Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۴، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۸

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۴، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۴۴-۳۳۲

بازده به مقیاس در شبکه‌های دومرحله ای برپایه دو رویکرد متفاوت

جواد گرامی*

گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

چکیده

یکی از موضوعات مهم در تحلیل پوششی داده‌ها تعیین کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده می باشد. یکی از ساختارهای واحدهای تصمیم گیرنده ساختار شبکه‌ی دو مرحله‌ای می باشد. در این تحقیق کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده را با دو استراتژی بدست می‌آوریم. استراتژی اول زمانی است که هر یک از مراحل به صورت مستقل عمل کند و ورودی و خروجی هر مرحله برای آن مرحله دارای اهمیت می باشد و کلاس بازده به مقیاس مربوط به هر یک از مراحل و پروسه کلی با این استراتژی تعیین می گردد. در حالت دیگر ساختار شبکه‌ی دو مرحله‌ای را به صورت مدل رهبر پیرو تعیین می‌کنیم و خروجی مرحله اول به عنوان ورودی مرحله دوم لحاظ می گردد و در این حالت کلاس بازده به مقیاس بر اساس نسبت خروجی هر مرحله به ورودی آن مرحله تعیین می شود. برای تعیین کلاس بازده به مقیاس پروسه نهایی از نسبت خروجی مرحله دوم به ورودی مرحله اول استفاده می شود. رابطه بین کلاس بازده به مقیاس مراحل اول و دوم را تعیین می‌کنیم و شرایط لازم و کافی را برای کلاس بازده به مقیاس ارائه می‌دهیم. در انتها مساله را با یک مثال عددی تشریح می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، ساختار شبکه دو مرحله‌ای، بازده به مقیاس.

دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۷ اصلاح: ۱۳۹۸/۰۸/۲۲ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۲۰

۱- مقدمه

بازده به مقیاس اطلاعات مفید را در اندازه بهینه از واحد های تصمیم گیرنده فراهم می‌کند، که می‌تواند در تعیین این‌که آیا یک واحد تصمیم گیرنده کارای تکنیکی می‌تواند بهره وری خود را با تغییر عملکردش بهبود بخشد مورد استفاده قرار می‌گیرد (سلیمانی-دامنه۲۰۱۲). مقالات بسیاری در DEA (تحلیل پوششی داده ها) که در مورد تئوری و کاربردهای بازده به مقیاس بحث می‌کنند وجود بنکر و ترال (۱۹۹۲) یک روش را برای اندازه گیری بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده روی مرز تولید با استفاده از مدل کسری DEA ارائه دادند. بنکر و همکاران (۲۰۰۴) تعیین کلاس بازده به مقیاس را در مدلهای مختلف بررسی کردند. جهانشاهلو و خدابخشی (۲۰۰۳) و اسلامی و همکاران (۲۰۱۲) به تعیین نقطه بیشترین بهروری در مجموعه امکان تولید پرداختند. فار و گروسکوپ (۱۹۹٤ و ۲۰۰۰) ارائه یک روش برای تعیین بازده به مقیاس بر اساس مدل های CCR , BCC خدا بخشی و غلامی (۲۰۱۰) یک تقریب بر پایه مدل جمعی برای تخمین بازده به مقیاس در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. در ادامه اسماعیلی و خدا بخشی (۲۰۱۲) مفهوم آماری و فازی را برای رویارویی با مساله تغییرات در مقالات DEA به کار بردند. این مقالات با استفاده از مدلهای DEA در حالت های دقیق و نادقیق به طور کمی کلاس بازده به مقیاس را تعیین کردند. در ادامه اسلامی و خوینی (۲۰۱۳) یک تقریب برای اندازه گیری و تعیین نوع و مقدار بازده به مقیاس چپ و راست از DMU (واحد تصمیم

---

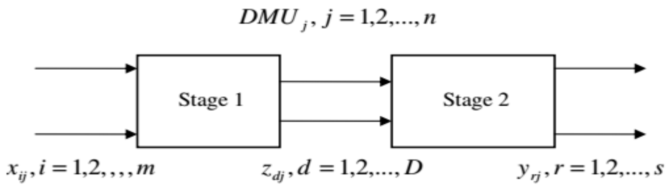
* عهده‌دار مکاتبات: geramijavad@gmail.com

