Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۳، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷

رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری با استفاده از منطق فازی

سید حمزه میرزایی*

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک، ایران.

چکیده

یکی از مشکلات مدل‌های بر پایه DEA[1] برای رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری اولویتی آن است که به هر یک از گزینه‌ها (کاندیدها) اجازه می‌دهد تا بردار وزن خودش را داشته باشد. بنابراین، گزینه‌ها با بردارهای وزن متفاوتی ارزیابی می‌شود. در این پژوهش، ما مدلی را بر اساس تئوری فازی ارائه می‌کنیم تا نقاط ضعف مدل‌های پیشین را برطرف کنیم. این مدل براساس حل مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه به‌کمک منطق فازی پایه‌گذاری و از این طریق یک بردار از وزن‌های مشترک ارائه شده است؛ در نهایت گزینه‌ها رتبه‌بندی شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، منطق فازی، سیستم‌های رأی‌گیری.

دریافت: ۱۳۹۷/۷/۱۹ اصلاح: ۱۳۹۷/۱۰/۱۶ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۱۶

۱- مقدمه

شیوه‌ی دست‌یابی یک گروه یا رتبه‌بندی اجتماعی از یک مجموعه از اولویت‌های فردی (که از وزن‌های مختلف برای گزینه‌های مختلف استفاده می‌کند)، یک جنبه‌ی مهم در زمینه‌ی تصمیم‌گیری می‌باشد. این گروه از فرآیندها شامل مواردی می‌باشد که در آن هر تصمیم‌گیرنده اولویت‌های خود را براساس ترتیب رتبه‌ی گزینه‌ها (کاندیدها) بیان می‌کند؛ یا مواردی که در آن‌ها از هر تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود یک زیرمجموعه از گزینه‌ها را از یک مجموعه شدنی انتخاب کرده و سپس آن‌ها را از پایین‌ترین تا بالاترین اولویت، رتبه‌بندی کند. در میان فرآیندهای توسعه‌یافته برای این موقعیت‌ها ، یک خانواده شناخته‌شده از روش‌ها، قوانین نمره‌دهی وزنی است. قوانین نمره‌دهی وزنی به‌وسیله‌ی محاسبه یک امتیاز برای هر گزینه عمل می‌کند که به رتبه‌ی آن گزینه در ترتیب اولویت‌های فردی بستگی دارد. در ادامه، گزینه‌ها توسط تجمیع امتیازهای دریافتی رتبه‌بندی می‌شود. کوک و کریس (۱۹۹۰) نخستین بار بیان کردند که مدل‌های شامل یک مجموعه اعمال‌شده از وزن‌ها نمی‌توانند یک ارزیابی کلی عادلانه را برای رتبه‌بندی گزینه‌ها فراهم آورند. هر ارزیابی که دلالت بر استفاده از یک بردار نمره‌دهی خارجی دارد، تا حدودی دلخواه است. توجه داشته باشید که یک گزینه‌ی غیربرنده با بردار وزن درنظرگرفته‌شده برای ارزیابی می‌تواند با استفاده از بردارهای وزنی دیگر برنده باشد. کوک و کریس(۱۹۹۰) مدل تجمیع اولویت اولیه بر پایه‌ی روش‌های DEA را بر اجتناب از شخصی گرایی در انتخاب یک بردار

