نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۳، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷

Journal of Decisions and Operational Research

برنامه‌ریزی درجه دوم فازی با پارامترهای نامنفی: یک روش حل مبتنی‌بر تجزیه

نعمت اله تقی نژاد *، فاطمه باباکردی

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران.

چکیده

مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم یکی از مهم‌ترین مسائل کلاسیک بهینه‌سازی است که به جستجوی بیشینه یا کمینه‌ی یک تابع درجه دوم تحت قیود خطی تساوی یا نامساوی می‌پردازد. در این مقاله، برنامه‌ریزی درجه دوم که تمام پارامترهای آن اعداد فازی نامنفی باشد را مورد بررسی قرار می‌دهیم و یک الگوریتم جدید را مبتنی بر اعمال و حساب فازی، ارائه می‌کنیم که مدل فازی را به سه مدل قطعی کوچک‌تر و ساده‌تر تجزیه می‌کند. جواب بهین مدل فازی با حل مدل‌های قطعی توسط الگوریتم‌های متداول همچون SQP و ترکیب این جواب‌ها تعیین می‌شود. در انتها، یک مثال جهت پیاده‌سازی و نشان دادن کارایی الگوریتم پیشنهادی حل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی درجه دوم فازی، تجزیه‌ی مدل، برنامه‌ریزی درجه دوم، رتبه‌بندی اعداد فازی.

دریافت: ۱۳۹۷/۸/۲ اصلاح: ۱۳۹۷/۱۱/۱۵ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۶

۱- مقدمه

مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم یکی از مهم‌ترین مسائل کلاسیک بهینه‌سازی است که به جستجوی بیشینه یا کمینه‌ی یک تابع درجه دوم تحت قیود خطی تساوی یا نامساوی می‌پردازد. گلوور و همکاران (۲۰۱۰) یک روش مبتنی بر جستجوی تابو برای حل برنامه‌ریزی درجه دوم باینری را تشریح کردند. کوکنبرگر و همکاران (۲۰۱۴) به مطالعه‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم غیرمقید باینری پرداختند. تکاپویی و همکاران (۲۰۱۷) الگوریتم جستجوی سریع را برای برنامه‌ریزی درجه دوم محدب کمینه پیشنهاد کردند. تقی‌نژاد و طالشیان (آماده انتشار) به حل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای بازه‌ای پرداختند. لیوزی و همکاران (۲۰۱۹) یک روش شاخه و کران جدید برای مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم ارائه کردند. از طرفی وجود ابهام و عدم قطعیت در دنیای واقعی امری غیرقابل انکار است و تعیین مقادیر دقیق پارامترها میسر نمی‌باشد. در چنین مواقعی می‌توان از منطق فازی استفاده کرد، که در مقایسه با برنامه‌ریزی تصادفی و استوار، به اطلاعات کمتری نیاز دارد، با توابع و عملگرهای ساده ریاضی قابل پیاده‌سازی است و ابزاری مناسب برای بیان و تشریح عدم قطعیت و دقت در رویدادها است (طالشیان و همکاران، ۲۰۱۸؛ طالشیان و فتحعلی، ۲۰۱۶؛ ناصری و همکاران، ۲۰۱۷) . بهینه‌سازی فازی توسط محققین مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و برنامه‌ریزی درجه دوم فازی از این قاعده مستثنی نبوده است. عباس مولایی (۲۰۱۴) برنامه‌ریزی درجه دوم را با قیود نامساوی فازی مورد بررسی قرار داد. تقی‌نژاد و طالشیان (۲۰۱۸) نیز روشی برای حل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی ارائه کردند. در مدل ارائه شده توسط آن‌ها فقط متغیرها، قطعی و مابقی کاملا فازی بودند. قنبری و همکاران (۲۰۱۹) نیز یک الگوریتم جستجوی همسایگی متغیر برای حل مسئله برنامه‌ریزی درجه‌دوم فازی ارائه کردند. این مقاله در شش بخش تنظیم شده است. در بخش دوم بعضی از مفاهیم

* عهده‌دار مکاتبات: ntaghinezhad@gmail.com

ضروری اعمال و حساب فازی را بیان می‌کنیم. در بخش سوم مدل برنامه‌ریزی درجه دوم را در حالت قطعی ارائه می‌کنیم. در بخش چهارم مدل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای نامنفی از نوع اعداد مثلثی فازی را بررسی و الگوریتمی جدید برای حل آن پیشنهاد می‌کنیم. در بخش پنجم یک مثال عددی برای نشان دادن کارایی الگوریتم پیشنهادی حل می‌نماییم و سرانجام در بخش انتهایی به جمع‌بندی و کارهای آتی می‌پردازیم.

