

## حل معکوس مسئله ۱-میانه با استفاده از آلفا برش فازی

منا خداقلی<sup>۱</sup>، اردشیر دولتی<sup>۲\*</sup>، علی حسین زاده<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران.

<sup>۲</sup>گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه شاهد، تهران، ایران.

### چکیده

مسائل مکان‌یابی تسهیلات، یکی از مهم‌ترین مسائل در حوزه تحقیق در عملیات و علم مدیریت به شمار می‌رود. هدف از حل این نوع مسائل، تعیین مکان مناسبی در بین نقاط تقاضا، جهت استقرار تسهیلات و مراکز خدمات رسانی است، به گونه‌ای که این مراکز حداکثر بازده و خدمات‌رسانی را با کمترین هزینه به سایر مشتریان متقاضی داشته باشند. از کاربردهای معروف این مسئله می‌توان به مکان‌یابی انبارها، بیمارستان‌ها، ایستگاه‌های امداد و نجات، تأسیسات نظامی، شعب بانک و ... اشاره کرد؛ اما در برخی از موارد، تسهیلات به صورت غیر بهینه مکان‌یابی شده‌اند و به دلایل مختلفی امکان جابه‌جایی آن‌ها وجود ندارد، در این صورت مسائل مکان‌یابی معکوس مطرح می‌شوند. یکی از مهم‌ترین این نوع مسائل، معکوس مسئله ۱-میانه می‌باشد. با توجه به اینکه در دنیای واقعی بسیاری از پارامترهای مسئله مشخص و دقیق نیستند، انگیزه‌ای شد تا در این مقاله معکوس مسئله ۱-میانه فازی را بررسی کنیم. بر اساس مفهوم آلفا-برش برای اعداد فازی مثلثی، ابتدا یک مدل برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی به صورت بازه‌ای برای این مسئله در هر سطح اطمینان  $\alpha \in [0,1]$  به دست می‌آوریم و سپس یک روش حل بر اساس حساب بازه‌ای و معرفی یک تابع رتبه ارائه می‌کنیم. در این صورت، بر اساس این روش، حل معکوس مسئله ۱-میانه با پارامترهای فازی، با حل کلاسیک این مسئله متناظر خواهد بود. در پایان نیز به منظور نشان دادن کارایی روش حل پیشنهادی، یک مثال عددی ارائه کرده‌ایم.

**واژه‌های کلیدی:** معکوس مسئله ۱-میانه، زبردخت ماکسیمال، معیار بهینگی، عدد فازی مثلثی، برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی، آلفا برش، حساب بازه‌ای.

پذیرش: ۱۳۹۷/۳/۲۹

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۶

### ۱- مقدمه

مسائل مکان‌یابی و تحلیل موقعیت تأسیسات و تسهیلات، از مهم‌ترین مسائل حوزه تحقیق در عملیات و علم مدیریت می‌باشد که اخیراً مورد توجه محققین فراوانی قرار گرفته است. این مسئله در زمینه‌ی استقرار تسهیلات در بخش درمانی، اداری، نظامی، آموزشی، برنامه‌ریزی شهری، ایستگاه‌های آتش‌نشانی، استقرار شعب بانک و ... دارای کاربردهای بسیاری است. هدف از حل این نوع مسائل، تعیین مکان مناسبی جهت احداث مراکز خدمات‌رسانی و استقرار تسهیلات در بین نقاط تقاضا می‌باشد، به گونه‌ای که کار آبی این مراکز تا حد امکان پیشینه گردد و مشتریان بتوانند به سهولت و با کمترین هزینه به این تسهیلات دسترسی داشته باشند. در مسائل مکان‌یابی کلاسیک، مکان‌های بهینه جهت استقرار تسهیلات جدید، با توجه به توابع هدف مشخص می‌شود. هرکدام از این توابع هدف دارای مزایا و معایبی بوده و برای کاربردهای خاصی در نظر

\* Corresponding author (E-mail: dolati@shahed.ac.ir)



گرفته شده‌اند. از معروف‌ترین توابع هدف مکان‌یابی، می‌توان به مسائل ۱-میانه (گلوئی، ۲۰۱۰)، ۱-مرکز (نگوین و سپاسیان، ۲۰۱۶)، p-مرکز (فتحعلی، راد و شرباف، ۲۰۱۴)، p-میانه (فتحعلی، راد و شرباف، ۲۰۱۴) و میانه-مرکز (هالپرن، ۱۹۷۶) اشاره کرد که در مدیریت برنامه‌ریزی شهری نیز کاربرد دارد (خداقلی و دولتی، ۱۳۹۷). یکی از توابع هدف معروف که در بیشتر کاربردها ممکن است مورد استفاده قرار گیرد تابع میانه می‌باشد. در واقع میانه، رأسی (رئوسی) از گراف است که مجموع همه فاصله‌های وزنی از یک رأس مشخص را مینیمم می‌کند. مسائل مکان‌یابی به دودسته مسائل مکان‌یابی پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند. در مکان‌یابی پیوسته، تسهیلات و امکانات مورد نظر می‌توانند در هر نقطه‌ای از فضای مورد مطالعه استقرار یابند، اما در مسائل مکان‌یابی گسسته، تسهیلات مورد نظر صرفاً باید روی نقاط موجود در فضای گسسته مورد بحث قرار گیرد. به عنوان یک مثال کاربردی از مسائل مکان‌یابی در مدیریت شهری می‌توانیم فرض کنیم که در یک شبکه شهری، رئوس، نماینده مناطق شهری، یال‌ها نیز مسیرها یا خیابان‌های بین مناطق و وزن هر رأس میزان تقاضای مشتریان هر منطقه شهری را نشان می‌دهند. هدف از مسئله مکان‌یابی گسسته روی گراف، استقرار تسهیلات روی یکی از رئوس گراف است به گونه‌ای که تا حد امکان، دسترسی به این تسهیلات برای متقاضیان با حداکثر کارایی و کمترین هزینه صورت گیرد؛ اما در برخی موارد، تسهیلات به صورت غیر بهینه مکان‌یابی شده‌اند و به دلایل مختلفی امکان جابه‌جایی آن‌ها وجود ندارد و یا جابه‌جایی آن‌ها هزینه زیادی را ایجاد می‌کند؛ بنابراین مشتریان برای برآورده شدن نیازشان توسط تسهیلات مستقر شده در مکان‌های غیر بهینه باید متحمل هزینه بیشتری شوند. در این صورت با صرف هزینه و تغییر پارامترهای مسئله می‌توان مکان غیر بهینه استقرار تسهیلات را به یک مکان بهینه تبدیل کرد؛ اما از آنجایی که برای تغییر هر پارامتر، هزینه‌ای را متحمل می‌شویم، سعی می‌شود تغییر پارامترها به گونه‌ای باشد که علاوه بر دستیابی به هدف، مجموع کل هزینه‌های حاصل از این تغییرات کمینه شود. این نوع مسائل را مسائل مکان‌یابی معکوس می‌نامند. در این مقاله، معکوس مسئله ۱-میانه را روی شبکه‌های درختی به عنوان یک مسئله مکان‌یابی گسسته مورد بررسی قرار داده‌ایم. هدف از حل معکوس مسئله ۱-میانه، تغییر برخی از پارامترهای مسئله مانند وزن رئوس و یا وزن (طول) یال‌ها با کمترین هزینه، تحت تغییرات کران‌دار است، به گونه‌ای که رأس از پیش مشخص شده‌ای با توجه به پارامترهای تغییر یافته، به یک رأس ۱-میانه تبدیل شود.