[1]Data Envelopment Analysis

*عهده‌دار مکاتبات: sh_mirzaei82@yahoo.com

از وزن‌ها ارائه کردند. گرین و همکاران (۱۹۹۶) برای تمایز گزینه‌های کارا، استفاده از روش ارزیابی متقاطع را ارائه کردند. هاشمیتو (۱۹۹۷) استفاده از مدل حذفی DEA/AR[1] را برای مدل ناحیه‌ی اطمینان کوک و کریس (۱۹۹۰) ارائه کرد. روش‌های ذکر شده، مستقل از گزینه‌های ناکارا نبودند. این روش‌ها از اطلاعاتی که مربوط به گزینه‌های ناکارا بود، برای متمایز کردن گزینه‌ها کارا استفاده می‌کردند. اوباتا و ایشی (۲۰۰۳) بر این نظر بودند که اطلاعات مربوط به گزینه‌های ناکارا و هم‌چنین این بی‌ثباتی نباید در متمایز کردن گزینه‌های کارا مورد استفاده قرار گیرند. بنابراین آن‌ها مدلی ارائه کردند که مستقل از واحدهای ناکارا بود. برای دوری کردن از انتخاب تابع شدت تمایز و هم‌چنین انتخاب عامل تمایز نگوچی و همکاران (۲۰۰۲) مدل ترتیب قوی DEA را ارائه کردند. یکی از اشکالات اصلی در مدل‌های بر پایه DEA این است که به هر واحد اجازه می‌دهد تا بردار وزن خودش را داشته باشد؛ به‌عبارت‌دیگر هر واحد در بهترین شرایط خودش ارزیابی می‌شود. این انعطاف‌پذیری باعث ارزیابی واحدها با یک مجموعه از وزن‌های مختلف خواهد شد. بنابراین مقایسه و رتبه‌بندی واحدها در شرایط یکسان امکان‌پذیر نخواهد بود. برای دوری کردن از ظهور وزن‌های مختلف، مدلی برای یافتن یک مجموعه از وزن‌های مشترک، نخستین بار توسط کوک و همکاران (۱۹۹۰) ارائه و توسط رول و همکاران (۱۹۹۱) کامل شد. پس از آن، مدل‌های مختلفی برای محاسبه‌ی مجموعه وزن‌های مشترک ارائه گردید؛ بنابراین با استفاده از وزن‌های مشترک جهانشاهلو و همکاران (۲۰۰۵) سعی در رتبه‌بندی کاندیدهای کارا نمودند. یک مدل دومرحله‌ای برای تعیین یک رتبه‌بندی گروهی از گزینه‌ها توسط کانترراس (۲۰۱۱) با استفاده از وزن‌های مشترک ارائه شد. در این پژوهش سعی شده است با ارائه مدلی جدید، نقاط ضعف مدل‌های گذشته برطرف شود. مدل پیشنهادی بر مبنای حل مدل‌های تصمیم‌گیری چندهدفه به‌کمک تئوری فازی طراحی که پس از حل منجر به ایجاد یک مجموعه از وزن‌های مشترک شده است. با بهره‌گیری از این مدل ،هدف اصلی تحقیق یعنی رتبه‌بندی بهتر گزینه‌ها نسبت به مدل‌های پایه، محقق می‌گردد. ادامه مقاله به این صورت است که در بخش دوم سیستم رأی‌گیری اولویتی توضیح داده می‌شود. در بخش سوم روش حل مدل‌های تصمیم‌گیری چندهدفه به‌کمک تئوری فازی بیان می‌شود. در بخش چهارم، ما روش خود را برای رتبه‌بندی کاندیدها در سیستم رأی‌گیری اولویتی باتوجه‌به تئوری فازی ارائه می‌کنیم. در بخش پنجم دو مثال عددی را ارائه می‌نماییم و در بخش ششم نتیجه‌گیری می‌نماییم.

