آمده در صورتی که از معادلات دیفرانسیل به‌صورت دقیق استفاده گردد، الاستیکا می‌گویند.

## ۴- صحت سنجی

ابتدا به‌منظور صحت سنجی به تحلیل و بررسی رفتار پس از کمانش ستون طره‌ای با توجه به فرضیات تئوری الاستیکا پرداخته می‌شود. حل معادلات در ستون به روش بسط مک‌لورن انجام‌شده است و سپس به مقایسه آن با روش مرجع [۱۷] پرداخته‌شده است. در ادامه با توجه به اطمینان از مدل‌سازی به تحلیل و بررسی رفتار پس از کمانش قاب مهاربندی نشده جانبی  $L$  شکل پرداخته خواهد شد که تکیه‌گاه پای ستون گیردار و تیر با تکیه‌گاه انتهای غلتکی می‌باشد و اتصال بین تیر و ستون به‌صورت صلب در نظر گرفته شده‌است. معادلات حاکم بر رفتار پس از کمانش قاب را با توجه به فرضیات روش الاستیکا به‌دست‌آورده می‌شود. معادلات به‌دست‌آمده را با استفاده از روش بسط مک‌لورن محاسبه می‌گردد، سپس به محاسبه مجهولات پرداخته‌شده و فرآیند محاسبه با استفاده از نرم‌افزار Mathematica انجام‌شده و با مدل‌سازی قاب در نرم‌افزار Abaqus میزان خطای این روش محاسباتی مشخص می‌گردد. برای این کار با توجه به شکل (۳) و با استفاده از بسط مک‌لورن مسئله قبل را مورد بررسی قرار داده می‌شود.



شکل ۳: وضعیت ستون پس از کمانش.

در ستون مفروض، بر اساس تئوری خمش ارتجاعی می توان نوشت:

$$M = EI \frac{d\theta}{ds} \tag{۲}$$

که در آن  $E$  مدول یانگ،  $I$  ممان اینرسی مقطع ستون،  $\theta$  زاویه دوران ستون نسبت به حالت اولیه،  $S$  مختصات منحنی الخط مقاطع ستون و  $M$  لنگر خمشی ستون در نقطه‌ای به فاصله  $S$  می‌باشد. همچنین با استفاده از بسط مک لورن رابطه  $\theta$  بر حسب  $S$  برای ستون را می‌توان به شیوه زیر نوشت:

$$\theta(s) = \theta(0) + \frac{\theta'(0)}{1!} \cdot s + \frac{\theta''(0)}{2!} \cdot s^2 + \dots \tag{۳}$$

در  $S = 0$  با توجه به شکل (۳) ملاحظه می‌شود که  $\theta = 0$  و در ادامه برای کامل کردن جملات سری بسط مک لورن مشتقات مرتبه بالاتر محاسبه می‌شود. با در نظر گرفتن روابط مثلثاتی در شکل (۳) جهت محاسبه تغییر مکان میله در راستای  $X$  و  $Y$  می‌توان نوشت:

$$X(s) = \int_0^s \sin \theta \cdot ds = \int_0^s \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) ds \tag{۴}$$

$$Y(s) = \int_0^s 1 - \cos \theta \cdot ds = \int_0^s \left( 1 - \left( 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) \right) ds \tag{۵}$$

در رابطه (۳) برای سری بسط مک لورن هر چه تعداد جملات بیشتر باشد دقت جوابهای به دست آمده بیشتر خواهد بود و همچنین هر چه تعداد جملات بیشتر باشد جوابیه دست آمده نیز دقت بالاتری خواهند داشت در این تحقیق، تعداد جملات در بسط مک لورن ۱۳ جمله در نظر گرفته شده است و نمونه عددی حل شده و مقایسه آن با مرجع [۱۷] را می‌توان در جدول (۲) مشاهده نمود. همان طور که مشاهده میشود، خطای روش الاستیکا با مرجع در زوایای مختلف کمتر از ۱۰ درصد میباشد.

جدول ۲: بررسی رفتار پس کمانش ستون طره ای به روش بسط مک‌لورن با مرجع [۱۷].

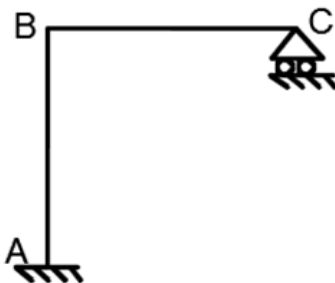
$\alpha$	$\frac{P}{P_{cr}}$			$\frac{X_a}{l}$			$\frac{Y_a}{l}$		
	مرجع [۱۷]	تحقیق حاضر	درصد خطا	مرجع [۱۷]	تحقیق حاضر	درصد خطا	مرجع [۱۷]	تحقیق حاضر	درصد خطا
۲۰	۱,۰۱۵	۱,۰۰۷	۰,۷	۰,۹۷	۰,۹۶۹	۰,۱	۰,۲۲	۰,۲۱۹	۰,۴
۴۰	۱,۰۶۳	۱,۰۲۹	۳,۱	۰,۸۸۱	۰,۸۷۹	۰,۲	۰,۴۲۲	۰,۴۱۸	۰,۹
۶۰	۱,۱۵۲	۱,۰۵۴	۸,۵	۰,۷۴۱	۰,۷۳۴	۰,۹	۰,۵۹۳	۰,۵۷۷	۲,۶





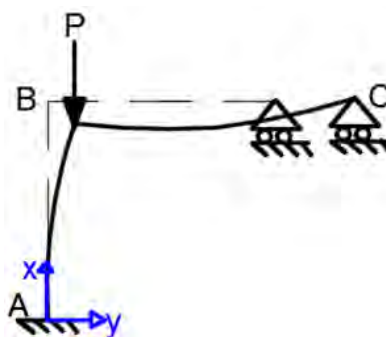
### ۵- تحلیل و بررسی رفتار پس از کمانش در قاب L شکل

