نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات
Journal of Decisions and Operational Research
دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷

محاسبه ارزش در معرض ریسک و کسری مورد انتظار برخی توزیع‌های آماری

رسول روزگار[۱]*، بهاالدین صوفی[۲]، حمیدرضا طاهری‌زاده[۱]
[۱]گروه آمار، دانشگاه یزد، یزد، ایران.
[۲]گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

چکیده

ارزش در معرض ریسک و کسری مورد انتظار دو کمیت بسیار متداول درزمینه‌ی اندازه‌گیری ریسک مالی هستند. رویکردهای بسیاری برای محاسبه‌ی این دو کمیت وجود دارند که این رویکردها را می‌توان به سه دسته‌ی کلی پارامتری، نا پارامتری و نیمه نا پارامتری تقسیم‌بندی کرد. درروش پارامتری که رویکرد اصلی این مقاله است، فرض بر این است که توزیع بازده سهام به دسته‌ی خاصی از توزیع‌های پارامتری تعلق دارد. در این مقاله برای تعدادی از توزیع‌ها، ارزش در معرض ریسک و کسری مورد انتظار محاسبه‌شده و روابط مربوط به این دو کمیت برای چند توزیع متقارن بیان و اثبات‌شده است. با مقایسه نتایج عددی بر مبنای محاسبه قیمت‌های روزانه سهام شرکت کوکاکولا به مدت ۱۰ سال، نشان داده‌شده است که کسری مورد انتظار در مقابل ارزش در معرض ریسک کمیت قابل‌اتکا و معتبری در مبحث مدیریت ریسک می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض ریسک، کسری مورد انتظار، روش پارامتری.

دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۲۶ پذیرش: ۱۳۹۷/۳/۱

۱- مقدمه

ارزش در معرض ریسک[۱] که در اوایل دهه ۱۹۸۰ معرفی گردید یکی از معیارهای مهم و مطرح در صنعت مالی است که توسط نهادها و مؤسسات مالی برای اندازه‌گیری و مدیریت ریسک ناشی از سرمایه‌گذاری مورداستفاده قرار می‌گیرد. بااین‌وجود، این معیار با چالش‌هایی روبروست و موردانتقاد سرمایه‌گذاران قرار می‌گیرد. آرتزنر و همکاران (۱۹۹۹) و آسربی و تاشه (۲۰۰۲) نشان دادند که ارزش در معرض ریسک به علت عدم زیرجمع‌پذیری یک اندازه منسجم ریسک محسوب نمی‌شود. برای غلبه بر چنین نارسایی‌هایی، کسری مورد انتظار[۲] که در اواخر دهه ۱۹۹۰ معرفی گردید، به‌عنوان یک اندازه ریسک منسجم و به‌عنوان جایگزینی برای VaR مورداستفاده قرار می‌گیرد. مقالات مقایسه‌ای بر مبنای مطالعات شبیه‌سازی‌شده نشان دادند که در بسیاری از موارد، ES عملکرد بهتر و مفیدتری نسبت به VaR دارد. راکفلر و اوریاسف (۲۰۰۲) نشان دادند که ES به‌سادگی و با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی بهینه می‌شود. یامای و یوشیبا (۲۰۰۲) این دو کمیت را از جنبه‌های بهینه‌سازی پرتفوی، تجزیه ریسک به عوامل ریسک موردبررسی و مقایسه قراردادند. آنان دریافتند که درزمینه‌ی بهینه‌سازی و تجزیه ریسک، ES عملکرد بهتری نسبت به VaR دارد اما ES نیاز به نمونه بیشتری نسبت به VaR برای همان

* Corresponding author (E-mail: rroozegar@yazd.ac.ir)

[۱]Value at Risk (VaR)
[۲]Expected Shortfall (ES)

سطح از دقت را دارد. در یک کاربرد دیگر، اُوه و مون (۲۰۰۶) دریافتند که مقادیر ES خیلی بیشتر از مقادیر به‌دست‌آمده برای VaR است و این بدان معناست که VaR زیان‌های مربوط به دُم توزیع را کمتر پیش‌بینی می‌کند.