۲- تعاریف پایه‌ای

در این بخش تعاریف ضروری و مورد نیاز فازی را بیان می‌کنیم (گودرزی و همکاران، ۲۰۱۴).

تعریف ۲-۱- مجموعه فازی $\tilde{A}$، که مجموعه‌ی مرجع آن مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد و در سه شرط زیر صدق نماید را عدد فازی می‌نامیم:

- *(۱) $\tilde{A}$ مجموعه‌ای محدب باشد.*
- *(۲) ارتفاع $\tilde{A}$ برابر یک باشد.*
- *(۳) در یک بازه بسته $\mu_{\tilde{A}}(x)$ پیوسته باشد.*

گزاره ۲-۲- در این مقاله، عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{a} = \langle a_l, a_c, a_u \rangle$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲-۳- عدد فازی مثلثی $\tilde{a} = \langle a_l, a_c, a_u \rangle$ را نامنفی می‌نامیم هرگاه $a_l \geq 0$ باشد.

تعریف ۲-٤- فرض کنید $\tilde{a} = \langle a_l, a_c, a_u \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b_l, b_c, b_u \rangle$ دو عدد فازی مثلثی نامنفی و k یک عدد حقیقی باشند. اعمال بین اعداد فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند (عزتی و همکاران، ۲۰۱۵):

$$k\tilde{a} = \langle ka_l, ka_c, ka_u \rangle, \quad k \geq 0,$$
$$\tilde{a} + \tilde{b} = \langle a_l + b_l, a_c + b_c, a_u + b_u \rangle,$$
$$\tilde{a} * \tilde{b} = \langle a_l b_l, a_c b_c, a_u b_u \rangle.$$

تعریف ۲-۵- فرض کنید $\tilde{a} = \langle a_l, a_c, a_u \rangle$ و $\tilde{b} = \langle b_l, b_c, b_u \rangle$ دو عدد فازی مثلثی باشد. می‌گوییم $\tilde{a}$ کوچک‌تر از $\tilde{b}$ است و با $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ نمایش داده می‌شود اگر و تنها اگر یکی از حالت‌های زیر رخ دهد:

- $a_c < b_c$.
- $a_c = b_c$ و $a_u - a_l > b_u - b_l$.
- $a_c = b_c$، $a_u - a_l = b_u - b_l$ و $a_u + a_l < b_u + b_l$.

گزاره ۲-٦- با توجه به تعریف ۲-۵ واضح است که $\tilde{a} = \tilde{b}$ نتیجه می‌دهد $a_c = b_c$، $a_l = b_l$ و $a_u = b_u$.

گزاره ۲-۷- به وضوح $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}$ اگروتنها اگر $\tilde{a} = \tilde{b}$ یا $\tilde{a} \prec \tilde{b}$.

۳- مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم

یکی از مهم‌ترین رده‌های مسایل برنامه‌ریزی غیرخطی، برنامه‌ریزی درجه دوم است و بسیاری از مسایل به‌طور طبیعی بااستفاده از برنامه‌ریزی درجه دوم نمایش داده می‌شود. فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم به‌صورت زیر است:

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷، صفحه: ۳۳۲-۳۲۵

$$\text{Min }(Max)\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}x_ix_j$$
$$s.t.\quad \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(\le=\ge)b_i\,,i\in N_m,\\ x_j\ge 0,j\in N_n.\end{cases}$$