در این بخش، معادلات حاکم بر رفتار قاب مهاربندی نشده به دست می‌آید. قاب موردنظر دارای دو عضو به صورت L شکل می‌باشد. تکیه‌گاه در ستون به صورت گیردار و در تیر به صورت غلتکی و اتصال بین تیر و ستون به صورت صلب در نظر گرفته شده است. مقاطع عرضی در تیر و ستون به صورت متقارن الگوسازی شده است. اعضای قاب به شکل منشوری و مصالح تشکیل‌دهنده‌ی آن از مواد الاستیک خطی و همگن می‌باشد. یک‌بار متمرکز در محل اتصال تیر به ستون به صورت قائم به سازه اعمال می‌شود که در طول مسیر تغییرشکل‌های بزرگ همچنان به صورت قائم در نظر گرفته می‌شود. این قاب، در شکل (۴) نمایش داده می‌شود.



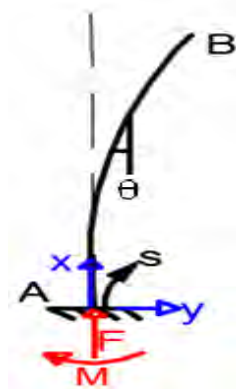
شکل ۴: قاب دو عضوی با شرایط تکیه‌گاهی گیردار و غلتکی.

با استفاده از رابطه تعادل و فرضیات تئوری الاستیکا تابع تغییرشکل تیر و ستون را به صورت جداگانه می‌نویسیم، سپس با نوشتن معادلات سازگاری برای قاب موردنظر معادلات حاکم بر رفتار قاب به دست می‌آید. در این مسئله با توجه به فرضیات موجود برای تئوری الاستیکا طول اعضا در حین کمانش ثابت است. این بدان معناست که اثرات برش و نیز تغییر طول محوری به دلیل ناچیز بودن صفر در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات حاکم بر قاب از روش بسط مک‌لورن استفاده می‌کنیم. قاب موردنظر بعد از اعمال بار P که باری بیش از بار کمانش قاب می‌باشد به‌مانند شکل (۵) تغییرشکل می‌دهد.



شکل ۵: قاب بعد از اعمال بار در حالت کمانش

برای سهولت در کار ابتدا ستون و در ادامه تیر را جداگانه تحلیل و سپس با نوشتن معادلات سازگاری، معادلات حاکم بر قاب به دست می‌آید. اینک، ستون را از سازه اصلی جدا کرده و در شکل (۶) نمایش داده می‌شود.



شکل ۶: ستون جداشده از قاب.

رابطه تعادل برای ستون جداشده نوشته می‌شود.

$$\sum M = 0$$

(۶)

با لنگرگیری در هر نقطه روی ستون با توجه به رابطه (۷) داریم:

$$M = M_A - F \cdot Y$$

(۷)

که در این رابطه  $M$  لنگر خمشی داخلی در مقطعی به فاصله  $s$  در طول ستون و برحسب  $s$ ،  $S$  مختصات منحنی الخط مقطع ستون،  $M_A$  لنگر در تکیه‌گاه گیردار،  $F$  واکنش تکیه‌گاهی تکیه‌گاه گیردار و  $Y$  نیز میزان جابجایی هر نقطه از ستون در راستای  $Y$  نسبت به حالت اولیه می‌باشد. بر پایه تئوری خمش ارتجاعی، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$M = EI_C \frac{d\theta_c}{ds}$$

(۸)

که در آن  $E$ : مدول یانگ،  $I_C$ : ممان اینرسی ستون و  $\theta_c$ : زاویه دوران هر نقطه از ستون نسبت به حالت اولیه می‌باشد. با جایگذاری مقدار  $M$  از معادله (۷) در معادله (۸) می‌توان نوشت:

$$EI_C \frac{d\theta_c}{ds} = M_A - F \cdot Y$$

(۹)

با تقسیم طرفین بر  $EI_C$  می‌توان این‌گونه نوشت:

$$\frac{d\theta_c}{ds} = \frac{M_A}{EI_C} - \left(\frac{F}{EI_C} \cdot Y\right)$$

(۱۰)

با فرض اینکه  $m = \frac{M_A}{EI_C}$  و  $f = \frac{F}{EI_C}$  داریم:

$$\frac{d\theta_c}{ds} = m - f \cdot Y$$

(۱۱)

می‌توان بسط مک لورن را برای ستون در  $s = 0$  به شکل زیر نوشت:

$$\theta_c(s) = \theta_c(0) + \frac{\theta'_c(0)}{1!} \times s + \frac{\theta''_c(0)}{2!} \times s^2 + \dots$$

(۱۲)

برای کامل کردن جملات بسط مک لورن مشتقات  $\theta_c$  برحسب  $s$  را موردبررسی قرار می‌دهیم. با توجه به شکل (۵) در  $s = 0$  می‌توان مشاهده کرد:

$$\theta_c(s = 0) = 0$$

(۱۳)

با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته‌شده در  $s = 0$ ،  $x, y = 0$ ، پس رابطه (۱۰) را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\frac{d\theta_c}{ds} = \frac{M_A}{EI_C}$$

(۱۴)



رابطه (۱۴) با در نظر گرفتن فرض  $m = \frac{MA}{EI_c}$  به شکل زیر درمی آید.

$$\theta'_c(s=0) = m \quad (15)$$

با توجه به رابطه (۱۵) مشتق مرتبه دوم  $\theta_c$  برحسب  $S$  استخراج می گردد.

$$EI_c \frac{d^2\theta_c}{ds^2} = -F \cdot \frac{dy}{ds} \quad (16)$$

باتوجه به شکل (۶) داریم:

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta_c \quad ; \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta_c \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در (۱۶) می توان نوشت:

$$EI_c \frac{d^2\theta_c}{ds^2} = -F \cdot \sin \theta_c \quad (18)$$

در  $S = 0$  مشتق مرتبه دوم به صورت زیر درمی آید.

$$\theta''_c(s=0) = -f \cdot \sin \theta_c \quad (19)$$

بر اساس شکل (۶)، در  $S = 0$  دوران صفر ( $\theta_c = 0$ ) است در نتیجه،  $\sin \theta_c = 0$  می باشد پس:

$$\theta''_c(s=0) = 0 \quad (20)$$

با داشتن رابطه (۱۹) و (۲۰) مشتق مرتبه سوم حساب می شود.

$$EI_c \frac{d^3\theta_c}{ds^3} = -F \cdot \cos \theta_c \cdot \frac{d\theta_c}{ds} \quad (21)$$

در  $S = 0$  و با توجه به رابطه (۱۸) مشتق مرتبه سوم به صورت زیر درمی آید.

$$\theta'''_c(s=0) = -f \cdot m \quad (22)$$

مشتق گیری را برای مرتبه چهارم با توجه به رابطه (۲۱) ادامه داده می شود.

$$EI_c \frac{d^4\theta_c}{ds^4} = -F \cdot \left( -\sin \theta_c \cdot \left(\frac{d\theta_c}{ds}\right)^2 + \cos \theta_c \cdot \frac{d^2\theta_c}{ds^2} \right) \quad (23)$$

در  $S = 0$  مشاهده می شود که ( $\theta_c = 0$ ) در نتیجه  $\sin \theta_c = 0$  و با توجه به رابطه (۲۰) مشتق مرتبه چهارم به صورت زیر

درمی آید.

$$\theta''''_c(s=0) = 0 \quad (24)$$

با داشتن رابطه (۲۳) مشتق مرتبه پنجم  $\theta$  برحسب  $S$  نوشته می شود.

$$EI_c \frac{d^5\theta_c}{ds^5} = -F \cdot \left( \cos \theta_c \cdot \left(\frac{d\theta_c}{ds}\right)^3 + \sin \theta_c \cdot 2 \cdot \frac{d\theta_c}{ds} \cdot \frac{d^2\theta_c}{ds^2} + \sin \theta_c \cdot \frac{d\theta_c}{ds} \cdot \frac{d^2\theta_c}{ds^2} - \cos \theta_c \cdot \frac{d^3\theta_c}{ds^3} \right) \quad (25)$$

در  $S = 0$  مشاهده می شود که ( $\theta_c = 0$ ) در نتیجه  $\sin \theta_c = 0$  و با توجه به رابطه های (۱۵)، (۲۰) و (۲۲) مشتق مرتبه

پنجم به صورت زیر درمی آید.

$$\theta''''''_c(s=0) = f \cdot m^3 + f^2 \cdot m \quad (26)$$

این کار را برای مشتقات بالاتر ادامه داده می شود و با قرار دادن جملات در بسط مک لورن در معادله (۱۲)، معادله  $\theta_c$  در  $S = 0$

برحسب  $S$  به دست می آید:

$$\theta_c(s) = m \cdot s + \frac{-f \cdot m}{3!} \times s^3 + \frac{f \cdot m^3 + f^2 \cdot m}{5!} \times s^5 + \dots \quad (27)$$

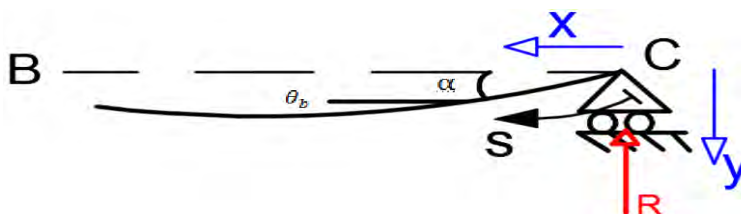
رابطه جابجایی افقی و قائم در هر نقطه روی ستون را با توجه به شکل (۶) می توان به صورت زیر نوشت:



$$\Delta_{cX} = \int_0^s \cos\theta_c \cdot ds \approx \int_0^s \left(1 - \frac{\theta_c^2}{2!} + \frac{\theta_c^4}{4!} - \frac{\theta_c^6}{6!}\right) ds \quad (28)$$

$$\Delta_{cY} = \int_0^s \sin\theta_c \cdot ds \approx \int_0^s \left(\theta_c - \frac{\theta_c^3}{3!} + \frac{\theta_c^5}{5!}\right) ds \quad (29)$$

در روابط فوق  $\Delta_{cY}$  جابجایی هر نقطه از ستون در راستای  $Y$  و  $\Delta_{cX}$  جابجایی هر نقطه از ستون در راستای  $X$  می‌باشد. در ادامه با جدا کردن تیر از قاب به نوشتن معادلات آن پرداخته می‌شود. در شکل (۷) تیر از قاب جدا شده ارائه شده است.