۲- سیستم رأی‌گیری اولویتی

فرض کنید $A=\{A_۱,...,A_n\}$ یک مجموعه از $n(n>۳)$ کاندید باشد که توسط یک گروه از تصمیم‌گیرنده‌ها ارزیابی شده است و هر تصمیم‌گیرنده اولویت‌هایی را با انتخاب یک زیرمجموعه از k گزینه (یا مجموعه کامل A) و رتبه‌بندی آن‌ها از بالاترین تا پایین‌ترین اولویت ارائه کرده است. بنابراین یک بردار ترتیب را می‌توان از اولویت‌های هر تصمیم‌گیرنده همانند یک بردار که شامل اسامی گزینه‌ها به ترتیب اولویت می‌باشد را به‌دست آورد. از هر بردار ترتیب که به‌روش گفته‌شده به‌دست می‌آید، می‌توانیم یک بردار رتبه را با اختصاص دادن عدد مکان هر گزینه در بردار ترتیب به‌دست آوریم. مقدار ۱ به مهم‌ترین گزینه و n به کم‌اهمیت‌ترین گزینه اختصاص می‌یابد. توجه داشته باشید که یک بردار رتبه شامل مقدار رتبه هر گزینه می‌باشد، درصورتی‌که بردار ترتیب شامل اسامی گزینه‌ها است. بنابراین در چارچوب رأی‌گیری اولویتی، هر کاندید مانند گزینه r تعداد $v_{r۱}$ رأی را در مکان اول ، $v_{r۲}$ رأی را در مکان دوم...و v_{rk} $(r=۱,..,n)$ رأی را در مکان kام دریافت می‌کند. مسئله اصلی، به‌کارگرفتن این آرا در روشی معقول، برای به‌دست آوردن یک شاخص مطلوبیت سراسری برای هر کاندید است. نخستین بار کوک و کریس (۱۹۹۰) مدلی را بر اساس مدل‌های DEA به‌صورت زیر ارائه کردند.

[1] DEA/Assurance Region

$$V_p = Max \sum_{j=1}^{k} w_j v_{pj}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{k} w_j v_{rj} \le 1 \quad r = 1,..,n$$

$$w_j - w_{j+1} \ge d(j,\varepsilon) \quad j = 1,..,k-1 \tag{1}$$

$$w_k \ge d(k,\varepsilon),$$

که در آن w_j وزن مکان رتبه j ام، v_{rj} تعداد آرا بدست آمده توسط گزینه‌ی r ام در مکان‌ jام ، ε یک عدد غیر ارشمیدسی بسیار کوچک ، $d(j,\varepsilon)$ تابع شدت تمایز و V_p مقدار تجمیع به‌دست آمده توسط گزینه‌ی P ام $(P = 1,..,n)$ است. مدل (۱) برای هر گزینه حل می‌شود و هر گزینه که دارای مقدار تجمیع بیشتری باشد دارای رتبه بهتری خواهد بود. در این مدل با فرض n خروجی که همان تعداد آرای به‌دست‌آمده توسط هر کاندید است و یک ورودی با مقدار واحد، معادل مدل معروف DEA/AR خواهد بود ((تامپسون وهمکاران، ۱۹۸۶) را ببینید.). محدودیت‌های $w_j - w_{j+1} \ge d(j,\varepsilon)$ ناحیه‌ی اطمینان را ارائه می‌کنند. در این مدل مانند مدل‌های DEA، هر کاندید مانند یک واحد تصمیم‌گیری (DMU) در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱- کاندید P با مدل (۱) کارآ (برنده) است هرگاه $V_P^* = 1$ باشد.

بر اساس فلسفه‌ی DEA در مدل‌های DEA به هر گزینه اجازه داده می‌شود تا بردار وزن خود را داشته باشد. به‌این‌ترتیب از شخصی‌گرایی در انتخاب بردارهای وزن جلوگیری خواهد شد. ولی ازطرفی، هر گزینه در بهترین شرایط خودش ارزیابی می‌شود و این انعطاف پذیری مدل‌های DEA باعث می‌شود که بردارهای وزنی مختلفی ایجاد و رتبه‌بندی گزینه‌ها بدین‌طریق با مشکلاتی مواجه شود. بنابراین در ادامه، مدل ارائه شده سعی در رفع نقاط ضعف مدل های قبلی دارد.

۳- حل مسائل چندهدفه به‌کمک تئوری فازی

تصمیم‌گیری چندهدفه یکی از شاخص‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره است. مسائل تصمیم‌گیری چندهدفه همزمان به دنبال بهینه کردن چندین هدف که با هم در تضاد می باشند با وجود محدودیت‌های مختلف هستند. شکل کلی یک برنامه‌ریزی چندهدفه به‌صورت مدل زیر خواهد بود:

$$Max \ \{f_1(x),...,f_m(x)\}$$

$$\text{s.t.} \tag{2}$$

$$x \in X \subset R^n,$$

که در آن $f_i(x)$ بیانگر i امین تابع هدف و X یک مجموعه از جواب‌های شدنی است که داریم $X = \{x \mid g_t(x) \ge 0 \ , t = 1,...,s\}$. در مسائل یک‌هدفه، محدودیت‌ها همگی در جهتی حرکت می‌کنند تا تابع هدف را بهینه سازند اما در مسائل چندهدفه هر یک از توابع هدف درصدد هستند تا محدودیت‌ها را به‌جهت دلخواه خود حرکت دهند و این تضاد سرمنشأ مشکلات حل مسائل چندهدفه است. مسائل چندهدفه همواره به دنبال بهترین جوابی هستند که هر یک از اهداف تا حد ممکن برآورده شود.

تعریف ۲- نقطه $x^* \in X$ را یک جواب بهینه (غیر مغلوب) مسئله (۲) گویند هرگاه هیچ نقطه‌ی دیگری از X مانند $x \in X$ یافت نشود که $f_i(x) \ge f_i(x^*)$ $(i = 1,...,m)$ باشد.

اما بهینگی همزمان کلیه ی اهداف، امری غیرممکن به‌نظر می‌رسد . برای حل مسائل چندهدفه راه‌حل‌های بسیاری ارائه شده است که از میان آن‌ها حل فازی مسائل چندهدفه (کهرمان، ۲۰۰۸) در ادامه تشریح می‌شود. برای حل، هر یک از

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳ ، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷ ، صفحه: ۳۲۴-۳۱۷

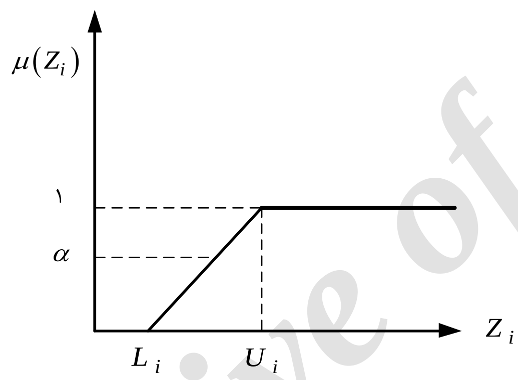
توابع هدف با در نظر گرفتن تمام محدودیت‌ها یک بار ماکزیمم‌سازی و بار دیگر مینیمم‌سازی می‌شود. برای ماکسیمم‌سازی مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & U_i = Max\ f_i(x) \quad i = 1,\dots,m \\ \text{s.t.} & \\ & x \in X \subset R^n. \end{aligned} \qquad (۳)$$

برای مینیمم‌سازی مدل زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & L_i = Min\ f_i(x) \quad i = 1,\dots,m \\ \text{s.t.} & \\ & x \in X \subset R^n. \end{aligned} \qquad (۴)$$

با حل دو مدل تک‌هدفه‌ی (۳) و (۴) کران‌های توابع هدف به‌دست می‌آیند. برای تابع هدف i ام (i=1,..,m) کران بالا را با U_i و کران پایین را با L_i نمایش می‌دهیم. حال، تابع عضویت تابع هدف i ام را به‌صورت شکل ۱ خواهیم داشت.



شکل ۱- تابع عضویت تابع هدف i ام.

با توجه به شکل ۱ تابع عضویتی به‌صورت (۵) را می‌توان تعریف کرد:

$$\mu(Z_i) = \begin{cases} 0 & Z_i < L_i \\ \dfrac{(Z_i - L_i)}{U_i - L_i} & L_i \le Z_i \le U_i \\ 1 & Z_i > U_i. \end{cases} \qquad (۵)$$