که در آن $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ و $b^T=(b_1,b_2,\dots,b_m)$ به‌ترتیب بردار هزینه و بردار سمت راست قیود و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ به‌ازای هر $i\in N_m$ و $j\in N_n$ ماتریس ضرایب قیود نامیده می‌شود. هم‌چنین $Q=[q_{ij}]_{m\times n}$ به‌ازای هر $i\in N_m$ و $j\in N_n$ ماتریس ضرایب درجه دوم و بردار $x^T=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ نشان‌دهنده متغیرهای تصمیم مسئله است. مطالعات گوناگونی درخصوص ارائه الگوریتم‌های کارا و مفید برای حل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای قطعی صورت گرفته است. درحالی‌که برنامه‌ریزی درجه دوم دارای پارامترهایی است که به‌طورمعمول قابل پیش بینی نیست یا دارای درجه‌ای از عدم قطعیت است.

۴- مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی نامنفی

شکل کلی و متعارف مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Min }(Max)\ Z=\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\tilde{x}_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{q}_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\tilde{x}_i(\le=\ge)\ \tilde{b}_i\,,i\in N_m,\\ \tilde{x}_j\ge 0,j\in N_n.\end{cases}\qquad (۱)$$

که در این مقاله تمامی پارامترها و متغیرهای تصمیم مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم به‌صورت اعداد فازی مثلثی نامنفی درنظر گرفته می‌شود.

۴-۱ یک الگوریتم جدید حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم فازی

در این بخش بدون از دست دادن کلیت، الگوریتمی برای حل مسئله‌ی (۱) با تابع هدف مینیمم‌سازی ارائه و تشریح کرده‌ایم:

گام ۱- پارامترها و متغیرهای نامنفی مسئله‌ی (۱) را با توجه به تعریف ۲-۳ و به‌ازای هر i و j به‌صورت اعداد فازی مثلثی $\widetilde{C}_j=\langle c_j^l,c_j^c,c_j^u\rangle$، $\widetilde{X}_j=\langle x_j^l,x_j^c,x_j^u\rangle$، $\widetilde{Q}_{ij}=\langle q_{ij}^l,q_{ij}^c,q_{ij}^u\rangle$، $\widetilde{A}_{ij}=\langle a_{ij}^l,a_{ij}^c,a_{ij}^u\rangle$ و $\widetilde{B}_i=\langle b_i^l,b_i^c,b_i^u\rangle$ درنظر می‌گیریم و هم‌چنین قیود $x_i^c\ge x_i^l$ و $x_i^u\ge x_i^c$ را به مدل (۱) اضافه نموده‌ایم تا جواب بهینه به‌صورت یک عدد فازی مثلثی حاصل شود. بنابراین داریم:

$$\text{Min }Z=\sum_{j=1}^{n}\langle c_j^l,c_j^c,c_j^u\rangle*\langle x_j^l,x_j^c,x_j^u\rangle$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle q_{ij}^l,q_{ij}^c,q_{ij}^u\rangle*\langle x_i^l,x_i^c,x_i^u\rangle*\langle x_j^l,x_j^c,x_j^u\rangle$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\langle a_{ij}^l,a_{ij}^c,a_{ij}^u\rangle*\langle x_i^l,x_i^c,x_i^u\rangle(\le=\ge)\langle b_i^l,b_i^c,b_i^u\rangle\,,i\in N_m,\\ x_i^u\ge x_i^c\ge x_i^l\ge 0,\qquad i\in N_n.\end{cases}$$

با به‌کارگیری ضرب ارائه‌شده در تعریف ۲-۴، مدل فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{Min } Z=\sum_{j=1}^{n}\langle c_j^l x_j^l, c_j^c x_j^c, c_j^u x_j^u\rangle+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle q_{ij}^l x_i^l x_j^l, q_{ij}^c x_i^c x_j^c, q_{ij}^u x_i^u x_j^u\rangle$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\langle a_{ij}^l x_i^l, a_{ij}^c x_i^c, a_{ij}^u x_i^u\rangle (\le=\ge)\langle b_i^l, b_i^c, b_i^u\rangle,\ i\in N_m,\\ x_i^u\ge x_i^c\ge x_i^l\ge 0,\qquad i\in N_n.\end{cases}$$