تخمین و محاسبه VaR و ES بر اساس سه رویکرد پارامتری، نا پارامتری و نیمه پارامتری انجام می‌گیرد. درروش پارامتری فرض بر این است که توزیع سری بازده به دسته خاصی از توزیع‌ها تعلق دارند. در این مقاله رویکردی پارامتری را برای محاسبه قیمت‌های روزانه سهام شرکت کوکاکولا به مدت ۱۰ سال به‌کاربرده‌ایم. با مقایسه نتایج عددی بر مبنای محاسبه قیمت‌های روزانه سهام شرکت کوکاکولا به مدت ۱۰ سال برای چهار توزیع متقارن نشان داده‌ایم که استفاده از کمیت کسری مورد انتظار در مقابل کمیت ارزش در معرض ریسک خصوصاً در شرایط نامطلوب و غیرعادی بازار، اطمینان نسبی بیشتری را در مبحث مدیریت ریسک به ارمغان می‌آورد.

در بخش ۲ به معرفی مفاهیم و اصطلاحات و مبانی نظری موردنیاز می‌پردازیم. در بخش ۳ توضیح مختصری درباره سه رویکرد محاسبه کمیت‌های VaR و Es ارائه نموده و این دو کمیت را برای چهار توزیع‌های پارامتری محاسبه می‌کنیم. در بخش ٤ محاسبات عددی را برای چهار توزیع بخش قبل با استفاده از بسته نرم‌افزاری R ارائه می‌دهیم و در بخش ۵ نتایج را بازگو می‌نماییم.

۲- مبانی نظری

۲-۱ ارزش در معرض ریسک

VaR بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار روی سبد دارایی‌ها یا مجموعه سرمایه‌گذاری در طول افق زمانی مشخص و در شرایط عادی بازار و در یک سطح اطمینان معین است. به‌عبارتی‌دیگر برای احتمال معین $0 < p < 1$ و سطح اطمینان پیش‌بینی $(1-p)$ تعبیر این معیار چنین است:

ما $(1-p)$ درصد اطمینان داریم که طی N روز آتی قطعاً بیشتر از مبلغ V متحمل زیان نخواهیم شد. متغیر V همان ارزش در معرض ریسک است که دربردارنده دو پارامتر افق زمانی (N) و سطح اطمینان $(1-p)$ می‌باشد (آسربی و تاشه، ۲۰۰۲).

ازلحاظ آماری VaR به‌عنوان یک چندک مرتبه p اُم تعریف می‌شود. درواقع اگر متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F(.)$ میزان زیان یا بازدهی منفی در یک بازه زمانی مشخص باشد، آنگاه VaR یک متغیر تصادفی X برای احتمال معین $p \in (0,1)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{VaR}_p(X) = \inf\{x: F_X(x) \geq p\}.$$

درصورتی‌که متغیر تصادفی X دارای توزیع پیوسته $F(.)$ باشد $\mathrm{VaR}_p(X) = F^{-1}(p)$.

۲-۲ کسری مورد انتظار

به هنگام استفاده گسترده از VaR در اواخر دهه ۱۹۹۰، مفهوم اندازه‌های منسجم ریسک توسط آرتزنر و همکاران (۱۹۹۷) مطرح شد. آرتزنر و همکاران (۱۹۹۹) نشان دادند که VaR در اصل زیر جمع‌پذیری صدق نمی‌کند و بنابراین یک اندازه منسجم ریسک محسوب نمی‌شود. به همین منظور ES توسط آرتزنر و همکاران در سال ۱۹۹۹ معرفی شد.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۸۱-۷۲

آسربی و تاشه (۲۰۰۲) تعریف دقیق‌تری از کسری مورد انتظار ارائه دادند که برای توزیع‌های پیوسته و گسسته در اصول انسجام صدق می‌نمود. اگر F(.) و f(.) به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی متغیر تصادفی X باشند، کسری مورد انتظار