بنابراین توابع هدف به‌شکل فازی با تابع عضویت مشخص نوشته شده‌است که هر کدام به‌مقدار بهینه‌ی خود نزدیک‌تر شود دارای مطلوبیت بیشتری خواهد بود. برای ایجاد تغییرات در مدل، α_i $(i = 1,\dots,m)$ به‌صورت درصدی که تابع هدف i ام به‌مقدار بهینه‌ی خود نزدیک شده است، تعریف می‌شود. در واقع مقدار α_i $(i = 1,\dots,m)$ کم‌ترین تابع عضویت تابع هدف است؛ $\alpha_i = \min(Z_i)$ $(i = 1,..,m)$ و $\alpha_i \le \mu(Z_i)$ $(i = 1,\dots,m)$ در فرآیند حل مسئله سعی می‌شود تا مقدار α_i $(i = 1,\dots,m)$ به حداکثر مقدار خود برسد؛ یعنی هر یک از توابع هدف تا حدممکن به‌مقدار بهینه‌ی خود نزدیک شود؛ بنابراین مدل (۲) به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
&Max \ \sum_{i=1}^{m} \pi_i \alpha_i \\
&\text{s.t.} \\
&\alpha_i \leq (Z_i - L_i)/(U_i - L_i) \quad i = 1,\ldots,m \\
&x \in X \subset R^n \\
&\alpha_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m \\
&x \geq 0
\end{aligned} \tag{۶}
$$

در مدل (۶) π_i وزن اعمال‌شده برای تابع هدف i ام $(i = 1,\ldots,m)$ است که باید مشخص باشد و در غیر این صورت برابر ۱ فرض می‌شود. حال، مدل (۶) را می توان به صورت مدل (۷) باز نویسی کرد.

$$
\begin{aligned}
&Max \ \sum_{i=1}^{m} \pi_i \alpha_i \\
&\text{s.t.} \\
&z_i \geq U_i - (U_i - L_i)(1 - \alpha_i) \quad i = 1,\ldots,m \\
&x \in X \subset R^n \\
&\alpha_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,m \\
&x \geq 0
\end{aligned} \tag{۷}
$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود فرم یک مسئله‌ی چندهدفه به‌شکل مسئله‌های تک‌هدفه و دارای جواب بهینه و قابل حل توسط نرم‌افزارهای برنامه‌ریزی خطی تبدیل شده است. اما وجود α_i $(i = 1,\ldots,m)$ نشان می‌دهد توابع هدف هم‌چنان به‌مقدار بهینه‌ی خود نمی‌رسند و این امر تا حدودی حاصل می‌گردد.

۴- مدل پیشنهادی برپایه‌ی تئوری فازی

همان‌طور که ذکر شد پژوهش حاضر به دنبال ارائه‌ی مدلی برای مقایسه‌ی کارایی واحدهای مختلف است. در مدل‌های پایه برای هر یک از واحدهای تصمیم‌گیری به‌صورت جداگانه، کارایی بهینه می‌شود، اما همان‌طور که در مدل (۷) مشاهده می‌شود کارایی کلیه‌ی واحدها با یکدیگر سنجیده می‌شود . با این روش، مقایسه‌ی کارایی واحدها بایکدیگر امکان پذیر است زیرا همگی باهم درنظر گرفته شده است. مدل (۱) را می‌توان به‌صورت یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفه مانند مدل (۸) درنظر گرفت (ببینید (کورنبلوس، ۱۹۹۱)).

$$
\begin{aligned}
&Max \left\{ \sum_{j=1}^{k} w_j v_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{k} w_j v_{nj} \right\} \\
&s.t. \\
&\sum_{j=1}^{k} w_j v_{rj} \leq 1 \quad r = 1,\ldots,n \\
&w_j - w_{j+1} \geq d(j,\varepsilon) \quad j = 1,\ldots,k-1 \\
&w_k \geq d(k,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{۸}
$$

مشاهده می‌شود که مدل فوق یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفه است؛ بنابراین ما برای حل آن از روش ارائه‌شده در قسمت قبل استفاده می‌کنیم. بنابراین مدل (۸) را یک بار برای محاسبه‌ی کران بالای کارایی و یک بار برای کران پایین کارایی برای هر یک از کاندیدها بازنویسی می‌کنیم. مدل (۸) برای محاسبه‌ی کران بالای کارایی کاندید p به‌صورت مدل (۹) است.

$$U_p = Max \sum_{j=۱}^{k} w_j v_{pj}$$

s.t.