و باتوجه به جمع فازی ارائه‌شده در بخش ۲ خواهیم داشت:

$$\text{Min } Z=\langle\sum_{j=1}^{n}c_j^l x_j^l+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^l x_i^l x_j^l,\sum_{j=1}^{n}c_j^c x_j^c+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^c x_i^c x_j^c,\sum_{j=1}^{n}c_j^u x_j^u+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^u x_i^u x_j^u\rangle$$

$$s.t.\begin{cases}\langle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^l x_i^l,\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^c x_i^c,\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^u x_i^u\rangle (\le=\ge)\langle b_i^l, b_i^c, b_i^u\rangle, i\in N_m,\\ x_i^u\ge x_i^c\ge x_i^l\ge 0,\qquad i\in N_n.\end{cases}$$

گام ۲- در ادامه، بدون از دست دادن کلیت مسئله، قیود را فقط به‌صورت کوچک‌ترمساوی بررسی خواهیم کرد. به‌قیود کوچک‌ترمساوی، به‌ترتیب، متغیرهای فازی مثلثی نامنفی $\widetilde{s_i}=\langle s_i^l, s_i^c, s_i^u\rangle$ و $\widetilde{e_i}=\langle e_i^l, e_i^c, e_i^u\rangle$ که $i\in N_m$ را می‌افزاییم. هم‌چنین با استفاده از مفهوم رتبه‌بندی تعریف ۲-۴ بر روی تابع هدف و قیود مسئله فوق داریم:

$$\text{Min }\sum_{j=1}^{n}c_j^c x_j^c+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^c x_i^c x_j^c, \tag{۲}$$

$$\text{Max }\sum_{j=1}^{n}c_j^u x_j^u+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^u x_i^u x_j^u-\sum_{j=1}^{n}c_j^l x_j^l+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^l x_i^l x_j^l, \tag{۳}$$

$$\text{Min }\sum_{j=1}^{n}c_j^u x_j^u+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^u x_i^u x_j^u+\sum_{j=1}^{n}c_j^l x_j^l+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^l x_i^l x_j^l, \tag{٤}$$

$$s.t.\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^l x_j^l+s_i^l=b_i^l,\ i\in N_m, \tag{۵}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^c x_j^c+s_i^c=b_i^c, i\in N_m, \tag{٦}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^u x_j^u+s_i^u=b_i^u, i\in N_m, \tag{۷}$$

$$\begin{gathered}x_i^u\ge x_i^c, x_i^c\ge x_i^l, x_i^l\ge 0, i\in N_n,\\ s_i^u\ge s_i^c, s_i^c\ge s_i^l, s_i^l\ge 0, i\in N_m.\end{gathered} \tag{۸}$$

گام ۳- در مدل فوق، تابع هدف (۲) و به‌همراه قیود (۶) و $x_i^c\ge 0$ و $s_i^c\ge 0$ را می‌توان مستقل از بقیه توابع هدف و قیود به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{gathered}\text{Min }\sum_{j=1}^{n}c_j^c x_j^c+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}^c x_i^c x_j^c\\ s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^c x_j^c+s_i^c=b_i^c, i\in N_m,\\ x_i^c\ge 0, i\in N_n,\\ s_i^c\ge 0, i\in N_m.\end{cases}\end{gathered} \tag{۹}$$

فرض کنید $x_j^c=x_j^{c^*}$ و $s_j^c=s_j^{c^*}$ جواب بهین مدل (۹) باشد که با استفاده از یکی از روش‌های حل برنامه‌ریزی درجه دوم قطعی به‌دست آمده است.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳ ، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷ ، صفحه: ۳۲۵-۳۳۲