برای احتمال معین $p \in (0,1)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Es_p(X)} = \frac{1}{p}\left\{E[XI_{\{X\le VaR_p(X)\}}\right\} + p\,\mathrm{VaR_p(X)} - \mathrm{VaR_p(X)}, \tag{۱}$$

درصورتی‌که توزیع متغیر تصادفی X پیوسته باشد رابطه فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathrm{ES_p(X)} = \frac{1}{p}E\left[XI_{X\le VaR_p(X)}\right] = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{VaR_p} xf(x)dx, \tag{۲}$$

با تغییر متغیر $u = F(x)$ نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{ES_p(X)} = \frac{1}{p}\int_0^p \mathrm{VaR_u}\,(X)du. \tag{۳}$$

۳- روش‌های محاسبه VaR و ES

رویکردهای بسیاری برای محاسبه VaR و ES وجود دارد؛ اما درمجموع می‌توان روش‌های محاسبه، این دو کمیت را به سه دسته‌ی پارامتری، نا پارامتری و نیمه پارامتری تقسیم‌بندی کرد. پارامتری فرض بر این است که سری بازده سهام از توزیع خاصی پیروی می‌کند. در این حالت محاسبه VaR و ES مستلزم محاسبه معکوس تابع توزیع و محاسبه یک انتگرال است؛ در این صورت این کمیت‌ها به‌عنوان توابعی از پارامترهای مدل استخراج می‌شوند. در ادامه این بخش برای توزیع‌های نرمال، استودنت، لاپلاس[1] و لجستیک، این دو کمیت به‌صورت جداگانه محاسبه می‌شود.

رویکرد دیگر، رویکرد نا پارامتری است و هیچ فرض خاصی را بر توزیع بازده دارایی‌ها تحمیل نمی‌کند. رویکرد نا پارامتری از آخرین توزیع تجربی بازده و نه یک توزیع نظری برای برآورد سنجه‌های ریسک بهره می‌گیرد و بر این فرض استوار است که آینده نزدیک تااندازه‌ای به گذشته نزدیک شبیه است. ازجمله روش‌های نا پارامتری می‌توان به روش‌های شبیه‌سازی تاریخی، روش شبیه‌سازی تاریخی فیلتر شده، روش کرنل و روش کرنل پیراسته اشاره نمود (نادر نژاد، زنگ و چن، ۲۰۱٤). رویکرد دیگری که در محاسبه کمیت‌های VaR و ES استفاده می‌شود مبتنی بر روش‌های برآورد VaR و ES است که شامل عناصر پارامتری و نا پارامتری است. در سال ۲۰۰۸ روشی نیمه پارامتری برای برآورد ES بر اساس نظریه انتظارات که مبتنی بر مینیمم کردن مجموع مربعات معین-متریک خاص است، پیشنهاد شد (تیلر، ۲۰۰۸). در سال ۲۰۱٤ روش نیمه پارامتریک دیگری شامل فرآیندهای دم‌کلفت ارائه گردید (نادر نژاد و همکاران، ۲۰۱٤).

۳-۱ توزیع‌های پارامتری موردبررسی

در این بخش رابطه مربوط به VaR و ES برای چهار دسته از توزیع‌های پارامتری متقارن اثبات‌شده است.

---

[1] Laplace

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۷۲–۸۱

۳-۱-۱ توزیع نُرمال

مهم‌ترین و شناخته‌شده‌ترین توزیع احتمالی پیوسته، توزیع نُرمال است.

تعریف ۳-۱-۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع نُرمال با پارامترهای μ و σ است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < +\infty \tag{٤}$$

که در آن $-\infty < \mu < +\infty$ پارامتر مکان و $\sigma > 0$ پارامتر شکل است.