$$\sum_{j=۱}^{k} w_j v_{rj} \le ۱ \quad r = ۱,..,n$$
$$w_j - w_{j+۱} \ge d(j,\varepsilon) \quad j = ۱,..,k\text{-}۱$$
$$w_k \ge d(k,\varepsilon). \qquad (۹)$$

۳۲۲

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳ ، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷ ، صفحه: ۳۲۴-۳۱۷

و برای محاسبه‌ی کران پایین کارایی کاندید p ، مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$L_p = Min \sum_{j=۱}^{k} w_j v_{pj}$$

s.t.

$$\sum_{j=۱}^{k} w_j v_{rj} \le ۱ \quad r = ۱,..,n$$
$$w_j - w_{j+۱} \ge d(j,\varepsilon) \quad j = ۱,..,k\text{-}۱$$
$$w_k \ge d(k,\varepsilon). \qquad (۱۰)$$

مشاهده می‌شود که $W = (w_۱,...,w_k) = \underbrace{(۰,...,۰)}_{k \text{ تا}}$ یک جواب شدنی مدل (۱۰) است و چون مسئله، مینیمم‌سازی است پس یک جواب بهینه‌ی این مسئله نیز می‌باشد؛ بنابراین نیازی به حل این مدل نداریم. پس مدل (۹) را برای هر یک از کاندیدها حل و کران های بالا توابع هدف را مشخص می‌کنیم. پس از محاسبه‌ی کران‌های بالا مدل نهایی را به‌صورت زیر ارائه می‌کنیم:

$$Max \sum_{r=۱}^{n} \pi_r \alpha_r$$

s.t.

$$\sum_{j=۱}^{k} w_j v_{rj} \ge U_r - (U_r - L_r)(۱-\alpha_r) \quad r = ۱,...,n$$
$$\sum_{j=۱}^{k} w_j v_{rj} \le ۱ \quad r = ۱,..,n$$
$$w_j - w_{j+۱} \ge d(j,\varepsilon) \quad j = ۱,..,k\text{-}۱$$
$$w_k \ge d(k,\varepsilon). \qquad (۱۱)$$

با حل مدل (۱۱) توسط نر افزارهای برنامه‌ریزی خطی، جواب مسئله به‌دست می‌آید که همان وزن ورودی‌ها وخروجی ها است. پس از جای‌گذاری وزن‌ها در رابطه‌ی $V_p = \sum_{j=۱}^{k} w_j v_{pj}$ ، کارایی هر یک از واحدها به‌دست می آید.

۵- مثال عددی

در این بخش، دو مثال عددی را ارائه می‌کنیم. در مثال اول، مدل پیشنهادی را توضیح داده و در مثال دوم، مدل ارائه‌شده را با نتایج به‌دست‌آمده از چند مدل رتبه‌بندی دیگر مقایسه می‌کنیم.

۱-۵ مثال عددی

مثال زیر از کوک و کریس (۱۹۹۰) انتخاب شده است که در آن تعداد آرای به‌دست‌آمده توسط ۴ کاندید در جدول (۱) خلاصه شده است.

جدول ۱- تعداد رأی های به‌دست آمده.

کاندید	v_{r1}	v_{r2}
۱	۶	۸
۲	۴	۱۱
۳	۸	۲
۴	۳	۰

ما در این‌جا مانند کوک و کریس (۱۹۹۰) قرار می‌دهیم $d(j,\varepsilon)=0$ ، $\pi_r=1(r=1,...n)$ ؛ کران‌های پایین را برابر صفر درنظرگرفته و برای محاسبه‌ی کران‌های بالا، مدل (۹) را حل می‌کنیم. بنابراین داریم $U_1=1$، $U_2=1$، $U_3=1$ و $U_4=0/375$. حال باتوجه‌به کران‌های به‌دست‌آمده، مدل (۱۱) را حل می‌کنیم. پس از حل داریم $W=(w_1,w_2)=(0/1154,0/0385)$. باتوجه‌به وزن‌های به‌دست‌آمده، مقدار تجمیع را برای هر یک از گزینه‌ها باتوجه‌به رابطه‌ی $V_r=\sum_{j=1}^{2}w_j v_{rj}$ که $(r=1,...,4)$ محاسبه می‌کنیم، خواهیم داشت $V_1^*=1/004$ ، $V_2^*=0/8851$، $V_3^*=1/002$ و $V_4^*=0/3462$ ؛ بنابراین کاندید شماره‌ی یک دارای بهترین رتبه خواهد بود و کاندید برنده خواهد بود.