شکل ۷: تیر جدا شده از قاب

برای تیر با استفاده از رابطه تعادل داریم:

$$\sum M = 0 \quad (30)$$

با لنگرگیری حول هر نقطه از تیر با استفاده از رابطه (۳۰) می‌توان نوشت:

$$M = R \cdot x \quad (31)$$

که در رابطه (۱۱)،  $M$  لنگر در طول تیر بر حسب  $S$ ،  $S$  مختصات منحنی الخط مقاطع ستون،  $R$  واکنش تکیه‌گاهی تکیه‌گاه غلتکی و  $x$  نیز فاصله تکیه‌گاه غلتکی از محل لنگرگیری می‌باشد. بر پایه تئوری خمش ارتجاعی می‌توان رابطه زیر را برای تیر این‌گونه بیان کرد:

$$M = EI_b \frac{d\theta_b}{ds} \quad (32)$$

که در آن  $I_b$ : ممان اینرسی تیر و  $\theta_b$ : زاویه دوران تیر نسبت به حالت اولیه می‌باشد. با جایگذاری مقدار  $M$  از معادله (۳۱) در معادله (۳۲) می‌توان نوشت:

$$EI_b \frac{d\theta_b}{ds} = R \cdot x \quad (33)$$

با تقسیم طرفین بر  $EI_b$  می‌توان رابطه (۳۳) را بدین شکل نوشت:

$$\frac{d\theta_b}{ds} = \frac{R}{EI_b} \cdot x \quad (34)$$

با فرض اینکه

$$r = \frac{R}{EI_b} \quad (35)$$

رابطه (۳۴) به شکل رابطه (۳۶) درمی‌آید.

$$\frac{d\theta_b}{ds} = r \cdot x \quad (36)$$

می‌توان بسط مک لورن را برای تیر در  $s = 0$  به شکل زیر نوشت:



$$\theta_b(s) = \theta_b(0) + \frac{\theta'_b(0)}{1!} \times s + \frac{\theta''_b(0)}{2!} \times s^2 + \dots \quad (37)$$

با توجه به شکل (۷) در  $s = 0$  می توان مشاهده کرد.

$$\theta_b(s = 0) = \alpha \quad (38)$$

با گرفتن مشتقات مرتبه بالاتر  $\theta_b$  برحسب  $s$  از معادله (۳۶) می توان جملات بسط مک لورن را کامل کرد. در اینجا مشتق چند جمله آورده می شود. با توجه به اینکه در  $s = 0$  همواره  $x, y = 0$  می باشد داریم:

$$\frac{d\theta_b}{ds} = r \cdot 0 \quad (39)$$

می توان رابطه (۳۹) را به شکل زیر بیان کرد:

$$\theta'_b(s = 0) = 0 \quad (40)$$

بار دیگر از رابطه (۳۶) مشتق گیری می شود و مشتق مرتبه دوم  $\theta_b$  برحسب  $s$  مشخص می گردد.

$$EI_b \frac{d^2\theta_b}{ds^2} = R \cdot \frac{dx}{ds} \quad (41)$$

با توجه به شکل (۷) داریم:

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta_b \quad ; \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta_b \quad (42)$$

با جایگذاری معادله (۴۲) در (۴۱) می توان نوشت:

$$EI_b \frac{d^2\theta_b}{ds^2} = R \cdot \cos \theta_b \quad (43)$$

با تقسیم طرفین بر  $EI_b$  و فرض رابطه (۳۵) معادله (۴۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d^2\theta_b}{ds^2} = r \cdot \cos \theta_b \quad (44)$$

در  $s = 0$  مشتق مرتبه دوم به صورت زیر درمی آید.

$$\theta''_b(s = 0) = r \cdot \cos \alpha \quad (45)$$

برای گرفتن مشتق سوم  $\theta_b$  برحسب  $s$  با استفاده از رابطه (۴۵) می توان نوشت:

$$EI_b \frac{d^3\theta_b}{ds^3} = -R \cdot \sin \theta_b \frac{d\theta_b}{ds} \quad (46)$$

با تقسیم طرفین بر  $EI_b$  و فرض رابطه (۳۹) معادله (۴۶) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d^3\theta_b}{ds^3} = -r \cdot \sin \theta_b \frac{d\theta_b}{ds} \quad (47)$$

با جایگذاری رابطه (۳۹) در رابطه (۴۷) و در  $s = 0$  مشتق مرتبه سوم به صورت زیر درمی آید.

$$\theta'''_b(s = 0) = 0 \quad (48)$$

مشتق چهارم  $\theta_b$  برحسب  $s$  با استفاده از رابطه (۴۸) می توان نوشت:

$$EI_b \frac{d^4\theta_b}{ds^4} = -R \cdot \cos \theta_b \frac{d\theta_b}{ds} - R \cdot \sin \theta_b \cdot \frac{d^2\theta_b}{ds^2} \quad (49)$$

با تقسیم طرفین بر  $EI_b$  و فرض رابطه (۳۵) معادله (۴۹) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d^4\theta_b}{ds^4} = -r \cdot \cos \theta_b \frac{d\theta_b}{ds} - r \cdot \sin \theta_b \cdot \frac{d^2\theta_b}{ds^2} \quad (50)$$

با جایگذاری رابطه های (۳۹) و (۴۸) در  $s = 0$  مشتق مرتبه چهارم به صورت زیر درمی آید.

$$\theta''''_b(s = 0) = r^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (51)$$

با قرار دادن جملات بسط مک لورن در معادله (۳۷)، معادله  $\theta_b$  در  $s = 0$  برحسب  $s$  به دست می آید:



$$\theta_b(s) = \alpha + \frac{r \cdot \cos \alpha}{2!} \cdot s^2 - \frac{r^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{4!} \times s^4 + \dots \quad (52)$$

رابطه جابجایی افقی و قائم در هر نقطه روی تیر را با توجه به شکل (۷) می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\Delta_{bX} = \int_0^s \cos \theta_b \cdot ds \approx \int_0^s \left(1 - \frac{\theta_b^2}{2!} + \frac{\theta_b^4}{4!} - \frac{\theta_b^6}{6!}\right) ds \quad (53)$$

$$\Delta_{bY} = \int_0^s \sin \theta_b \cdot ds \approx \int_0^s \left(\theta_b - \frac{\theta_b^3}{3!} + \frac{\theta_b^5}{5!}\right) ds \quad (54)$$

در روابط (۵۳) و (۵۴)  $\Delta_{bY}$  جابجایی هر نقطه از تیر در راستای  $Y$  و  $\Delta_{bX}$  جابجایی هر نقطه از تیر در راستای  $X$  می‌باشد. برای به دست آوردن  $\theta_b$  و  $\theta_c$  بر حسب  $S$  همان‌طور که ملاحظه می‌شود چهار مجهول وجود دارد که این چهار مجهول عبارت‌اند از  $\alpha$ ،  $r$ ،  $f$ ،  $m$ . بر همین اساس با نوشتن معادلات سازگاری برای تیر و ستون، سه معادله سازگاری (۵۵)، (۵۶) و (۵۷) را می‌توان نوشت و با انتخاب مقادیر مختلف برای  $\alpha$  که شیب در تکیه‌گاه غلتکی می‌باشد بقیه مجهولات را به دست آورد.