بورکارد، پلشیتسینگ<sup>۱</sup> و ژانگ (۲۰۰۴) برای این مسئله روی شبکه درخت با وزن‌های رأسی مثبت، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای ارائه دادند. چندین سال بعد نیز گلوئی (۲۰۱۰) ثابت کرد که مدل ریاضی این مسئله روی شبکه درخت یا مسیر با وزن‌های رأسی مثبت و منفی با مدل ریاضی مسئله کوله‌پشتی پیوسته معادل است که در نتیجه این مسئله در زمان خطی توسط الگوریتمی که بالاس و زمل (۱۹۸۰) ارائه دادند، قابل حل خواهد بود. بورکارد، پلشیتسینگ و ژانگ، (۲۰۰۸) برای این مسئله بر روی گراف دوری، الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای مطرح کردند. بناب، بورکارد و علیزاده، (۲۰۱۰) معکوس مسئله ۱-میانه را روی فضای  $\mathbb{R}^d$  مورد مطالعه قرار دادند. همچنین، بناب، بورکارد و گسنر (۲۰۱۱) معکوس مسئله p-میانه را روی شبکه با امکان تغییر طول یال‌ها بررسی نمودند. معکوس مسئله ۱-میانه تحت نرم چیشیف، فاصله همینگ تنگنایی و فاصله همینگ جمعی وزنی نیز با امکان تغییر وزن رئوس روی شبکه‌های درختی توسط گان و ژانگ (۲۰۱۲) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین این مسئله با امکان تغییر طول یال‌ها روی شبکه‌های درختی تحت نرم خطی، نرم چیشیف و فاصله همینگ تنگنایی توسط وو و همکاران (۲۰۱۳) مورد بررسی قرار گرفته است. نگوین (۲۰۱۵) نیز برای معکوس مسئله ۱-میانه روی گراف‌های بلوکی با امکان تغییر وزن رئوس، الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه نمود.



از آنجاکه در مسئله ۱-میانه، میزان تقاضای مشتریان از مراکز خدمات‌رسانی و تسهیلات و همچنین هزینه تغییر میزان تقاضای آن‌ها مشخص و دقیق نیست و در نتیجه با عدم قطعیت روبه‌رو می‌باشد، به دست آوردن میزان دقیق تقاضای بهینه مشتریان از مراکز تسهیلات به‌دوراز واقعیت خواهد بود. در این صورت، الگوریتم‌های کلاسیک قادر به حل این‌گونه مسائل نخواهند بود. بدین منظور، ما در این مقاله، به‌منظور رفع عدم قطعیت، از روش‌های فازی برای حل معکوس مسئله ۱-میانه استفاده کرده‌ایم. در کاربردهای دنیای واقعی، پارامترها نادقیق و غیرقطعی هستند. یکی از بهترین راه‌ها برای نشان دادن عدم قطعیت، منطق فازی می‌باشد که در آن، پارامترهای مسئله فازی در نظر گرفته می‌شوند. مجموعه‌های فازی در ابتدا توسط زاده (۱۹۶۵) معرفی شد. بلمن و زاده (۱۹۷۰) تصمیم‌گیری در محیط فازی را بیان کردند. ایده بلمن و زاده در تصمیم‌گیری برای اولین بار توسط تاناکا، اوکودا و آسیا (۱۹۷۳)، در حوزه برنامه‌ریزی ریاضی به‌کاررفته شد. زیمرمن (۱۹۷۶) با فرض خطی بودن توابع عضویتی که تصمیم‌گیرنده به‌طور ذهنی تعیین می‌کند و با فرض به‌کارگیری تصمیم حداکثر سازی (بلمن و زاده، ۱۹۷۰)، نشان داد که مسائل برنامه‌ریزی خطی (LP) با آرمان‌های فازی و محدودیت‌های فازی به‌راحتی قابل حل هستند. یکی از مهم‌ترین کاربردهای تصمیم‌گیری فازی، برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP) می‌باشد که کارهای زیادی در این زمینه انجام شده است. باکلی و فیورینگ (۲۰۰۰) روشی را برای پیدا کردن جواب فازی مسئله برنامه‌ریزی خطی با تغییر تابع هدف به یک مسئله چندهدفه معرفی کردند. ژانگ و همکاران (۲۰۰۳) روشی را برای حل مسائل LP با ضرایب هدف فازی پیشنهاد دادند. الله ویرانلو و همکاران (۲۰۰۸) نیز روشی را بر پایه غیرفازی‌سازی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (FFLP) پیشنهاد دادند. در ادامه، دهقان، هاشمی و قطعی (۲۰۰۶) یک رویکرد جدید برای پیدا کردن جواب دقیق سیستم‌های تماماً فازی از معادلات ارائه کردند. کومار، کور و سینگ (۲۰۱۱) نیز روشی را برای حل مسئله FFLP با محدودیت مساوی بیان نمودند که روش آن‌ها توسط صابری نجفی و عدالت پناه (۲۰۱۳) اصلاح شد. حسین زاده و عدالت پناه (۲۰۱۶) با استفاده از تابع رتبه و اعداد فازی L-R روشی نوین برای حل FFLP ارائه کردند.