قضیه ۳-۱-۱ اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ آنگاه

$$ES_p(X) = \mu - \frac{\sigma}{p}\phi\left(\Phi^{-1}(p)\right) \tag{٥}$$

که در آن $\phi(.)$ و $\Phi(.)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند.

اثبات: ابتدا مقدار VaR را محاسبه می‌نماییم. برای این منظور فرض می‌کنیم که $Y \sim N(0,1)$؛ در این صورت $X = \mu + \sigma Y$

درنتیجه:

$$G(x) = P(X \le x) = P\left(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = p$$

بنابراین

$$VaR_p(X) = G^{-1}(p) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$$

برای محاسبه ES با استفاده از (٤) و (٥) داریم:

$$ES_p(X) = \frac{1}{p}\int_0^P [\mu + \sigma\Phi^{-1}(u)]du = \mu + \frac{\sigma}{p}\int_0^P \Phi^{-1}(u)du$$

برای محاسبه انتگرال قرار می‌دهیم $t = \Phi^{-1}(u)$؛ پس $u = \Phi(t)$ و $du = \phi(t)dt$؛ بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$ES_p(X) = \mu + \frac{\sigma}{p}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} t\phi(t)dt = \mu + \frac{\sigma}{p}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(p)} \frac{t}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

با به کار بردن تغییر متغیر $Z = \frac{t^2}{2}$ حاصل $\int_{-\infty}^{C}\frac{te^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = -\phi(c)$ از جایگذاری این مقدار در (٨) نتیجه می‌شود

$$ES_p(X) = \mu - \frac{\sigma}{p}\phi\left(\Phi^{-1}(p)\right).$$

۳-۲ توزیع t-استیودنت

توزیع t–استیودنت[۱] در مدیریت ریسک به‌ویژه در مدل بندی بازده دارایی‌های شرطی وقتی‌که دارای دم‌های پهن‌تری نسبت به توزیع نرمال هستند، مورداستفاده قرار می‌گیرد. در سال ۱۹۸۷بولرسلو از توزیع t–استیودنت در مدل بندی بازده نرخ ارز خارجی استفاده کرد.

تعریف ۳-۲-۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع t–استیودنت با n درجه آزادی است هرگاه

$$f(x) = K(n)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad ; \qquad -\infty < x < +\infty$$

که در آن $K(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$. تابع توزیع مربوطه عبارت است از:

$$F(x) = \frac{1+\mathrm{sign}(x)}{2} - \frac{\mathrm{sign}(x)}{2} I_{\frac{n}{x^2+n}}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right).$$

قضیه ۳-۲-۱ فرض کنید X دارای توزیع t–استیودنت با n درجه آزادی و q چندک مرتبه p ام آن باشد؛ در این صورت

$$ES_p(X) = \frac{1}{p}\left[-K(n)\frac{n}{n-1}\left(1+\frac{q^2}{n}\right)^{\frac{1-n}{2}}\right]$$

اثبات: فرض کنید که q چندک مرتبه p ام و درواقع جواب $F(q) = p$ باشد. در این صورت

$$q = VaR_p(X) = \sqrt{n}\,\mathrm{sign}\left(p-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{I_a^{-1}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}-1}$$

که در آن $a = 2p$ اگر $p < \frac{1}{2}$ و $a = 2(1-p)$ اگر $p \geq \frac{1}{2}$.

برای محاسبه ES از فرمول (۳) و با قرار دادن تابع چگالی داریم:

$$ES_P(X) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{q} x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

با به کار بردن تغییر متغیر $u = 1+\frac{x^2}{n}$ و $xdx = \frac{n}{2}du$ می‌توان نوشت:

$$ES_p(X) = \frac{1}{p}\left[-K(n)\frac{n}{2}\int_{1+\frac{q^2}{n}}^{+\infty} u^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right] = \frac{1}{p}\left[-K(n)\frac{n}{n-1}\left(1+\frac{q^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right]$$

۳-۳ توزیع لاپلاس

توزیع لاپلاس برای مدل بندی داده‌های متقارن که دارای منحنی فراوانی با دُم‌های قطور است، به‌کاربرده می‌شود.