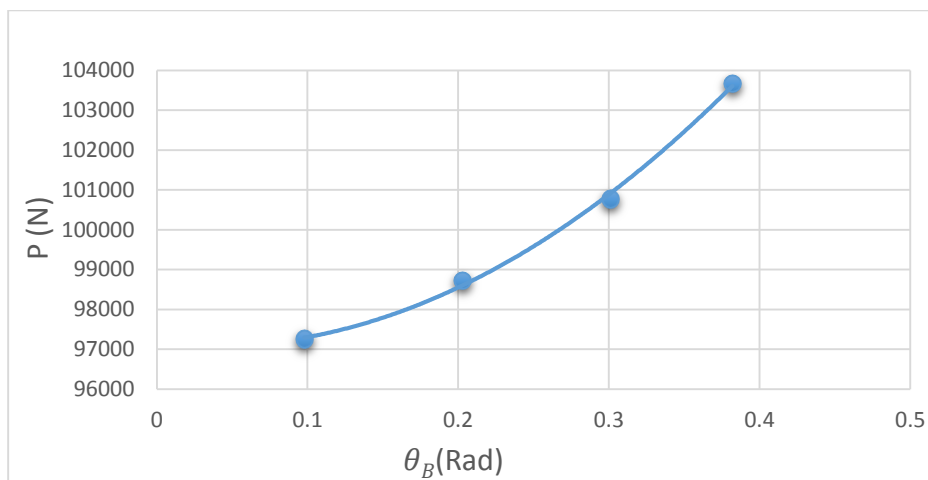
$$\theta_b(s = L_b) = \theta_c(s = L_c) \quad (55)$$

$$M_B(s = L_b) = -M_C(s = L_c) \quad (56)$$

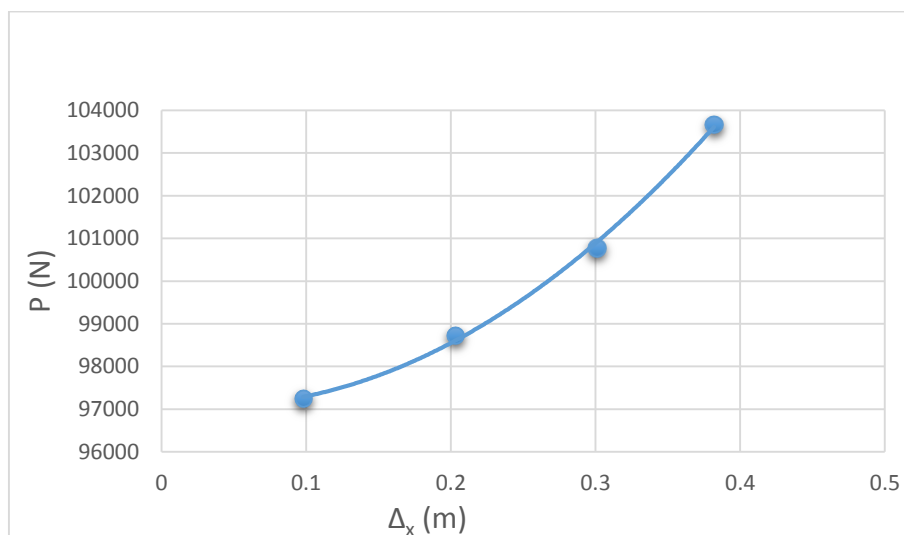
$$\Delta_{bY}(s = L_b) = -\Delta_{cX}(s = L_c) \quad (57)$$

## ۶- تحلیل عددی

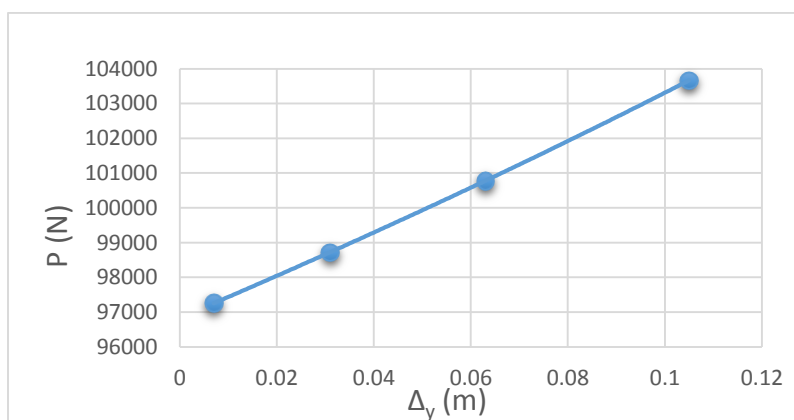
در تحقیق حاضر طول تیر و ستون برابر با یک متر در نظر گرفته می‌شود. مقطع تیر و ستون به شکل دایره‌ای به قطر ۳/۵ سانتی‌متر فرض شده است که با داشتن مقطع در تیر و ستون، ممان اینرسی مقاطع محاسبه می‌گردند. مدول یانگ  $2.1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}$  در نظر گرفته شده است و سختی خمشی اعضای قاب را نیز می‌توان محاسبه کرد که برای مقطع موردنظر با توجه به مشخصات ذکر شده برابر با  $15469 \frac{N}{m^2}$  به دست می‌آید. حال با قرار دادن  $\alpha$  که دوران در ابتدای تیر می‌باشد، در معادلات سازگاری به دست آمده برای تیر و ستون می‌توان دیگر پارامترهای مجهول معادلات سازگاری را به دست آورد. مقادیر  $r$ ،  $f$ ،  $m$  که دیگر پارامترهای مجهول در معادلات سازگاری می‌باشند را با استفاده از سه معادله و سه مجهول به دست آورده می‌شود. با مشخص شدن پارامترهای مجهول معادلات می‌توان مقادیر  $\theta_B$  و  $p$  را نیز محاسبه کرد. برای حل معادلات از نرم‌افزار Mathematica استفاده شده است. در ادامه نمودار تغییرات  $P$  را به ازای تغییرات  $\theta_B$ ،  $\gamma_B$ ،  $\chi_B$  در شکل‌های (۸) الی (۱۰) نمایش داده می‌شود.