شناسه دیجیتال: 10.22105/dmor.2020.103204

گیرنده)های کارا ارائه دادند. کیرنوژکو (۲۰۱۴) یک تقریب دو مرحله‌ای برای اندازه گیری بازده به مقیاس در نقاط تصویر با استفاده از مدل های غیر شعاعی DEA ارائه داد. در مدل‌های سنتی اندازه های میانی نادیده گرفته می شود اما در حقیقت پروسه های تولید ممکن است دارای ساختار پیچیده و داخلی باشد و باید اندازه میانی را در اندازه گیری کارایی و تعیین کلاس بازده به مقیاس دخیل کنیم. زانگ (۲۰۱۵) ساختارهای چند مرحله‌ای را در نظر گرفت و مفهوم کارایی را برای این ساختارها ارائه داد. در این مقاله کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده را با ساختار شبکه دو مرحله‌ای تعیین کنیم. این مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم به معرفی ساختار شبکه دو مرحله‌ای می‌پردازیم. در بخش سوم مفهوم بازده به مقیاس را برای ساختار شبکه دو مرحله‌ای توسعه می‌دهیم. در بخش چهارم مساله را با یک مثال عددی تشریح می‌کنیم و در انتها نتایج حاصل از تحقیق ارائه می‌گردد.

۲- ساختار شبکه دو مرحله‌ای

یک ساختار از شبکه دو مرحله‌ای بصورت **شکل ۱** را در نظر بگیرید.



شکل ۱- ساختار از شبکه دو مرحله‌ای.

فرض کنید $X(X \in R_+^m)$ بردار ورودی اولیه از مرحله یک باشد، $Y(Y \in R_+^s)$ بردار خروجی نهایی از مرحله دو باشد و $Z(Z \in R_+^t)$ بردار اندازه میانی باشد، که می‌تواند برای هر دو بردار خروجی از مرحله یک و ورودی از مرحله دو در نظر گرفته شود. به علاوه، فرض کنید که n واحد تصمیم گیرنده مشاهده وجود دارد و تعریف می‌کنیم:

$x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})^T$ و $z_j = (z_{1j}, \dots, z_{tj})^T > 0$ $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})^T > 0$ و که به ترتیب بردار ورودی ، بردار میانی و بردار خروجی از DMU_j هستند.

برای ارزیابی کارایی شبکه دو مرحله‌ای مدل زیر را حل می کنیم.

$$\begin{aligned}
& max \quad \theta_1 + \theta_2, \\
s.t \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \tilde{\lambda}_j^1 \leq x_0, \sum_{j=1}^{n} z_j \tilde{\lambda}_j^1 \geq \theta_1 z_0, \\
& \sum_{j=1}^{n} z_j \tilde{\lambda}_j^2 \leq \theta_1 z_0, \sum_{j=1}^{n} y_j \tilde{\lambda}_j^2 \geq \theta_2 y_0, \\
& \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j^1 = 1, \sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j^2 = 1, \\
& \tilde{\lambda}_j^1 \geq 0, \tilde{\lambda}_j^2 \geq 0, j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \qquad (۱)$$

تعریف۲-۱- فرض کنید جواب بهینه حاصل از مدل (۱) عبارت است از ، θ_1^*، θ_2^* باشد. در اینصورت مقدار کارایی مرحله ۱و۲ بترتیب θ_1^*، θ_2^* را تعریف می‌کنیم.

تعریف۲-۲- مرحله یک را کارا می‌نامیم در صورتیکه $\theta_1^* = 1$. به همین صورت مرحله دوم را کارا می‌نامیم در صورتیکه $\theta_2^* = 2$. در صورتیکه $\theta_1^* = 1$ و $\theta_2^* = 1$ واحد تحت ارزیابی را کارای سراسری می‌نامیم.

در اقتصاد مفهوم بازده به مقیاس رابطه بین تغییرات ورودی و خروجی مربوطه را بر اساس تابع تولید توصیف می‌کند.

تعریف۲-۳- فرض کنید که x یک بردار ورودیm بعدی باشد و تابع تولید $y = f(x)$ باشد. اگر ورودی از x به $\alpha x(\alpha > 0)$ تغییر کند و خروجی متناظر از y به $\beta y(y > 0)$ تغییر کند یعنی $\beta y = f(\alpha x)$ سپس

الف: اگر $\beta > \alpha > 1$ یا $0 < \beta < \alpha < 1$ ، فرآیند تولید، دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\alpha = \beta > 0$، فرآیند تولید، دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $\alpha > \beta > 1$ یا $0 < \alpha < \beta < 1$، فرآیند تولید، دارای بازده به مقیاس کاهشی است.