[۱] Student

تعریف ۳-۳-۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع لاپلاس (دونمایی) با پارامترهای μ و σ است هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma}\exp\left(\frac{-|x-\mu|}{\sigma}\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

پارامترهای μ و σ را به ترتیب پارامترهای مکان و مقیاس می‌نامیم.

قضیه ۳-۳-۱ فرض کنید که متغیر تصادفی X دارای توزیع لاپلاس با پارامترهای μ و σ باشد؛ در این صورت

$$(۹) \quad ES_p(X) = \begin{cases} \mu + \sigma[\mathrm{Ln}(2p) - 1]\,; & p < \frac{1}{2} \\ \mu + \sigma - \frac{\sigma}{p} + \sigma\frac{1-p}{p}\mathrm{Ln}(1-p) + \sigma\left(\frac{1-p}{p}\right)\mathrm{Ln}2\,; & p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

اثبات: با استفاده از تابع چگالی، تابع توزیع به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)dt & ; \quad t < \mu \\ \frac{1}{2\sigma}\left\{\int_{-\infty}^{x}\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)dt + \int_{\mu}^{x}\exp\left(-\frac{t-\mu}{\sigma}\right)dt\right\}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & ; \; t \geq \mu. \end{cases}$$

با به کار بردن تغییر متغیر $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$ در هر یک از انتگرال‌های بالا نتیجه می‌شود که

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & x < \mu \\ 1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & x \geq \mu. \end{cases}$$

معکوس تابع توزیع به‌سادگی به دست می‌آید. داریم:

$$F^{-1}(p) = \mathrm{VaR}_p(X) = \begin{cases} \mu + \sigma\mathrm{Ln}(2p) & ; \quad p < \frac{1}{2} \\ \mu - \sigma\mathrm{Ln}[2(p-1)] & ; \quad p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

با استفاده از فرمول (٤) می‌توان نوشت:

$$ES_p(X) = \frac{1}{2}\int_0^p F^{-1}(u)du =$$

$$= \frac{1}{p}\begin{cases} \int_0^p(\mu + \sigma\,\mathrm{Ln}(2u))du & ; \quad p < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}}(\mu + \sigma\mathrm{Ln}(2u))\,du + \int_{\frac{1}{2}}^{p}(\mu - \sigma\mathrm{Ln}(2(1-u))du & ; \; p \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

برای حالت $p < \frac{1}{2}$ با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و با انتخاب $\mathrm{Ln}(2u) = t$ و $du = dv$ نتیجه می‌شود که

$$ES_p = \mu + \sigma[\mathrm{Ln}(2p) - 1].$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۷۲-۸۱

حالت $p \geq \frac{1}{2}$ به روش مشابه به دست می‌آید.

۳-۴ توزیع لجستیک

یکی دیگر از توزیع‌های متقارن پراهمیت توزیع لجستیک است. شکل توزیع لجستیک خیلی شبیه شکل توزیع نرمال است با این تفاوت که در مرکز، توزیع نرمال قله‌ای‌تر و دُم‌های نازک‌تری نسبت به توزیع لجستیک دارد.

تعریف ۳-٤-۱ متغیر تصادفی X دارای توزیع لجستیک است هرگاه

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left[1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-2} \quad , -\infty < x < +\infty$$

تابع توزیع برابر است با

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

قضیه ۳-٤-۱ اگر X دارای توزیع لجستیک با پارامترهای μ و σ باشد آنگاه

$$ES_p(X) = \mu + \sigma\,\mathrm{Ln}p + \sigma\frac{1-p}{p}\mathrm{Ln}(1-p).$$

اثبات: معکوس تابع توزیع برابر است با $F^{-1}(x) = \mu + \sigma\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{1-x}\right)$ درنتیجه

$$VaR_p(X) = F^{-1}(p) = \mu + \sigma\,\mathrm{Ln}\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