شکل ۸: نمودار تغییرات P به ازای تغییرات  $\theta_B$



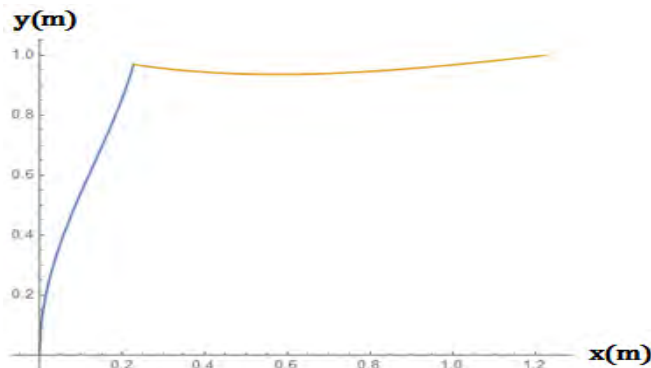
شکل ۹: نمودار تغییرات P به ازای تغییرات  $\Delta_x$



شکل ۱۰: نمودار تغییرات P به ازای تغییرات  $\Delta_y$



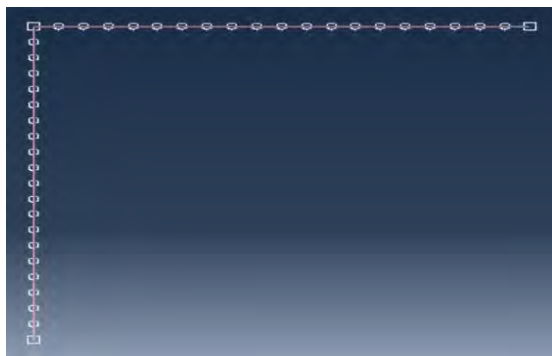
در شکل (۱۱)، تغییرشکل قاب پس از کمانش تحت  $\alpha = 0.1472$  با استفاده از نرم افزار ممتیکا ترسیم شده است.



شکل ۱۱: شکل شماتیک قاب پس از کمانش تحت  $\alpha = 0.1472$  با استفاده از ممتیکا

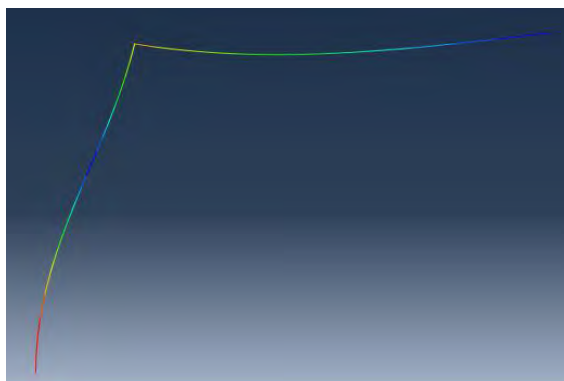
#### ۶-۱-مدلسازی قاب در نرم افزار آباکوس

در ابتدا قاب موردنظر با همان ابعاد که در قسمت قبل مورد تحلیل و بررسی قرار داده شد، مدل سازی می شود به این صورت که قاب L شکل باید در نظر گرفته شود. سپس رفتار مصالح الاستیک با توجه به تحلیل های قبلی برای قاب وارد می شود که مدول یانگ  $2.1 * 10^{11} \frac{N}{m^2}$  و ضریب پواسون  $0.3$  در نظر گرفته می شود. مقطع به صورت دایره ای با قطر  $3/5$  سانتی متر برای سازه مدل می شود. در ادامه روند مدل سازی پس از اختصاص مقطع و مشخصات تعریف شده برای مدل، در مرحله ی تعیین نوع تحلیل، با توجه به فرضیات تئوری الاستیکا تحلیل استاتیکی انتخاب می گردد و با فعال کردن اثرات غیرخطی ناشی از تغییرشکل بزرگ، نوع تحلیل برای آباکوس مشخص می گردد.



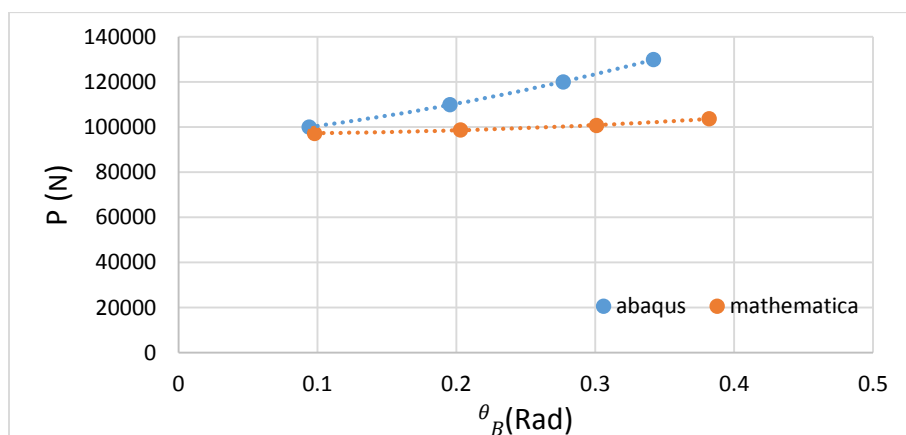
شکل ۱۲: شکل قاب L شکل مش بندی شده.