روش آلفا-برش یک روش استاندارد برای انجام عملیات حسابی بر روی اعداد فازی می‌باشد. هلن و اوما (۲۰۱۵) روشی را برای عملیات حسابی بر روی اعداد فازی پنتاگون و محاسبه تابع رتبه این اعداد فازی ارائه دادند. محققین دیگری مانند سودا و ویاجالاکسمی (۲۰۱۶) و کامبل (۲۰۱۷) نیز در زمینه‌ی روش آلفا-برش مقالاتی را ارائه کردند. در زمینه‌ی مدل‌سازی مکان‌یابی با داده‌های غیرقطعی نیز با استفاده از منطق فازی کارهای زیادی انجام شده است. کنوس، ایوورا و لیرن (۲۰۰۱) روشی را برای حل مسئله p-میانه پیشنهاد کرده‌اند؛ در مقاله کنوس، ایوورا و لیرن (۲۰۰۸) تعدادی تکنیک تحلیل حاشیه‌ای<sup>۱</sup> برای مطالعه اینکه چگونه توابع عضویت بر روی جواب‌ها تأثیر می‌گذارد، بیان شده است. پرز، وگا و وردگای (۲۰۰۴) مسائل مکان‌یابی با وزن طول‌های فازی را در نظر گرفته و روشی برای حل آن ارائه داده‌اند. کوتانگیلا-مایویا و وردگای (۲۰۰۵) نیز یک فرمول‌بندی برای یافتن جواب بهینه مسئله p-میانه در محیط فازی ارائه دادند. همچنین، تالشیان و فتحعلی (۲۰۱۶) به حل مسئله p-میانه با تبدیل به حالت Crisp<sup>۲</sup> پرداخته‌اند.

ساختار مقاله به‌صورت زیر شرح داده می‌شود: در بخش دوم، مفاهیم پایه‌ای از نظریه مجموعه فازی و آلفا برش فازی را مطالعه می‌کنیم. در بخش سوم، مدل ریاضی معکوس مسئله ۱-میانه با امکان تغییر وزن رؤس را روی شبکه‌های درختی بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، بر اساس مفهوم آلفا-برش برای یک عدد فازی مثلثی، یک برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی به‌صورت بازه‌ای برای معکوس مسئله ۱-میانه در هر سطح اطمینان  $\alpha \in [0,1]$ ، به دست می‌آوریم و سپس یک روش حل بر اساس حساب بازه‌ای ارائه می‌کنیم.

<sup>۱</sup>Marginalقطعی<sup>۲</sup>

## ۲- مقدمات و تعاریف اولیه

در این قسمت برخی مفاهیم پایه‌ای از نظریه مجموعه فازی و مفاهیم آلفا برش مورد استفاده در مقاله‌های عزتی، خرم و عنایتی (۲۰۱۳)، کاور و کومار (۲۰۱۶)، سودا و آیتنا (۲۰۱۵) و دوتا، بروآ و علی (۲۰۱۱) بیان می‌کنیم. برای نشان دادن یک مجموعه فازی، روش‌های مختلفی رایج است. یک روش، به کاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است.



**تعریف ۱-۲** مجموعه فازی: فرض کنید  $A$  یک مجموعه باشد، مجموعه فازی  $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in A, \mu_A(x) : X \rightarrow [0,1]\}$  را یک مجموعه فازی می‌گویند.  $\mu_A(x)$  تابع عضویت مجموعه فازی  $A$  می‌باشد.

**تعریف ۲-۲** اعداد فازی ۱ و ویژگی‌های آن: عدد فازی  $A$ ، یک مجموعه فازی روی خط اعداد حقیقی است که در دو شرط نرمال بودن و تحدب صدق نماید. از آنجاکه اکثر مجموعه‌های فازی شرایط نرمال بودن و تحدب را برآورده می‌سازند، بنابراین اعداد فازی مرسوم‌ترین نوع مجموعه‌های فازی می‌باشند. اعداد فازی دارای انواع مختلفی هستند. یکی از انواع اعداد فازی، عدد فازی مثلثی است که در ادامه ویژگی‌های آن مورد بحث قرار می‌گیرد.

**تعریف ۲-۳** عدد فازی مثلثی: یک عدد فازی  $\tilde{A} = (a, b, c)$  یک عدد فازی مثلثی است به طوری که  $a$  شاخه راست،  $b$  میانه و  $c$  شاخه راست آن می‌باشد. یک عدد فازی مثلثی مثبت است اگر و فقط اگر  $a \geq 0$ .

**تعریف ۲-۴** عملگرهای حسابی اعداد مثلثی: عملگرهای حسابی بین دو عدد فازی مثلثی، روی یک مجموعه کلی از اعداد حقیقی  $\mathbb{R}$  به صورت زیر می‌باشد:

فرض کنید  $\tilde{A} = (a, b, c)$  و  $\tilde{B} = (e, f, g)$  دو عدد مثلثی باشند آنگاه:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a, b, c) \oplus (e, f, g) = (a+e, b+f, c+g)$$

$$-\tilde{A} = -(a, b, c) = (-a, -b, -c)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a, b, c) \ominus (e, f, g) = (a-e, b-f, c-g)$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \begin{cases} (ae, bf, cg), & a \geq 0 \\ (ag, bf, cg), & a < 0, c \geq 0 \\ (ag, bf, ce), & c < 0 \end{cases}$$

**تعریف ۲-۵** تابع عضویت برای اعداد فازی مثلثی: اگر  $\tilde{A} = (a, b, c)$  یک عدد فازی مثلثی باشد، در این صورت تابع عضویت این عدد فازی به صورت زیر می‌باشد:



$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**تعریف ۶-۲** تابع رتبه برای اعداد فازی: فرض کنید  $F(\mathbb{R})$  یک مجموعه از اعداد فازی تعریف شده روی مجموعه اعداد حقیقی باشد. در این صورت  $R: F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع رتبه است که هر عدد فازی را به محور حقیقی (که ترتیب در آن موجود است) نگاشت می‌کند.

**تعریف ۷-۲** حساب بازه‌ای: عملگرهای حسابی بین دو بازه را به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید  $[a, b]$  و  $[c, d]$  دو بازه روی مجموعه اعداد حقیقی باشند، در این صورت:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = \left[ \min\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right), \max\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right) \right] \quad \text{s.t.} \quad 0 \notin [c, d]$$

هر مجموعه فازی به صورت کامل و منحصر به فرد با آلفا-برش‌های آن تعریف می‌شود. آلفا-برش هر عدد فازی، به ازای هر مقدار آلفا در بازه  $[0, 1]$ ، بازه‌های بسته از اعداد حقیقی هستند.