گام ۴- در این گام تابع هدف (۴) به‌همراه قیود (۵)، (۷) و (۸) را مستقل از بقیه‌ی قیود و توابع هدف درنظر می‌گیریم و با قرار دادن مقدار $x_j^c = x_j^{c*}$ و $s_j^c = s_j^{c*}$ در آن‌ها خواهیم داشت:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j^u x_j^u + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^u x_i^u x_j^u - \sum_{j=1}^{n} c_j^l x_j^l + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^l x_i^l x_j^l$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^l x_j^l + s_i^l = b_i^l,\ i \in N_m, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^u x_j^u + s_i^u = b_i^u, i \in N_m, \\ x_i^u \geq x_i^{c*}, x_i^{c*} \geq x_i^l, x_i^l \geq 0, i \in N_n, \\ s_i^u \geq s_i^{c*}, s_i^{c*} \geq s_i^l, s_i^l \geq 0, i \in N_m. \end{cases} \tag{۱۰}$$

توجه کنید که قید اول، تنها شامل متغیرهای x_j^l و s_i^l و قید دوم، تنها شامل متغیرهای x_j^u و s_i^u است. بنابراین، مدل (۱۰) با استفاده از تجزیه‌ی تابع هدف آن، قابل تفکیک به دو مدل مستقل زیر است:

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{n} c_j^u x_j^u + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^u x_i^u x_j^u$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^u x_j^u + s_i^u = b_i^u, i \in N_m, \\ x_i^u \geq x_i^{c*}, i \in N_n, \\ s_i^u \geq s_i^{c*}, i \in N_m. \end{cases} \tag{۱۱}$$

$$\text{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j^l x_j^l + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^l x_i^l x_j^l \tag{۱۲}$$

لازم به ذکر است که قید آخر مدل (۱۱) تضمین می‌کند که جواب بهین آن، یک عدد فازی مثلثی نامنفی باشد و همین‌طور نقطه‌ی راست عدد فازی مثلثی از نقطه‌ی مرکز آن بزرگ‌تر باشد. به‌علاوه، قید آخر مدل (۱۲) تضمین می‌کند که در جواب بهین آن، نقطه‌ی مرکزی عدد فازی مثلثی از نقطه چپ آن بزرگ‌تر باشد، بنابراین جواب بهین مدل (۱) درصورت وجود، یک عدد فازی مثلثی نامنفی خواهد بود.

گام ۵- با حل مدل‌های قطعی (۹)، (۱۱) و (۱۲) حالت‌های زیر اتفاق خواهد افتاد:

- *جواب بهینه یکتا برای متغیرهای $x_i^u = x_i^{u*}$ و $x_j^l = x_j^{l*}$ حاصل شود در این‌صورت جواب بهینه مدل (۱) را با قرار دادن $\tilde{X}_j^* = \langle x_j^{l*}, x_j^{c*}, x_j^{u*} \rangle$ به‌دست آمده است و مقدار بهین تابع هدف نیز برابر با $Z^* = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_i^* + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{q}_{ij} \tilde{x}_i^* \tilde{x}_j^*$ است و متوقف خواهیم شد.*
- *جواب شدنی برای یکی یا بعضی از مدل‌های قطعی (۹)، (۱۱) و (۱۲) موجود نباشد که در این‌صورت (۱) نیز دارای جواب شدنی نمی‌باشد و متوقف خواهیم شد.*
- *جواب یک یا بعضی از مدل‌های قطعی (۹)، (۱۱) و (۱۲) بیکران باشد، در این حالت مدل (۱) نیز دارای جواب بهینه نمی‌باشد و متوقف خواهیم شد.*

۵- پیاده‌سازی الگوریتم و مثال عددی

در این بخش با یک مثال عددی به پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم.

مثال ۱-۱- مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم فازی زیر که در آن پارامترها و متغیرهای مسئله از نوع اعداد فازی مثلثی نامنفی می‌باشند، را درنظر بگیرید:

$$\begin{gathered}\text{Max } Z = \langle 2x_1^l + (x_1^l)^2 + x_2^l + (x_2^l)^2 + x_3^l, 3x_1^c + (x_1^c)^2 + 2x_2^c + (x_2^c)^2 + x_3^c \\ + (x_3^c)^2, 4x_1^u + (x_1^u)^2 + 3x_2^u + (x_2^u)^2 + x_3^u + (x_3^u)^2 \rangle \\ s.t. \langle 0.25x_2^l + 0.7x_3^l, x_1^c + x_2^c + x_3^c, 1.2x_1^u + 1.7x_2^u + 1.5x_3^u \rangle = \langle 1.25,4,6.5 \rangle \\ x_i^u \geq x_i^c \geq x_i^l \geq 0, i \in \{1,2,3\}.\end{gathered}$$