برای محاسبه ES داریم:

$$E_p(X) = \frac{1}{p}\int_0^p VaR(u)du$$

$$= \frac{1}{p}\left[\int_0^p \mu du + \sigma\int_0^p \mathrm{Ln}\left(\frac{u}{1-u}\right)du\right.$$

$$\left.= \mu + \frac{\sigma}{p}\int_0^p \mathrm{Ln}\,u du - \int_0^p \mathrm{Ln}(1-u)du\right] = \mu + \frac{\sigma}{p}[I_1 - I_2].$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء داریم:

$$\begin{cases} I_1 = u\,\mathrm{Ln}\,u - u\Big|_0^p = p\,\mathrm{Ln}p - p \\ I_2 = u\,\mathrm{Ln}\,u - u\Big|_{1-p}^{p} = -(1-p)\mathrm{Ln}(1-p) - p. \end{cases}$$

بنابراین

$$ES_p(X) = \mu + \sigma\,\mathrm{Ln}p + \sigma\frac{1-p}{p}\mathrm{Ln}(1-p).$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۷۲-۸۱

۴-محاسبات عددی

۴-۱ داده‌های موردبررسی

در این مقاله، به‌منظور محاسبه VaR و ES از داده‌های روزانه قیمت سهام شرکت کوکاکولا در بازه زمانی اول ژانویه ۲۰۰۱ تا سی‌ویکم دسامبر ۲۰۱۰ استفاده‌شده است. داده‌ها از سایت یاهو فایننانس[۱] گرفته‌شده که شامل شش ستون ازجمله تاریخ، قیمت اولیه سهام (قیمت سهام در لحظه باز شدن بازار سهام)، بالاترین قیمت و پایین‌ترین قیمت، قیمت نهایی (قیمت سهام در زمان بستن بازار سهام) و حجم معاملات می‌باشد. قیمت‌ها بر اساس دلار آمریکا هستند.

۴-۲ محاسبه VaR و ES

همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، درروش پارامتری، دقت بالا در محاسبه اندازه‌های ریسک به برازش تابع توزیع مناسب به سری بازده سهام بستگی دارد، ازاین‌رو تحلیل داده‌ها از طریق سری بازدهی سهام یعنی $X_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ انجام‌گرفته است که در آن P_{t-1} قیمت اولیه و P_t قیمت پایانی سهام است. برای بررسی همبستگی سریالی داده‌ها از آزمون دوربین و واتسون استفاده‌شده است که بر مبنای نتایج به‌دست‌آمده، داده‌ها فاقد همبستگی سریالی است. برای برازش تابع چگالی مناسب به سری بازده سهام از پکیج VaRES در نرم‌افزار آماری R استفاده‌شده است. با توجه به هیستوگرام داده‌ها، شناخته‌شده‌ترین توزیع‌های متقارن ازجمله نُرمال، t –استیودنت، لاپلاس و لُجستیک با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی و توسط توابع موجود در VaRES به داده‌ها برازش داده‌شده است. بسندگی برازش‌های هر چهار توزیع، توسط آزمون یک نمونه‌ای کولموگروف–اسمیرنوف[۲] مورد ارزیابی قرارگرفته است. برآورد پارامترها، مقادیر معیار اطلاع آکائیک، آماره کولموگروف–اسمیرنوف و مقادیر (P – Value) برای هر چهار توزیع در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱- برآورد پارامترها، مقادیر معیار اطلاع آکائیک، آماره کولموگروف-اسمیرنوف و P – Value برای توزیع نُرمال، t-استیودنت، لجستیک و لاپلاس.