**تعریف ۸-۲** آلفا-برش: فرض کنید  $A$  یک مجموعه فازی روی مجموعه  $X$  باشد. در این صورت، آلفا برش این مجموعه به صورت  $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$  تعریف می‌شود.

اگر  $\tilde{A} = (a, b, c)$  یک عدد فازی مثلثی باشد، در این صورت آلفا برش این عدد فازی به صورت زیر می‌باشد:

$$A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha]$$

**تعریف ۹-۲** عملگر حسابی اعداد فازی با استفاده از روش آلفا-برش:

فرض کنید  $\tilde{A} = (a, b, c)$  و  $\tilde{B} = (p, q, r)$  اعداد فازی مثلثی باشند. در این صورت، آلفا-برش برای اعداد فازی  $A$  و  $B$  به صورت زیر می‌باشد:

$$A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha], \quad B_\alpha = [(q-p)\alpha + p, r - (r-q)\alpha]$$

و عملگرهای حسابی آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$A_\alpha + B_\alpha = [a + p + (b-a+q-p)\alpha, c + r - (c-b+r-q)\alpha]$$

$$A_\alpha - B_\alpha = [a - r + (b-a+r-q)\alpha, c + (c-p) - (c-b+q-p)\alpha]$$

$$A_\alpha * B_\alpha = [((b-a)\alpha + a) * ((q-p)\alpha + p), (c - (c-b)\alpha) * (r - (r-q)\alpha)]$$

$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha} = \left[ \frac{(b-a)\alpha + a}{r - (r-q)\alpha}, \frac{c - (c-b)\alpha}{(q-p)\alpha + p} \right]$$



## ۳- معکوس مسئله ۱-میانه

یک شبکه درختی به صورت  $T = (V, E)$  را در نظر بگیرید، به طوری که  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  مجموعه متناهی از رئوس،  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  مجموعه یال‌های درخت  $T$  است. همچنین فرض کنید  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  مجموعه وزن قطعی رئوس درخت  $T$  می‌باشد. هر یال  $e_j \in E$  دارای طول مثبت  $l_j$  و هر رأس  $v_i \in V$  دارای وزن قطعی  $w_i \in \mathbb{R}^+$  است. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره  $u, v \in V$  با  $d(u, v)$  نمایش داده می‌شود. فرض می‌کنیم  $W(T)$  مجموع وزن همه

$$W(T) := \sum_{i=1}^n w_i \text{ یعنی باشد،}$$

**تعریف ۳-۱** ۱-میانه راسی است که مجموع همه فاصله‌های وزنی از آن تا سایر رئوس مینیمم است؛ بنابراین رأس

$v_s \in V$  یک ۱-میانه درخت  $T$  است هرگاه:

$$\sum_{v_j \in V} w_j d(v_s, v_j) \leq \sum_{v_j \in V} w_j d(v_i, v_j) \quad \forall v_i \in V$$

هدف از حل معکوس مسئله ۱-میانه با تغییر وزن رئوس روی درخت‌ها، اصلاح وزن رئوس با کمترین هزینه به صورت  $w^*$  تحت تغییرات کران‌دار است، به گونه‌ای که رأس از پیش مشخص شده  $v_s$  که نسبت به مجموعه وزن رئوس داده شده  $W$  ۱-میانه نیست، به یک رأس ۱-میانه درخت تغییر یافته، تبدیل شود؛ بنابراین مدل ریاضی این مسئله به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n c_j |w_j^* - w_j| \\ & st \sum_{j=1}^n w_j^* d(v_s, v_j) \leq \sum_{j=1}^n w_j^* d(v_i, v_j) \quad \forall v_i \in V \\ & \underline{w}_j \leq w_j^* \leq \bar{w}_j \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که  $\underline{w}_j$  و  $\bar{w}_j$  به ترتیب کران پایین و کران بالای وزن رئوس را نشان می‌دهد و  $c_j$  هزینه تغییر هر واحد از وزن رئوس  $v_j$  می‌باشد.

اگر افزایش و کاهش وزن هر رأس  $v_j \in V$  را به ترتیب با  $p_j$  و  $q_j$  نشان دهیم، آنگاه وزن هر رأس از درخت داده شده به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$w_j^* = w_j + p_j - q_j \quad j = 1, \dots, n.$$

فرض کنید رأس  $v_s$ ، رأس از پیش مشخص شده‌ای از درجه  $k$  باشد، در این صورت زیردرخت‌های ماکسیمال در  $T - v_s$  را با  $T_1, \dots, T_k$  نمایش می‌دهیم. در این صورت  $W(T_i) := \sum_{v_j \in T_i} w_j$  مجموع وزن هر زیردرخت را بیان می‌کند.

**لم ۳-۱** (بورکار، پلشیتشیک و ژانگ، ۲۰۰۴). (شرط بهینگی ۱-میانه بودن یک رأس): درخت  $T = (V, E)$  را در نظر بگیرید. رأس  $v_s$  از درجه  $k$ ، یک ۱-میانه درخت  $T$  است، اگر و فقط اگر:

$$W(T_i) \leq \frac{W(T)}{2} \quad \forall i = 1, \dots, k$$



لم ۲-۳ (بورکار، پلشیشیگ و ژانگ، ۲۰۰۴). فرض کنید رأس  $v_m \in V$ ، نسبت به وزن‌های داده شده  $W_i$ ، ۱-میانه درخت  $T$  باشد و  $v_s \in V$  ( $v_s \neq v_m$ ) رأسی از درجه  $k$  باشد که نسبت به  $W_i$  ها ۱-میانه نیست، در این صورت، فقط زیردرخت ماکسیمال  $T_k$  در  $T - v_s$  که شامل رأس  $v_m$  است، ناقض شرط بهینگی است.