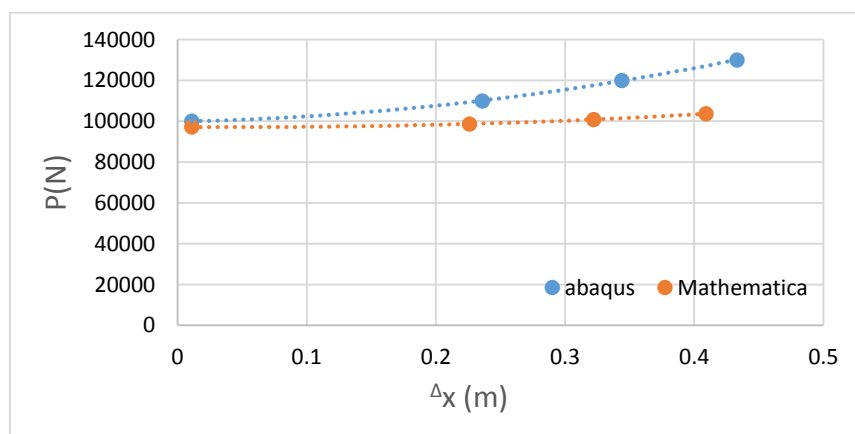


شکل ۱۳: شکل شماتیک قاب پس از کمانش تحت  $P=110000$  با استفاده از آباکوس.

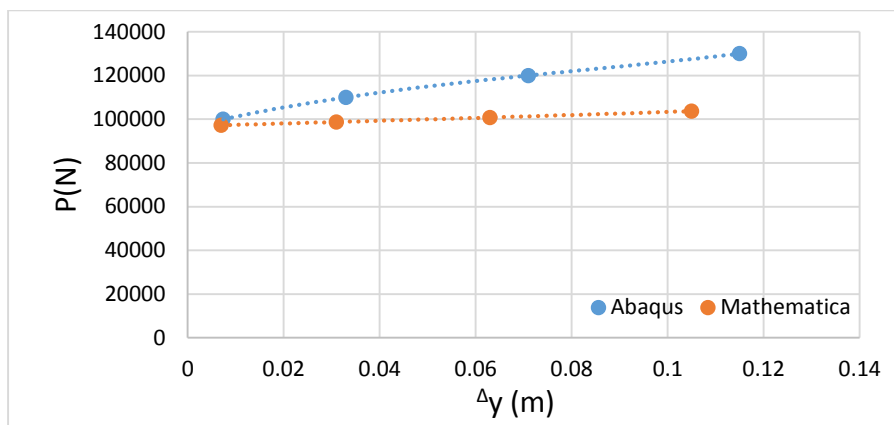
در این قسمت برای نمایش بهتر نحوه تغییرات  $P$  به ازای تغییرات  $\theta_B, x_B, y_B$  در پاسخهای به دست آمده از آباکوس و بسط مکملون آنها را در شکل‌های (۱۴) الی (۱۶) به صورت نمودار نمایش داده شده است.



شکل ۱۴: نمودار تغییرات  $P$  به ازای تغییرات  $\theta_B$ .



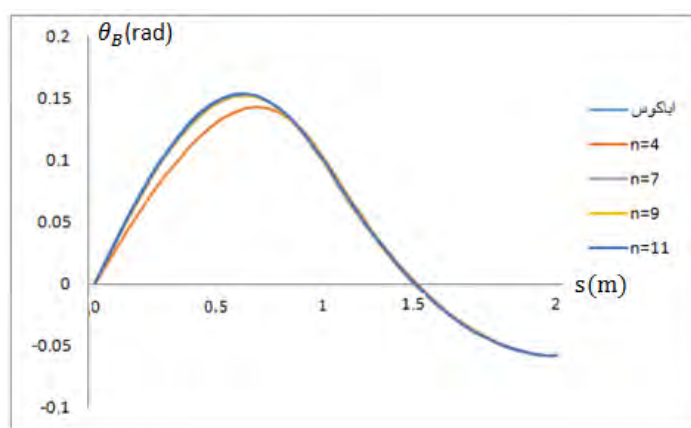
شکل ۱۵: نمودار تغییرات  $P$  به ازای تغییرات  $\Delta x$ .



شکل ۱۶: نمودار تغییرات P به ازای تغییرات  $\Delta y$

### ۷- نتیجه گیری

در این تحقیق، از روش الاستیکا برای حصول نتایج نزدیک به دقیق رفتار پس از کمانش قاب تحت نگره‌ی تغییرشکل‌های بزرگ، استفاده گردید. شایان ذکر است در این پژوهش، نرم‌افزار متمتیکا به‌عنوان پردازشگر دستگاه معادلات غیرخطی مورد استفاده قرار گرفت. بررسی نتایج حاصل شده از روش الاستیکا با سایر نتایج موجود در منابع نشان از دقت بالای این روش دارد. با توجه به نمودارها و جداول مزبور به مقایسه روش بسط مک‌لورن و مدل‌سازی در آباکوس پرداخته شد و با همگرا شدن جواب‌ها به جواب اصلی می‌توان به صحت و دقت در روش استفاده از بسط مک‌لورن پی برد. در شکل (۱۷) نمودار همگرایی تغییرات  $\theta$  برحسب رادیان در طول قاب از پای ستون تا تکیه‌گاه مفصلی نشان داده شده است. با توجه به تعداد مش بندی در آباکوس تعداد تقسیمات در طول قاب به فاصله‌های ۵ سانتی‌متری تقسیم شده است و با نتایج حاصل از متمتیکا به ازای تعداد جملات مختلف بررسی شده است.