طبق تعریف ۲-۳ واضح است که برای برآورد وضعیت های بازده به مقیاس از فرآیند تولید، نسبت تغییرات بین خروجی و ورودی متناظر یک معیار مهم است. بنابراین، در بسیاری از شرایط تابع تولید نمی تواند بدست آید، از این رو محاسبه نسبت دشوار است. تحت چارچوب تئوری DEA، بر اساس مجموعه امکان تولید، نسبت بین خروجی و ورودی متناظر می‌تواند به وسیله مدل DEA توصیف شود. در ابتدا فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده با ساختار شبکه دو مرحله‌ای داریم. ما دو حالت را در نظر می‌گیریم. حالت اول، هر مرحله به وسیله خودش اداره می‌شود. یعنی تغییرات ورودی تنها برای به حداکثر رساندن نسبت بین ورودی و خروجی خود را دارد و خروجی برای مرحله یک به ترتیب z است. حالت دوم ساختار درونی شبکه دو مرحله‌ای لحاظ می‌شود و تغییرات ورودی برای به حداکثر رساندن نسبت بین ورودی و خروجی هر مرحله لحاظ می گردد و خروجی برای مرحله یک و دو به ترتیب z و y است.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۴ ، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۴۴-۳۳۲

برنامه‌های خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\max \quad \beta_1,\\ &s.t. \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j^1 \le x_0,\\ &\sum_{j=1}^{n} z_j\lambda_j^1 \ge \beta_1 z_0,\\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 \le 1, \lambda_j^1 \ge 0, j = 1,\dots,n.\end{aligned} \tag{۲}$$

$$\begin{aligned}&\max \quad \eta_1,\\ &s.t \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{K}_j^1 \le x_0,\\ &\sum_{j=1}^{n} z_j k_j^1 \ge \eta_1 z_0,\\ &\sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^1 \ge 1, \mathrm{K}_j^1 \ge 0, j = 1,\dots,n.\end{aligned} \tag{۳}$$

جواب بهینه حاصل از مدل‌های (۲) و (۳) را با β_1^* وλ_j^{1*} و η_1^* و K_j^{1*} , $j = 1,\dots,n$ نشان می‌دهیم. اکنون تعریف می‌کنیم.

$\lambda^{1*} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*}$ و $k^{1*} = \sum_{j=1}^{n} k_j^{1*}$ و برای مرحله ۱، طبق تعریف ۲-۳ جواب بهینه حاصل از مدل (۲) نشان می‌دهد که اگر ورودی از x_0 به $\frac{1}{\lambda^{1*}} x_0$ افزایش یابد، بیشترین نسبت بین خروجی و ورودی خواهد بود و خروجی متناظر از z_0 به $\frac{\beta_1^*}{\lambda^{1*}} z_0$ تغییرخواهد کرد. از سوی دیگر، جواب بهینه حاصل از مدل (۳) نشان می‌دهد که اگر ورودی از x_0 به$\frac{1}{k^{1*}} x_0$ کاهش یابد، بیشترین نسبت بین خروجی و ورودی خواهد بود. خروجی متناظر از z_0 به $\frac{\eta_1^*}{k^{1*}} z_0$ تغییر می‌کند.

در وضعیت های بازده به مقیاس افزایشی ورودی باید افزایش یابد، برعکس، اگر وضعیت بازده به مقیاس کاهشی باشد، ورودی باید کاهش یابد. مطابق تعریف ۲-۳ میتوانیم بازده به مقیاس مرحله ۱ را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲-٤- فرض کنید که DMU_{j0} یک واحد مشاهده شده کارا باشد، برای بازده به مقیاس مرحله ۱ خواهیم داشت:

الف: اگر $\beta_1^* > 1$ و $\eta_1^* = 1$ سپس مرحله ۱ متناظر با DMU_{j0} دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\beta_1^* = 1$ و $\eta_1^* = 1$ سپس مرحله ۱ ا متناظر با DMU_{j0} دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $\beta_1^* = 1$ و $\eta_1^* > 1$ سپس مرحله ۱ متناظر با DMU_{j0} دارای بازده به مقیاس کاهشی است.

برای مرحله ۲ ورودی و خروجی به ترتیب z_0 و y_0 است. برنامه‌های خطی زیر را در نظربگیرید.

$$\begin{aligned} &\max \quad \acute{\beta}_1, \\ &s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} z_j \acute{\lambda}_j^1 \le z_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j \acute{\lambda}_j^1 \ge \acute{\beta}_1 y_0\,, \\ &\sum_{1}^{n} \acute{\lambda}_j^1 \le 1\,, \acute{\lambda}_j^1 \ge 0\,, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{۴}$$

$$\begin{aligned} &\max \quad \acute{\eta}_1\,, \\ &s.t \quad \sum_{j=1}^{n} z_j \acute{K}_j^1 \le z_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j \acute{K}_j^1 \ge \acute{\eta}_1 y_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} \acute{K}_j^1 \ge 1\,, \acute{K}_j^1 \ge 0\,, j = 1\,, \dots\,, n\,. \end{aligned} \tag{۵}$$