لم ۳-۳ (بورکار، پلشیشیگ و ژانگ، ۲۰۰۴). فرض کنید  $W^*(T_1) \leq \frac{W^*(T)}{2}, \dots, W^*(T_{k-1}) \leq \frac{W^*(T)}{2}$  در این صورت، رأس  $v_s \in V$  ۱-میانه درخت  $T$  نسبت به وزن‌های اصلاح شده است اگر و فقط اگر:

$$D := W^*(T_k) - \frac{W^*(T)}{2} = 0$$

بازنویسی مدل ریاضی این مسئله که توسط بورکار، پلشیشیگ و ژانگ (۲۰۰۴) و گلوی (۱۰۲۰) ارائه شده است، به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_j = b \\ & x_j \leq \bar{x}_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

که  $c_j$  و  $b := 2D = 2W(T_k) - W(T)$  مثبت هستند و

$$x_j := \begin{cases} q_j & v_j \in T_k \\ p_j & v_j \notin T_k \end{cases}, \quad \bar{x}_j := \begin{cases} \bar{p}_j & x_j = p_j \\ \bar{q}_j & x_j = q_j \end{cases}, \quad c_j := \begin{cases} c_j^- & v_j \in T_k \\ c_j^+ & v_j \notin T_k \end{cases}$$

$\bar{x}_j$  کران بالای تغییرات وزن رئوس را نشان می دهد. همچنین  $c_j^+$  هزینه افزایش وزن رئوس و  $c_j^-$  هزینه کاهش وزن رئوس را نشان می دهد.

مسئله برنامه ریزی خطی (۲) یک مسئله کوله پشتی پیوسته است که توسط الگوریتم بالاس و زم (۱۹۸۰) در زمان خطی قابل حل است؛ بنابراین معکوس مسئله ۱-میانه روی درخت با امکان تغییر وزن رئوس تحت نرم خطی، در زمان  $O(n)$  قابل حل می باشد؛ بنابراین در نهایت پس از به دست آوردن مقدار  $x_j$  ها، وزن‌های بهینه رئوس به صورت زیر به دست می آیند:

$$w_j^* := \begin{cases} w_j - x_j & v_j \in T_k \\ w_j + x_j & v_j \notin T_k \end{cases}$$

#### ۴- مدل سازی معکوس مسئله ۱-میانه با آلفا-برش فازی و الگوریتم حل آن

از آنجایی که در دنیای واقعی، پارامترهای مسئله، مقادیر دقیق و قطعی ندارند، انگیزه‌ای شد تا در این قسمت از مقاله معکوس مسئله ۱-میانه را به صورت غیرقطعی تحت نظریه مجموعه فازی بررسی نماییم. یک شبکه درخت غیرقطعی به صورت  $\bar{T} = (V, E)$  را در نظر بگیرید، به طوری که  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  مجموعه متناهی از رئوس و  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  مجموعه یال‌های درخت  $\bar{T}$  است. فرض کنید  $\bar{W} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$  مجموعه اعداد فازی مثلثی و نشان دهنده وزن غیرقطعی

رئوس درخت  $\bar{T}$  باشد. هر یال  $e_j \in E$  دارای طول مثبت  $l_j$  و هر رأس  $v_i \in V$  دارای وزن فازی  $w_i \in TF^+$  است. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو گره  $u, v \in V$  با  $d(u, v)$  نمایش داده می‌شود. هدف از حل معکوس مسئله ۱- میانه با تغییر وزن رئوس روی درخت‌ها، اصلاح وزن رئوس با کمترین هزینه به صورت  $w^*$ ، تحت تغییرات کران‌دار است، به گونه‌ای که رأس از پیش مشخص شده  $v_s$  که نسبت به مجموعه وزن رئوس داده شده  $\bar{W}$ ، ۱-میانه نیست، به یک رأس ۱-میانه درخت تغییر یافته، تبدیل شود. اکنون می‌خواهیم این مسئله را در حالتی که تمامی پارامترها اعداد فازی مثبت هستند مورد مطالعه قرار دهیم؛ بنابراین فرض کنید که هزینه افزایش وزن رئوس، هزینه کاهش وزن رئوس، کران بالا و کران پایین تغییر وزن رئوس به ترتیب مجموعه اعداد فازی مثلثی به صورت  $C^+ = \{\tilde{c}_1^+, \dots, \tilde{c}_n^+\}$ ،  $C^- = \{\tilde{c}_1^-, \dots, \tilde{c}_n^-\}$  و  $\bar{W} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$  و  $\underline{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$  باشند. در ادامه، معکوس مسئله ۱-میانه تماماً فازی را مدل بندی می‌کنیم. یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Max (Min)} \quad C^T \otimes X \\ & \text{s.t.} \quad A \otimes X = B \end{aligned} \tag{۳}$$

$$X, A, C, B \in F^+$$

به طوری که  $C^T = [\tilde{c}_j]_{1 \times n}$ ،  $X = [\tilde{x}_j]_{n \times 1}$ ،  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ،  $B = [\tilde{b}_i]_{m \times 1}$

بنابراین با توجه به مدل (2) و (3)، مدل ریاضی معکوس مسئله ۱-میانه تماماً فازی مثلثی به صورت زیر فرمول بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j \otimes x_j) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_j = b \\ & \quad \quad x_j \leq \bar{x}_j \\ & \quad \quad \tilde{c}_j, x_j, b, \bar{x}_j \in TF^+ \quad \forall j \end{aligned} \tag{۴}$$

مدل فوق معادل است با مدل زیر:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{j=1}^n ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}) \otimes (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) = (b_1, b_2, b_3) \\ & \quad \quad (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}) \leq (\bar{x}_{j1}, \bar{x}_{j2}, \bar{x}_{j3}) \quad \forall j \\ & \quad \quad x_{j1} \geq 0 \quad \forall j \\ & \quad \quad x_{j2} - x_{j1} \geq 0 \quad \forall j \\ & \quad \quad x_{j3} - x_{j2} \geq 0 \quad \forall j \end{aligned} \tag{۵}$$

حال برای حل مدل برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (۵)، الگوریتمی مبتنی بر روش آلفا-برش ارائه می‌نماییم و برای هر سطح اطمینان  $\alpha \in [0, 1]$  جواب بهینه به دست می‌آوریم. شکل کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای مدل (۵) در هر سطح اطمینان  $\alpha \in [0, 1]$  مبتنی بر روش آلفا-برش به صورت زیر فرموله می‌شود:





$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{j=1}^n (c_{j\alpha} \otimes x_{j\alpha}) \\
 & \text{s.t. } \sum_{j=1}^n x_{j\alpha} = b_\alpha \\
 & x_{j\alpha} \leq \bar{x}_{j\alpha} \\
 & x_{j1} \geq 0 \quad \forall j \\
 & x_{j2} - x_{j1} \geq 0 \quad \forall j \\
 & x_{j3} - x_{j2} \geq 0 \quad \forall j
 \end{aligned} \tag{6}$$

به طوری که  $x_{\alpha j}$ ،  $\bar{x}_{\alpha j}$ ،  $c_{j\alpha}$ ،  $b_\alpha$  به صورت آلفا-برش می‌باشند. مدل فوق، یک مدل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای برای  $\alpha \in [0,1]$  است که با توجه به الگوریتم‌های کلاسیک قابل حل نمی‌باشد. در ادامه، الگوریتمی را جهت تبدیل مدل (۶) به یک مدل کلاسیک و قطعی ارائه می‌کنیم.