۲-۵ یک مثال مقایسه‌ای

یک گروه از تصمیم‌گیرنده‌ها از میان ۷ گزینه که با $A=\{A_1,..,A_7\}$ نشان داده شده است، بایستی دو گزینه‌ی بهتر را انتخاب و رتبه‌بندی کنند. نتایج به‌دست‌آمده از تصمیم‌گیرنده‌ها در جدول (۲) خلاصه شده است (این مثال از گرین و همکاران (۱۹۹۶) انتخاب شده است).

جدول ۲- تعداد رأی‌های به‌دست‌آمده.

گزینه‌ها	v_{r1}	v_{r2}
A_1	۳۲	۱۰
A_2	۲۸	۲۰
A_3	۱۳	۳۶
A_4	۲۰	۲۷
A_5	۲۷	۱۹
A_6	۳۰	۸
A_7	۰	۳۰

برای حل این مثال نیز مانند مثال قبل درنظر می‌گیریم $d(j,\varepsilon)=0$ و کران پایین را برابر صفر درنظر می‌گیریم. کران‌های بالا را از حل مدل (۱۰) به‌دست می‌آوریم. با حل مدل (۱۱) وزن‌های مکان رتبه به‌صورت $W=(w_1,w_2)=(0/0214,0/0201)$ به‌دست خواهدآمد. نتایج و رتبه‌ی گزینه‌ها در جدول (۳) خلاصه شده است. نتایج به‌دست‌آمده از چند مدل رتبه‌بندی دیگر نیز برای مقایسه با مدل ارائه‌شده آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل ارائه‌شده توسط اُباتا و ایشی (۲۰۰۳) قادر به رتبه‌بندی گزینه‌های (۴)، (۵)، (۶) و (۷) نیست. هم‌چنین مدل ارائه‌شده

توسط کوک و کریس (۱۹۹۰) با تغییر مقدار ε ، رتبه‌بندی‌های متفاوتی را به‌دست می‌دهد و مانند مدل DEA/AR Exclusion (هاشمیتو، ۱۹۹۷) از بردارهای وزنی متفاوت در رتبه‌بندی گزینه‌ها استفاده می‌کند. مدل ارائه‌شده توسط کانترراس (۲۰۱۱) یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط است که روش حل این نوع برنامه‌ریزی بسیار مشکل‌تر از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی است؛ هم‌چنین با رجوع به کانترراس (۲۰۱۱) می‌توان میزان پیچیدگی را که به‌مراتب بیش‌تر از مدل ارائه‌شده در این مقاله است مشاهده کرد. برای رتبه‌بندی با روش ارائه‌شده در این مقاله کافی است تنها n+1 مدل را حل کنیم که همه به‌صورت برنامه‌ریزی خطی بوده و به‌آسانی قابل‌حل به‌کمک نرم‌افزارهای حل مسائل برنامه ریزی خطی هستند.

جدول ۳- امتیاز و رتبه‌ی گزینه‌ها.