گام ۱- با تعیین پارامترهای فازی به‌صورت اعداد فازی مثلثی مناسب که توسط تصمیم‌گیرنده یا فرد خبره تعیین می‌شود و هم‌چنین تبدیل متغیرهای فازی به شکل اعداد فازی مثلثی خواهیم داشت:

$$\begin{gathered}\text{Max } Z = \tilde{3}\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2 + \tilde{2}\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3 + \tilde{1}\tilde{x}_3^2 \\ s.t. \begin{cases} \tilde{1}\tilde{x}_1 + \tilde{1}\tilde{x}_2 + \tilde{1}\tilde{x}_3 = \tilde{4}, \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \geq 0 \end{cases}\end{gathered}$$

حال با استفاده از ضرب و جمع فازی تعریف‌شده در تعریف ۲-۴ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{gathered}\text{Max } Z = \langle 2,3,4 \rangle * \langle x_1^l, x_1^c, x_1^u \rangle + \langle x_1^l, x_1^c, x_1^u \rangle^2 + \langle 1,2,3 \rangle * \langle x_2^l, x_2^c, x_2^u \rangle + \langle x_2^l, x_2^c, x_2^u \rangle^2 \\ + \langle x_3^l, x_3^c, x_3^u \rangle + \langle 0,1,1 \rangle * \langle x_3^l, x_3^c, x_3^u \rangle^2 \\ s.t. \\ \langle 0,1,1.2 \rangle * \langle x_1^l, x_1^c, x_1^u \rangle + \langle 0.25,1,1.7 \rangle * \langle x_2^l, x_2^c, x_2^u \rangle + \langle 0.7,1,1.5 \rangle * \langle x_3^l, x_3^c, x_3^u \rangle \\ = \langle 1.25,4,6.5 \rangle, \\ x_i^u \geq x_i^c \geq x_i^l \geq 0, i \in \{1,2,3\}.\end{gathered}$$

گام ۲- با استفاده از مفهوم رتبه‌بندی ارائه‌شده در تعریف ۲-۵ بر روی تابع هدف و قیود مسئله فوق داریم:

$$\text{Min } 3x_1^c + (x_1^c)^2 + 2x_2^c + (x_2^c)^2 + x_3^c + (x_3^c)^2, \tag{۱۳}$$

$$\text{Max } 4x_1^u + (x_1^u)^2 + 3x_2^u + (x_2^u)^2 + x_3^u + (x_3^u)^2 - (2x_1^l + (x_1^l)^2 + x_2^l + (x_2^l)^2 + x_3^l), \tag{۱۴}$$

$$\text{Min } 4x_1^u + (x_1^u)^2 + 3x_2^u + (x_2^u)^2 + x_3^u + (x_3^u)^2 + 2x_1^l + (x_1^l)^2 + x_2^l + (x_2^l)^2 + x_3^l, \tag{۱۵}$$

$$s.t. \, 0.25x_2^l + 0.7x_3^l = 1.25, \tag{۱۶}$$

$$x_1^c + x_2^c + x_3^c = 4, \tag{۱۷}$$

$$1.2x_1^u + 1.7x_2^u + 1.5x_3^u = 6.5, \tag{۱۸}$$

$$x_i^u \geq x_i^c, x_i^c \geq x_i^l, x_i^l \geq 0, i \in \{1,2,3\}. \tag{۱۹}$$

گام ۳- در مدل بالا، تابع هدف (۱۳) و به‌همراه قیود (۱۷) و (۱۹) را می‌توان مستقل از بقیه‌ی توابع هدف و قیود به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$\begin{gathered}\text{Min } 3x_1^c + (x_1^c)^2 + 2x_2^c + (x_2^c)^2 + x_3^c + (x_3^c)^2 \\ s.t. \begin{cases} x_1^c + x_2^c + x_3^c = 4, \\ x_1^c \geq 0, x_2^c \geq 0, x_3^c \geq 0. \end{cases}\end{gathered} \tag{۲۰}$$

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷، صفحه: ۳۲۵-۳۳۲

با حل مدل قطعی فوق با استفاده از یکی از روش‌های حل برنامه‌ریزی درجه دوم، جواب‌های بهین $x_1^c = ۰/۸۳۳$، $x_2^c = ۱/۳۳۳$ و $x_3^c = ۱/۸۳۳$ را خواهیم اشت.