**الگوریتم پیشنهادی.** در این قسمت، برای معکوس مسئله ۱-میانه با پارامترهای فازی، الگوریتمی تحت چارچوب نظریه مجموعه‌های فازی مبتنی بر روش آلفا-برش ارائه می‌کنیم:

ورودی:

- درخت غیرقطعی  $\bar{T} = (V, E)$  با مجموعه رئوس  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  و مجموعه یال‌های  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ .
- مجموعه اعداد فازی مثلثی  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  به عنوان مجموعه وزن رئوس و مجموعه اعداد فازی مثلثی  $\bar{W} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$  و  $\underline{W} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$  به ترتیب به عنوان کران بالا و کران پایین تغییر وزن رئوس.
- مجموعه اعداد فازی مثلثی  $C^+ = \{\tilde{c}_1^+, \dots, \tilde{c}_n^+\}$  و  $C^- = \{\tilde{c}_1^-, \dots, \tilde{c}_n^-\}$  به عنوان هزینه افزایش و هزینه کاهش وزن رئوس.
- رأس مشخص شده  $v_s \in V$  با درجه  $k$ .

**گام ۱.** ابتدا وزن کل درخت را با استفاده از اعمال حسابی جمع اعداد فازی مثلثی به دست می‌آوریم:

$$W(\bar{T}) = \sum_{j=1}^n w_j = (x, y, z)$$

**گام ۲.** وزن هر زیر درخت در  $\bar{T} - v_s$  را با استفاده از اعمال حسابی جمع اعداد فازی مثلثی به دست می‌آوریم:

$$W(\bar{T}_i) = \sum_{v_j \in T_i} w_j = (p_i, q_i, r_i)$$

**گام ۳.** آلفا-برش نصف وزن کل درخت غیرقطعی و وزن هر زیر درخت غیرقطعی را برای هر  $\alpha \in [0,1]$  به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{W(\bar{T})_\alpha}{2} = \left[ \frac{(y-x)\alpha + x}{2}, \frac{z - (z-y)\alpha}{2} \right]$$

$$W(\bar{T}_i)_\alpha = [(q_i - p_i)\alpha + p_i, r_i - (r_i - q_i)\alpha]$$



گام ۴. رتبه بازه‌های به‌دست‌آمده در گام ۳ را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

در این مقاله ما یک تابع رتبه جدید، تحت عنوان رتبه میانگین برای بازه  $[a, b]$  به‌صورت زیر ارائه می‌کنیم:

$$R([a, b]) = \frac{a+b}{2},$$

در این صورت رتبه بازه‌های به‌دست‌آمده برای وزن درخت و هر زیر درخت به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$R(W(\bar{T})_\alpha) = \frac{(2y-x-z)\alpha + x+z}{2}$$

$$R\left(\frac{W(\bar{T}_i)_\alpha}{2}\right) = \frac{(2q_i - p_i - r_i)\alpha + p_i + r_i}{4}.$$

گام ۵. اگر برای  $\alpha \in [0, 1]$  و هر زیر درخت  $\bar{T}_i$  داشته باشیم  $R(W(\bar{T}_i)_\alpha) \leq R\left(\frac{W(\bar{T}_i)_\alpha}{2}\right)$ ، آنگاه متوقف می‌شویم، وزن‌های فعلی بهینه هستند، در غیر این صورت طبق لم ۲ تنها زیر درختی که شرط بهینگی لم ۳، ۱ را نقض می‌کند با  $\bar{T}_k$  نمایش می‌دهیم.

گام ۶. مقدار  $b$  برای  $\alpha \in [0, 1]$  در مدل (۴) را با توجه به گام ۴ به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$b = 2(R(W(\bar{T}_k)_\alpha) - R\left(\frac{W(\bar{T}_k)_\alpha}{2}\right))$$

گام ۷. کران بالای تغییرات وزن رئوس را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

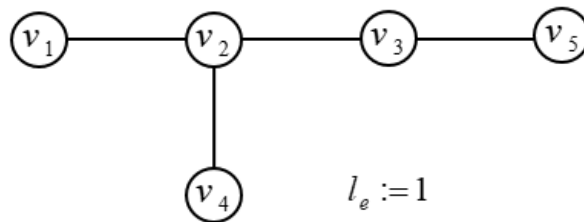
$$R(\bar{x}_{j\alpha}) = \begin{cases} R(w_{j\alpha}) - R(w_{j\alpha}) & v_j \in \bar{T}_k \\ R(\bar{w}_{j\alpha}) - R(w_{j\alpha}) & v_j \notin \bar{T}_k \end{cases}$$

گام ۸. با توجه به گام‌های فوق، مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی و کلاسیک متناظر با مدل (۶) به‌صورت مدل زیر فرموله می‌شود؛ به‌طوری‌که این مدل برای هر  $\alpha \in [0, 1]$  مقدار بهینه و جواب بهینه را توسط الگوریتم پیشنهادی (بالاس و زمل، ۱۹۸۰) در زمان خطی به دست می‌آورد.

$$\begin{aligned} & \text{Min } R\left(\sum_{j=1}^n (c_{j\alpha} \otimes x_{j\alpha})\right) \\ & \text{s.t. } R\left(\sum_{j=1}^n x_{j\alpha}\right) = b \\ & R(x_{j\alpha}) \leq R(\bar{x}_{j\alpha}) \quad \forall j \\ & x_{j1} \geq 0 \quad \forall j \\ & x_{j2} - x_{j1} \geq 0 \quad \forall j \\ & x_{j3} - x_{j2} \geq 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (V)$$

در این قسمت جهت فهم بهتر الگوریتم پیشنهادی مثالی را ارائه می‌نماییم.

مثال ۱. شبکه درختی رسم شده در شکل ۱ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم طول تمامی یال‌ها برابر با یک باشد.



شکل ۱- شبکه درختی مثال ۱.