	MLE	-2 log L	K-S	P-value	AIC
Normal	$\hat{\mu}$ = ۰/۰۰۰۴ $\hat{\sigma}$ = ۰/۰۱۱۰	-۹۵۲۸/۶۵۲	۰/۰۶۸۳	۰/۰۰	-۹۵۲۴/۶۵۲
T	$\hat{n}$ =۲۴۰۶۰۰۵	۲۸۳۰/۵۱۷	۰/۴۸۲۹	۰/۰۰	۲۸۳۲/۵۱۷
Logestic	$\hat{\mu}$ = ۰/۰۰۰۱, $\hat{\sigma}$ =۸۸۰۱/۶۲۵۴	۳۲۲۴۴/۴۸	۰/۵	۰/۰۰	۳۲۲۴۸/۴۸
Laplace	$\hat{\mu}$ = ۰/۰۰۰۴, $\hat{\sigma}$ =-۴/۷۸۳۵	-۹۶۸۱/۰۷۹	۱/۷۰۸۹	۰/۶۲	-۹۶۷۷/۰۷۹

با توجه به نتایج جدول ۱، مشاهده می‌شود که به‌جز توزیع لاپلاس، در توزیع‌های دیگر مقدار P – Value کمتر از مقدار ۰,۰۵ است و این به معنای این است که آزمون کولموگروف–اسمیرنوف در سطح معناداری ۰,۰۵ رد می‌شود و درنتیجه، داده‌ها به‌خوبی به منحنی‌های توزیع‌های مذکور برازش می‌شود.

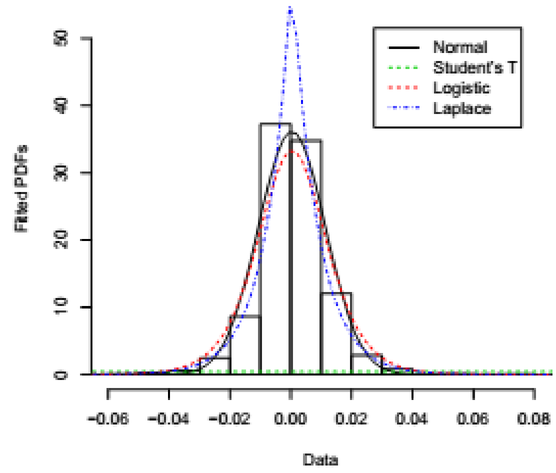
نمودارهای مربوط به هیستوگرام و توابع چگالی برازش داده‌شده در شکل ۱ آمده است. برای رسم این نمودارها از توابع dNormal، dT، dLogestic و dLaplace در بسته نرم‌افزاری VaRES استفاده‌شده است. نمودارهای مربوط به VaR و ES برای هر چهار توزیع و در سطوح مختلف p در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده است. مقادیر VaR و Es در