شکل ۱۷: نمودار همگرایی پاسخ‌های متمتیکا با آباکوس در  $\alpha = 0.0584$



همانطور که از مشاهده نمودار (۱۷) بر می آید، نتایج تحقیق حاضر که با استفاده از برنامه ممتیکا حل شده است و نتایج مدل سازی آباکوس همگرایی بسیار خوبی دارند و برای دستیابی به پاسخهای دقیق تر و نزدیک تر به آباکوس نیاز به سیستمهای فوق پیشرفتهی کامپیوتری می باشد تا به ازای تعداد جملات بیشتر سری مک لورن معادله حل شود.

با توجه به نمودارهای نشان داده شده در شکل های (۱۴ تا ۱۶) می توان این گونه بیان کرد که علت تفاوت در جوابهای آباکوس و روش بسط مک لورن می تواند به دلایل زیر باشد:

۱- آباکوس روش عددی می باشد و با تغییرات در مش بندی می توان دقت جوابها را نیز افزایش داد.

۲- با افزایش تعداد بسط مک لورن می توان اختلاف بین جوابها را کاهش داد.

#### ۸- مراجع

- [1]- Lui, E. and Chen, W.F., 1987, **Structural stability, theory and implementation**. Elsevier.
- [2]- Gurfinkel, G. and Robinson, A.R., 1965, **Buckling of elastically restrained columns**, **Journal of the structural Division**, 91(6), 159-184.
- [3]- Torkamani, M. A., Sonmez, M. and Cao, J., 1997, **Second-order elastic plane-frame analysis using finite-element method**, **Journal of structural Engineering**, 123(9), 1225-1235. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1997\)123:9\(1225\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1997)123:9(1225))
- [4]- Smith-pardo, J. P. and Aristiza`bal-Ochoa, J. D., 1999, **Buckling reversals of axially restrained imperfect beam-column**, **Journal of engineering mechanics**, 125(4), 401-409. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:4\(401\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:4(401))
- [5]- Hori, A. and Sasagawa, A., 2000, **Large deformation of inelastic large space frame. I: Analysis**, **Journal of structural Engineering**, 126(5), 580-588. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2000\)126:5\(580\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2000)126:5(580))
- [6]- Hori, A. and Sasagawa, A., 2000, **Large deformation of inelastic large space frame. II: Analysis**, **Journal of structural Engineering**, 126(5), 589-595. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2000\)126:5\(589\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2000)126:5(589))
- [7]- Khamalchi, A., Elbakkali, L. and Limam, A., 2001, **postbuckling of elastic beams considering higher order strain terms**, **Journal of engineering mechanics**, 127(4), 92-96. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2001\)127:4\(372\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2001)127:4(372))
- [8]- Aristizabal-Ochoa, J. D., 2001, **Nonlinear large deflection – small strain elastic analysis of beam –column with semirigid connections**, **Journal of structural Engineering**, 127(1), 92-96. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2001\)127:1\(92\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:1(92))
- [9]- Aristiza`bal-Ochoa, J. D., 2004, **Large deflection stability of slender beam- columns with semirigid conection: Elastica approach**, **Journal of engineering mechanics**, 130(3), 274-282. [https://doi.org/10.1061/ASCE0733-9399\(2004\)130:3\(274\)](https://doi.org/10.1061/ASCE0733-9399(2004)130:3(274))
- [10]- Phungpaingam, B. and Chucheepsakul, S., 2005, **Post-buckling of an elastic column with various rotational end restraints**, **International Journal of Structural stability and Dynamics**, 5(1), 113-123. <https://doi.org/10.1142/S0219455405001453>



- [11]- Aristizabal-Ochoa, J. D., 2007, **Large deflection and postbuckling behavior of Timoshenko beam- columns with semi-rigid connections including shear and axial effects**, Engineering structures, 29(6), 991-1003. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.07.012>
- [12]- Al-Sarraf, S. Z., Al-Khafaji, J., Ahmad, A. S., 2006, **Nonlinear Elastic Analysis and Post-Buckling of Steel Frames with Non-Prismatic Gusseted Plate Members**, Journal of Engineering and Development, 10(3), 1-17.
- [13]- Al-Sarraf, S. Z., Al-Khafaji, J., Ahmad, A. S., 2008, **Nonlinear Elastic-plastic Analysis and Post-Buckling of Steel Frames with Non-Prismatic Gusseted Plate Members**, Al-Qadisiya Journal For Engineering Sciences, 1(2), 225-244.
- [14]- Basaglia, C., Camotim, D., Silvestre, N., 2010, **Post-Buckling Behavior of Restrained Thin-Walled Steel Beams Using Generalized Beam Theory (GBT)**, 11th Pan-American Congress of Applied Mechanics, Foz do Iguaçu, PR, Brazil.
- [15]- Novoselac, S., Ergic, T. and Balicevic, P., 2012, **Linear and Nonlinear Buckling and Post Buckling Analysis of a Bar with the Influence of Imperfection**, Technical Gazette, 19 (3), 695-701.
- [16]- Sthenly Gan, B. Thanh HuonG, T. Dinh Kien, N., 2017, **Post-buckling behavior of axially FGM planar beams and frams**. Procedia Engineering, 171, 147-158. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.01.321>
- [17]- Timoshenko, S. and Gere, J. M., 1961, **Theory of elasticity stability**. McGraw.