همچنین وزن رئوس، کران بالا و کران پایین وزن رئوس و هزینه‌های تغییر وزن رئوس در جدول ۱ لیست شده است. در این مثال فرض کرده‌ایم که هزینه‌های افزایش و کاهش وزن رئوس یکسان باشد. می‌خواهیم وزن رئوس را با کمترین هزینه تغییر دهیم به گونه‌ای که رأس  $v_2$  یک رأس ۱-میانه درخت شکل ۱ شود.

جدول ۱- لیست مجموعه اعداد فازی مثلثی متناظر با شبکه درختی مثال ۱.

$j$	1	2	3	4	5
$w_j$	(2,3,4)	(4,5,7)	(3,6,9)	(2,3,5)	(6,7,9)
$\tilde{c}_j$	(2,4,7)	(2,5,7)	(1,2,4)	(3,4,7)	(3,5,8)
$\bar{w}_j$	(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)	(1,2,3)	(1,2,4)
$\underline{w}_j$	(3,4,6)	(7,8,9)	(9,10,12)	(3,6,8)	(5,7,12)

برای  $\alpha = 0.2$  الگوریتم پیشنهادی را اجرا می‌کنیم:

گام ۱. محاسبه وزن کل درخت:  $W(T) = \sum_{j=1}^5 w_j = (17, 24, 34)$

گام ۲. محاسبه وزن هر زیر درخت:

$$\tilde{W}(\bar{T}_1) = \tilde{w}_1 = (2, 3, 4)$$

$$W(\bar{T}_2) = w_4 = (3, 4, 7)$$

$$W(\bar{T}_3) = w_3 + w_5 = (2, 4, 9)$$

گام ۳. آلفا-برش وزن کل درخت و وزن هر زیر درخت:

$$\frac{W(\bar{T})_\alpha}{2} = \left[ \frac{7\alpha + 17}{2}, \frac{34 - 10\alpha}{2} \right]$$

$$W(\bar{T}_1)_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$$

$$W(\bar{T}_2)_\alpha = [\alpha + 2, 5 - 2\alpha]$$

$$W(\bar{T}_3)_\alpha = [4\alpha + 9, 18 - 5\alpha]$$



گام ۴. محاسبه رتبه بازه‌های به‌دست‌آمده در گام قبل:

$$R\left(\frac{W(\bar{T})_{\alpha}}{2}\right) = \frac{51-3\alpha^{\alpha=0.2}}{4} = 12.6$$

$$R(W(\bar{T}_1)_{\alpha}) = 3$$

$$R(W(\bar{T}_2)_{\alpha}) = 3.4$$

$$R(W(\bar{T}_3)_{\alpha}) = 13.4$$

گام ۵. پیدا کردن زیر درختی که شرط بهینگی را نقض می‌کند:

چون  $R(W(\bar{T}_3)_{\alpha}) \geq R\left(\frac{W(\bar{T})_{\alpha}}{2}\right)$ ؛ بنابراین زیر درخت  $\bar{T}_3$  شرط بهینگی را خدشه‌دار می‌کند.

گام ۶. محاسبه مقدار  $b$ :

$$b = 2(R(W(\bar{T}_k)_{\alpha}) - R\left(\frac{W(\bar{T})_{\alpha}}{2}\right))^{\alpha=0.2} = 2(13.4 - 12.6) = 1.6$$

گام ۷. محاسبه کران بالای تغییرات وزن رئوس:

$$R(\bar{x}_{1\alpha}) = R(\bar{w}_{1\alpha}) - R(w_{1\alpha}) = \frac{3-\alpha^{\alpha=0.2}}{2} = 1.4$$

$$R(\bar{x}_{2\alpha}) = R(\bar{w}_{2\alpha}) - R(w_{2\alpha}) = \frac{5+\alpha^{\alpha=0.2}}{2} = 2.6$$

$$R(\bar{x}_{3\alpha}) = R(\bar{w}_{3\alpha}) - R(w_{3\alpha}) = \frac{6+2\alpha^{\alpha=0.2}}{2} = 3.2$$

$$R(\bar{x}_{4\alpha}) = R(\bar{w}_{4\alpha}) - R(w_{4\alpha}) = \frac{4+2\alpha^{\alpha=0.2}}{2} = 2.2$$

$$R(\bar{x}_{5\alpha}) = R(\bar{w}_{5\alpha}) - R(w_{5\alpha}) = 5$$

گام ۸. حل مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی و کلاسیک زیر:

$$\text{Min } R\left(\sum_{j=1}^5 (c_{j\alpha} \otimes x_{j\alpha})\right)$$

$$\text{s.t. } R\left(\sum_{j=1}^5 x_{j\alpha}\right) = 1.6$$

$$R(x_{j\alpha}) \leq R(\bar{x}_{j\alpha}) \quad \forall j = 1, \dots, 5$$

$$x_{j1} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, 5$$

$$x_{j2} - x_{j1} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, 5$$

$$x_{j3} - x_{j2} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, 5$$

با حل مدل فوق توسط نرم‌افزار لینگو، جواب‌های بهینه و مقدار بهینه به‌صورت زیر به دست می‌آیند:



$$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = (0, 0, 0)$$

$$x_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33}) = (1.6, 1.6, 1.6)$$

بنابراین، وزن‌های بهینه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$w_1^* = w_1, \quad w_2^* = w_2, \quad w_4^* = w_4, \quad w_5^* = w_5$$

$$w_3^* = w_3 - x_3 = (1.4, 1.4, 1.4)$$

با تکرار این فرآیند، مقدار بهینه و جواب بهینه در برخی از سطوح اطمینان در جدول ۲ لیست شده‌اند.

جدول ۲- لیست جواب بهینه و مقدار بهینه مثال ۱ برای برخی از سطوح اطمینان.

$\alpha$	مقدار بهینه	جواب بهینه				
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0.2	3.84	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.6,1.6,1.6)	(0,0,0)	(0,0,0)
0.4	3.91	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.7,1.7,1.7)	(0,0,0)	(0,0,0)
0.6	3.96	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.8,1.8,1.8)	(0,0,0)	(0,0,0)
0.8	3.99	(0,0,0)	(0,0,0)	(1.9,1.9,1.9)	(0,0,0)	(0,0,0)

## ۶- نتیجه‌گیری

هدف از حل مسائل بهینه‌سازی معکوس، تغییر پارامترهای مسئله با کمترین هزینه است به گونه‌ای که جواب شدنی از پیش مشخص شده‌ای به یک جواب بهینه از مسئله تغییر یافته تبدیل شود. از آنجاکه در دنیای واقعی، با عدم قطعیت و ابهام در پارامترها روبه‌رو هستیم، در این مقاله، یکی از مسائل مکان‌یابی معکوس تحت عنوان معکوس مسئله ۱- میانه را تحت چارچوب نظریه مجموعه فازی مورد بررسی قرار دادیم و روشی را مبتنی بر روش آلفا-برش جهت حل این مسئله ارائه نمودیم؛ به طوری که روش پیشنهادی برای هر سطح اطمینان  $\alpha \in [0, 1]$  جواب بهینه به دست آورد.