---

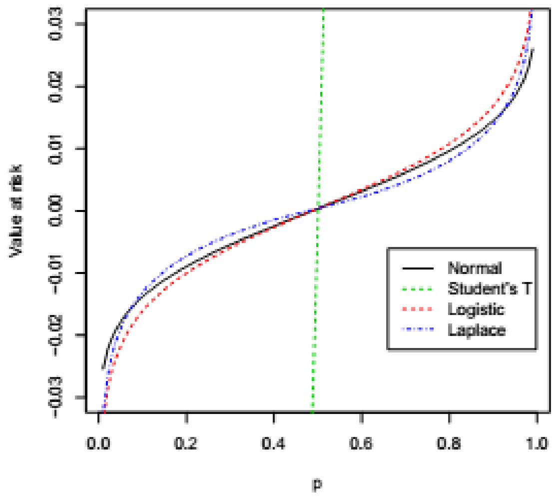
[۱] Yahoo Finance

[۲] Kolmogorov-Smirnov

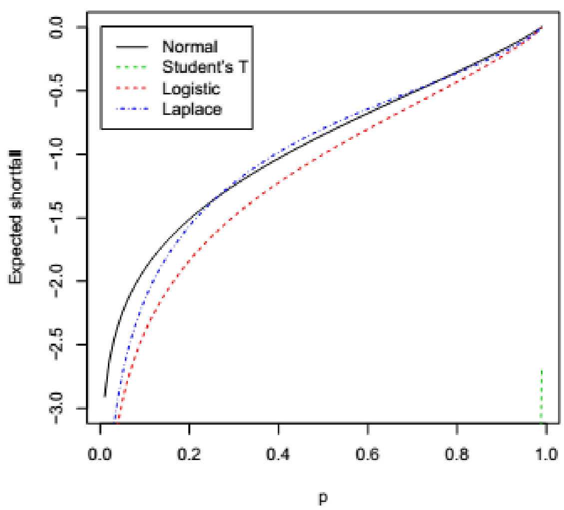
محور عمودی شکل‌های ۲ و ۳ بر مبنای روابط به‌دست‌آمده در بخش‌های ۳-۱ تا ۳-٤ برحسب مقادیر مختلف p در محور افقی محاسبه و نمودارهای مربوط به هر توزیع به رنگ خاصی رسم گردیده است.



شکل ۱- هیستوگرام و توابع چگالی برازش داده‌شده به داده‌ها.



شکل ۲- تخمین ارزش در معرض خطر برای داده‌های شرکت کوکاکولا.



شکل ۳- تخمین کسری مورد انتظار برای داده‌های شرکت کوکاکولا.

۵- نتیجه‌گیری

رویکرد پارامتری محاسبه VaR و Es ازجمله رویکردهای مهم در مدیریت ریسک بوده که در مقاله حاضر برای چهار توزیع متقارن این دو کمیت محاسبه گردید. برای بررسی مزیت‌های این دو کمیت، داده‌های روزانه قیمت سهام شرکت کوکاکولا برای ۱۰ سال موردبررسی قرار گرفت. همچنان که در شکل‌های و مشاهده شد، در سطوح اطمینان مختلف مقادیر ES نسبت به مقادیر VaR برای این سهام به نحو واضحی بیشتر است. این مطلب در خصوص همه توزیع‌های برازش داده‌شده صادق است. این مقدار، بیشتر بر این موضوع دلالت دارد که یک تصمیم‌گیرنده در مقام مدیریت ریسک بازار درصورتی‌که از VaR استفاده کند مقدار ریسک را کمتر از حد واقع در نظر می‌گیرد، یعنی در شرایط نامطلوب و غیرعادی بازار، VaR می‌تواند اطلاعات نادرستی را به دست دهد و این دقیقاً همان موضوعی است که در ادبیات مدیریت ریسک از آن به‌عنوان کاستی‌های VaR یادشده است. در مقابل، اتکا به ES می‌تواند این اطمینان نسبی را برای تصمیم‌گیرندگان به ارمغان آورد که مقدار زیان متحمل یا همان ریسک موردنظر را کمتر از آنچه هست در نظر نگرفته‌اند. محاسبات مربوط به کمیت‌های VaR و ES در این مقاله، معایب استفاده از کمیت VaR به‌عنوان یکی از کمیت‌های مهم در مدیریت ریسک را به‌خوبی نشان داد و در مقابل مزیت به‌کارگیری کمیت ES را مشخص نمود.

منابع

Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of banking & finance*, *26*(7), 1487-1503.

Artzner, P. (1997). Thinking coherently. *Risk*, 68-71.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, *9*(3), 203-228.

Nadarajah, S., Zhang, B., & Chan, S. (2014). Estimation methods for expected shortfall. *Quantitative finance*, *14*(2), 271-291.

Oh, S., & Moon, S. J. (2006). Comparative analysis of portfolio risk measures based on EVT-copula approach during financial crises. *Asia-Pacific journal of financial studies*, *35*(3), 175-205.

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, *26*(7), 1443-1471.

Taylor, J. W. (2008). Estimating value at risk and expected shortfall using expectiles. *Journal of financial econometrics*, *6*(2), 231-252.

Yamai, Y., & Yoshiba, T. (2002). Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk: their estimation error, decomposition, and optimization. *Monetary and economic studies*, *20*(1), 87-121.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۱)، بهار ۱۳۹۷، صفحه: ۸۱-۷۲