	Cook&Krees Model $d(j,\varepsilon)=\varepsilon$		DEA/AR Exclusion Model		Ishii & Obata Model		I. Contreras Model		Proposed Method	
گزینه‌ها	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه	امتیاز	رتبه
A_1	۰/۹۷۴۰	۲	۱/۰۷۴۵	۱	۳۲	۱	۲۷/۲۹	۱	۰/۸۸۵۸	۵
A_2	۱	۱	۱/۰۴۲۸	۲	۲۵/۷۱۴	۲	۲۶/۲۹	۲	۱/۰۰۱۲	۲
A_3	۰/۸۱۵۱	۶	۱/۰۲۰۸	۳	۲۴/۵	۳	۱۷/۹۳	۶	۱/۰۰۱۸	۱
A_4	۰/۸۸۱۳	۵	۰/۹۶۹۳	۴	نشدنی	-	۲۱/۵۰	۵	۰/۹۷۰۷	۳
A_5	۰/۹۶۰۵	۳	۰/۹۶۱۱	۵	نشدنی	-	۲۵/۲۹	۴	۰/۹۵۹۷	۴
A_6	۰/۸۹۵۱	۴	۰/۹۳۷۵	۶	نشدنی	-	۲۵/۲۹	۳	۰/۸۰۲۸	۶
A_7	۰/۳۹۴۰	۷	۰/۶۱۲۲	۷	نشدنی	-	۶/۴۳	۷	۰/۶۰۳	۷

۶- نتیجه‌گیری

یکی از مشکلات مدل‌های بر پایه‌ی DEA، ایجاد بردار وزن‌های مختلف است که این موضوع باعث می‌شود که رتبه‌بندی واحدها، تحت ارزیابی دچار مشکل شده و تصمیم‌گیرنده نتواند واحد کاراتر را مشخص کند. برای رفع این مشکل مدل‌هایی توسط محققین ارائه شده است که یک بردار از وزن‌های مشتر ک را ارئه می‌کند. در پژوهش حاضر، سعی گردید تا با نگرشی نو به مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، مدلی مناسب برای رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری ارائه، تشریح و حل شود. مدل ارائه‌شده با به‌دست آوردن وزن‌های مشترک، سعی در بهبود مقایسه‌ی واحدهای تصمیم‌گیری با وزن‌های مختلف داشت. مدل پیشنهادی می‌تواند زمینه‌ساز مطالعات بعدی بااستفاده از این مدل و نگرشی جدید به مدل‌های بر پایه‌ی تحلیل پوششی داده هابرای رتبه‌بندی سیستم‌های رأی‌گیری اولویتی به‌صورت چندهدفه باشد.

منابع

Contreras, I. (2011). A DEA-inspired procedure for the aggregation of preferences. *Expert systems with applications*, *38*(1), 564-570.

Cook, W. D., & Kress, M. (1990). A data envelopment model for aggregating preference rankings. *Management science*, *36*(11), 1302-1310.

Cook, W. D., Roll, Y., & Kazakov, A. (1990). A dea model for measuring the relative eeficiency of highway maintenance patrols. *INFOR: information systems and operational research*, *28*(2), 113-124.

Green, R. H., Doyle, J. R., & Cook, W. D. (1996). Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation. *European journal of operational research*, *90*(3), 461-472.

Hashimoto, A. (1997). A ranked voting system using a DEA/AR exclusion model: A note. *European journal of operational research*, *97*(3), 600-604.

Jahanshahloo, G. R., Memariani, A., Lotfi, F. H., & Rezai, H. Z. (2005). A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights. *Applied mathematics and computation*, *166*(2), 265-281.

Kahraman, C. (Ed.). (2008). *Fuzzy multi-criteria decision making: theory and applications with recent developments* (Vol. 16). Springer Science & Business Media.

Kornbluth, J. S. H. (1991). Analysing policy effectiveness using cone restricted data envelopment analysis. *Journal of the operational research society*, *42*(12), 1097-1104.

Noguchi, H., Ogawa, M., & Ishii, H. (2002). The appropriate total ranking method using DEA for multiple categorized purposes. *Journal of computational and applied mathematics*, *146*(1), 155-166.

Obata, T., & Ishii, H. (2003). A method for discriminating efficient candidates with ranked voting data. *European Journal of operational research*, *151*(1), 233-237.

Roll, Y., Cook, W. D., & Golany, B. (1991). Controlling factor weights in data envelopment analysis. *IIE transactions*, *23*(1), 2-9.

Thompson, R. G., Singleton Jr, F. D., Thrall, R. M., & Smith, B. A. (1986). Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas. *Interfaces*, *16*(6), 35-49.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳ ، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷ ، صفحه: ۳۱۷-۳۲۴