## منابع

- خداقلی، منا و دولتی، اردشیر. (۱۳۹۷). کاربرد مسائل مکان‌یابی در برنامه‌ریزی شهری. پنجمین همایش ریاضیات و علوم انسانی (ریاضی مالی).
- Allahviranloo, T., Lotfi, F. H., Kiasary, M. K., Kiani, N. A., & Alizadeh, L. (2008). Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking function. *Applied mathematical sciences*, 2(1), 19-32.
- Balas, E., & Zemel, E. (1980). An algorithm for large zero-one knapsack problems. *Operations research*, 28(5), 1130-1154.
- Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, 17(4), B-141.
- Bonab, F. B., Burkard, R. E., & Alizadeh, B. (2010). Inverse median location problems with variable coordinates. *Central european journal of operations research*, 18(3), 365-381.
- Bonab, F. B., Burkard, R. E., & Gassner, E. (2011). Inverse p-median problems with variable edge lengths. *Mathematical methods of operations research*, 73(2), 263-280.
- Buckley, J. J., & Feuring, T. (2000). Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming. *Fuzzy sets and systems*, 109(1), 35-53.
- Burkard, R. E., Pleschitschnig, C., & Zhang, J. (2004). Inverse median problems. *Discrete optimization*, 1(1), 23-39.





- Burkard, R. E., Pleschiutchnig, C., & Zhang, J. (2008). The inverse 1-median problem on a cycle. *Discrete optimization*, 5(2), 242-253.
- Canós, M. J., Ivorra, C., & Liern, V. (2001). The fuzzy p-median problem: A global analysis of the solutions. *European journal of operational research*, 130(2), 430-436.
- Canós, M. J., Ivorra, C., & Liern, V. (2008). Marginal analysis for the fuzzy p-median problem. *European journal of operational research*, 191(1), 264-271.
- Dehghan, M., Hashemi, B., & Ghatee, M. (2006). Computational methods for solving fully fuzzy linear systems. *Applied mathematics and computation*, 179(1), 328-343.
- Dutta, P., Boruah, H., & Ali, T. (2011). Fuzzy Arithmetic with and without using  $\alpha$ -cut method: A Comparative Study. *International journal of latest trends in computing*, 2(1), 99-107.
- Ezzati, R., Khorram, E., & Enayati, R. (2015). A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem. *Applied mathematical modelling*, 39(12), 3183-3193.
- Fathali, J., Rad, N. J., & Sherbaf, S. R. (2014). The p-median and p-center Problems on Bipartite Graphs. *Iranian journal of mathematical sciences and informatics*, 9(2), 37-43.
- Galavii, M. (2010). The inverse 1-median problem on a tree and on a path. *Electronic notes in discrete mathematics*, 36, 1241-1248.
- Guan, X., & Zhang, B. (2012). Inverse 1-median problem on trees under weighted Hamming distance. *Journal of global optimization*, 54(1), 75-82.
- Halpern, J. (1976). The location of a center-median convex combination on an undirected tree. *Journal of regional science*, 16(2), 237-245.
- Helen, R., & Uma, G. (2015). A new operation and ranking on Pentagon Fuzzy Numbers. *International journal of mathematical sciences and applications*, 5(2), 341-346.
- Hosseinzadeh, A., & Edalatpanah, S. A. (2016). A new approach for solving fully fuzzy linear programming by using the lexicography method. *Advances in fuzzy systems*, 4.
- Kamble, A. J. (2017). Some Notes on Pentagonal Fuzzy Numbers. *International journal of fuzzy mathematical archive*, 13(2), 113-121.
- Kaur, J., & Kumar, A. (2016). *An Introduction to Fuzzy Linear Programming Problems*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Kumar, A., Kaur, J., & Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. *Applied mathematical modelling*, 35(2), 817-823.
- Kutangila-Mayoya, D., & Verdegay, J. L. (2005). p-Median problems in a fuzzy environment. *Mathware & soft computing*, 12(2).
- Nguyen, K. T. (2016). Inverse 1-median problem on block graphs with variable vertex weights. *Journal of optimization theory and applications*, 168(3), 944-957.
- Nguyen, K. T., & Sepasian, A. R. (2016). The inverse 1-center problem on trees with variable edge lengths under Chebyshev norm and Hamming distance. *Journal of combinatorial optimization*, 32(3), 872-884.
- Perez, J. A. M., Vega, J. M. M., & Verdegay, J. L. (2004). Fuzzy location problems on networks. *Fuzzy sets and systems*, 142(3), 393-405.
- Najafí, H. S., & Edalatpanah, S. A. (2013). A note on "A new method for solving fully fuzzy linear programming problems". *Applied mathematical modelling*, 37(14-15), 7865-7867.
- Sudha, A. S., & Anitha, N. (2015). Solving a Interval Fuzzy Linear Programming Problem using Alpha-Cut Operation. *International journal of computer applications*, 112(10).
- Sudha, A. S., & Vijayalakshmi, K. R. Application Of Symmetric Hexagonal Intuitionist Fuzzy Numbers In A Transportation Problem. *Mathematical sciences international research journal*, 5(2), 2278-8697.
- Taleshian, F., & Fathali, J. (2016). A Mathematical Model for Fuzzy-Median Problem with Fuzzy Weights and Variables. *Advances in operations research*, 2016.
- Tanaka, H., Okuda, T., & Asai, K. (1973). Fuzzy mathematical programming. *Transactions of the society of instrument and control engineers*, 9(5), 607-613.
- Wu, L., Lee, J., Zhang, J., Wang, Q. (2013). The inverse 1-median problem on tree networks with variable real edge lengths. *Mathematical problems in engineering*. <http://dx.doi.org/10.1155/2013/313868>.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8, 69-78.
- Zhang, G., Wu, Y. H., Remias, M., & Lu, J. (2003). Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems. *Applied Mathematics and computation*, 139(2-3), 383-399.
- Zimmermann, H. J. (1975). Description and optimization of fuzzy systems. *International journal of general system*, 2(1), 209-215.