گام ۴- تابع هدف (۱۴) به‌همراه قیود (۱۶)، (۱۸) و (۱۹) را مستقل از بقیه‌ی قیود و توابع هدف درنظر می‌گیریم، هم‌چنین مقادیر بهین مدل (۲۰) را نیز در این مدل قرار می‌دهیم:

$$\text{Max } 4x_1^u + (x_1^u)^2 + 3x_2^u + (x_2^u)^2 + x_3^u + (x_3^u)^2 - (2x_1^l + (x_1^l)^2 + x_2^l + (x_2^l)^2 + x_3^l)$$

$$s.t.\begin{cases} 0.25x_2^l + 0.7x_3^l = 1.25, \\ 1.2x_1^u + 1.7x_2^u + 1.5x_3^u = 6.5, \\ x_1^u \geq 0.833, 0.833 \geq x_1^l, x_1^l \geq 0, \\ x_2^u \geq 1.333, 1.333 \geq x_2^l, x_2^l \geq 0, \\ x_3^u \geq 1.833, 1.833 \geq x_3^l, x_3^l \geq 0. \end{cases} \tag{۲۱}$$

توجه کنید که قید اول، تنها شامل متغیر x_j^l و قید دوم، تنها شامل متغیر x_j^u است. بنابراین مدل (۲۱) با استفاده از تجزیه‌ی تابع هدف آن قابل تفکیک به دو مدل مستقل زیر است:

$$\begin{aligned} &\text{Max } 4x_1^u + (x_1^u)^2 + 3x_2^u + (x_2^u)^2 + x_3^u + (x_3^u)^2 \\ &s.t.\begin{cases} 1.2x_1^u + 1.7x_2^u + 1.5x_3^u = 6.5, \\ x_1^u \geq 0.833, x_2^u \geq 1.333, x_3^u \geq 1.833. \end{cases} \end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned} &\text{Min } 2x_1^l + (x_1^l)^2 + x_2^l + (x_2^l)^2 + x_3^l \\ &s.t.\begin{cases} 0.25x_2^l + 0.7x_3^l = 1.25, \\ 0.833 \geq x_1^l \geq 0, \\ 1.333 \geq x_2^l \geq 0, \\ 1.833 \geq x_3^l \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{۲۳}$$

گام ۵- با حل مدل قطعی (۲۲) به جواب‌های بهین $x_1^u = 0.833$، $x_2^u = 1.411$ و $x_3^u = 2.068$ می‌رسیم و برای مدل (۲۳) جواب‌های بهین $x_1^l = 0$، $x_2^l = 0$ و $x_3^l = 1.786$ به‌دست می‌آید. بنابراین جواب بهین فازی مسئله به‌صورت $\tilde{x}_1 = \langle 0,0.833,0.833 \rangle$، $\tilde{x}_2 = \langle 0,1.333,1.411 \rangle$ و $\tilde{x}_3 = \langle 1.786,1.833,2.068 \rangle$ با مقدار تابع هدف فازی $\tilde{Z} = \langle 1.786,12.8287,16.5944 \rangle$ می‌باشد که بر کارایی و سادگی پیاده‌سازی و حل الگوریتم ابتکاری تاکید دارد.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهاد کارهای آتی

در این مقاله، ما به مطالعه برنامه‌ریزی درجه دوم فازی با پارامترهای نامنفی پرداختیم. با توجه به ساختار دشوار، پیچیده و غیرخطی برنامه‌ریزی دوم، امکان درنظر گرفتن تمام پارامترها بدون قید و شرط وجود ندارد و در اکثر مقالات موجود در ادبیات مسئله نیز برنامه‌ریزی درجه دوم با یک محدودیت یا شرط بررسی شده است. در این مقاله، مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم با درنظر گرفتن پارامترها و متغیرها به‌صورت اعداد فازی مثلثی نامنفی بررسی و مبتنی بر اعمال و حساب فازی، یک الگوریتم جدید تجزیه‌ی مدل فازی به سه مدل قطعی کوچک‌تر و ساده‌تر، پیشنهاد شد. در ادامه، با حل این مدل‌های تجزیه شده‌ی قطعی و به‌دست آوردن جواب بهینه‌ی آن‌ها، جواب بهین مدل فازی حاصل گردید. در انتها نیز برای آشنایی با چگونگی پیاده‌سازی و هم‌چنین نشان دادن کارایی و سادگی این الگوریتم، یک مثال عددی نیز با آن حل شد. برای توسعه و بهبود نتایج این مقاله می‌توان به توسعه ی الگوریتم پیشنهادی پرداخت به‌طوری‌که قابلیت حل مدل برنامه‌ریزی درجه دوم با پارامترهای فازی مثلثی منفی را نیز داشته باشد. ایده دیگر این است که مدل اصلی فازی مسئله با یک روش فراابتکاری حل شود و نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از الگوریتم ارائه شده در این مقاله مقایسه شود.

منابع

Glover, F., Lü, Z., & Hao, J. K. (2010). Diversification-driven tabu search for unconstrained binary quadratic problems. *4OR, 8*(3), 239-253.

Kochenberger, G., Hao, J. K., Glover, F., Lewis, M., Lü, Z., Wang, H., & Wang, Y. (2014). The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey. *Journal of combinatorial optimization, 28*(1), 58-81.

Takapoui, R., Moehle, N., Boyd, S., & Bemporad, A. (2017). A simple effective heuristic for embedded mixed-integer quadratic programming. *International journal of control,* 1-11.

Taghi-Nezhad, N. A., Taleshian, F., & Shahini, M. (In Press). A new approach for solving interval quadratic programming problem. *Iranian journal of optimization*.

Liuzzi, G., Locatelli, M., & Piccialli, V. (2019). A new branch-and-bound algorithm for standard quadratic programming problems. *Optimization methods and software, 34*(1), 79-97.

Taleshian, F., Fathali, J., & Allah Taghi-Nezhad, N. (2018). Fuzzy majority algorithms for the 1-median and 2-median problems on a fuzzy tree. *Fuzzy information and engineering, 10*(2), 225-248.

Taleshian, F., & Fathali, J. (2016). A mathematical model for fuzzy-median problem with fuzzy weights and variables. *Advances in operations research*. http://dx.doi.org/10.1155/2016/7590492

Nasseri, S. H., Taghi-Nezhad, N. A., & Ebrahimnejad, A. (2017). A novel method for ranking fuzzy quantities using center of incircle and its application to a petroleum distribution center evaluation problem. *International journal of industrial and systems engineering, 27*(4), 457-484.

Molai, A. A. (2014). A new algorithm for resolution of the quadratic programming problem with fuzzy relation inequality constraints. *Computers & industrial engineering,* 72, 306-314.

Taghi-Nezhad, N. A., & Taleshian, F. (2018). A solution approach for solving fully fuzzy quadratic programming problems. *Journal of applied research on industrial engineering, 5*(1), 50-61.

Ghanbari, R., Ghorbani-Moghadam, K., & Mahdavi-Amiri, N. (2019). A variables neighborhood search algorithm for solving fuzzy quadratic programming problems using modified Kerre's method. *Soft computing,* 1-11.

Goodarzi, F. K., Taghinezhad, N. A., & Nasseri, S. H. (2014). A new fuzzy approach to solve a novel model of open shop scheduling problem. *University politehnica of Bucharest scientific bulletin-series a-applied mathematics and physics, 76*(3), 199-210.

Ezzati, R., Khorram, E., & Enayati, R. (2015). A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem. *Applied mathematical modelling, 39*(12), 3183-3193.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۳ ، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۷ ، صفحه: ۳۲۵-۳۳۲