تعریف ۲-۵- فرض کنید که DMU_{j0} یک واحد مشاهده شده کارا باشد، مقادیر بهینه حاصل از مدل‌های (۴) و (۵) را به ترتیب با $\acute{\beta}_1^*$ و $\acute{\eta}_1^*$ نشان می‌دهیم. برای بازده به مقیاس مرحله دو خواهیم داشت:

الف: اگر $\acute{\beta}_1^* > 1$ و $\acute{\eta}_1^* = 1$, سپس مرحله دو از DMU_{j0} دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\acute{\beta}_1^* = 1$ و $\acute{\eta}_1^* = 1$ ، سپس مرحله دو از DMU_{j0} دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $\acute{\beta}_1^* = 1$ و $\acute{\eta}_1^* > 1$ ، سپس مرحله دو از DMU_{j0} دارای بازده به مقیاس کاهشی است.

شبیه تعریف۲-٤ و ۲-۵ اگر تولید میانی یz_0 را در نظر نگیریم، برای تعیین بازده به مقیاس پروسه کلی از DMU_{j0} می توانیم از طریق برنامه‌های خطی زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} &\max \quad \acute{\eta}_{1,} \\ &s.t \quad \sum_{j=1}^{n} x_j K_j^{1"} \le x_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j\, K_j^{1"} \ge \eta_1^{"} y_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} K_j^{1"} \ge 1\,, K_j^{1"} \ge 0\,, j = 1\,, \dots, n\,. \end{aligned} \tag{۶}$$

$$\begin{aligned} &\max \quad \eta_1^{"} , \\ &s.t \quad \sum_{j=1}^{n} x_j K_j^{1"} \leq x_0 , \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j K_j^{1"} \geq \eta_1^{"} y_0 , \\ &\sum_{j=1}^{n} K_j^{1"} \geq 1 , K_j^{1"} \geq 0 , j = 1 , \dots , n . \end{aligned} \tag{۷}$$

تمام فرآیندهای تولید مشابه، متفاوت از مورد اول، برای دومین بار ،تمام فرآیند تولید توسط یک نشانگر تصمیم اداره می شود، هدف او به حداکثر رساندن مجموع نسبت بین خروجی و ورودی از مرحله ۱ و ۲ است. سپس در این مورد، خروجی از هر مرحله باید گسترش یا کاهش یابد به عبارت دیگر رسیدن به هدف از فرمانبردار .طبق تعریف ۲-۳، در این مورد توصیف بازده به مقیاس مربوط به مرحله ۱ و ۲ را به طور مشابه با فرآیند کلی تولید تعریف کرد، در حال حاضر ما فقط یک تعریف به شرح زیر داریم.

تعریف ۲-۶- فرض کنید که DMU_{j0} یک واحد مشاهده شده کارا باشد، در دومین حالت، برای پروسه کلی،

الف: اگر $\beta_1^{"*} \geq 1$ یا $0 < \eta_1^{"*} < 1$ ، سپس DMU_{j0} در پروسه کلی دارای بازده به مقیاس افزایشی است.

ب: اگر $\beta_1^{"*} = 1$ یا $\eta_1^{"*} = 1$ سپس DMU_{j0} در پروسه کلی دارای بازده به مقیاس ثابت است.

ج: اگر $0 < \beta_1^{"*} < 1$ یا $\eta_1^{"*} > 1$ سپس DMU_{j0} در پروسه کلی دارای بازده به مقیاس کاهشی است.

در ادامه بخش سوم، برای فرآیند تولید دو مرحله‌ای، شرایط کافی و ضروری را در دو مورد برای مشخص کردن RTS از مرحله های ۱و۲ وقتی که ورودی اولیه تغییر می کند در نظر می‌گیریم.

۳- بازده به مقیاس از پروسه دو مرحله‌ای

فرض کنید که n واحد تصمیم گیرنده با ساختار دو مرحله وجود دارد و واحد تصمیم گیرنده DMU_{j0} روی مرز مجموعه امکان تولید است و کارای تکنیکی است. بازده به مقیاس متناظر با DMU_{j0} را در دو حالت در نظر می گیریم. حالت اول ورودی اولیه تغییر می‌کند و باید بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه و بیشترین نسبت بین خروجی نهایی و ورودی میانی حاصل گردد، یعنی مرحله یک رهبر است و مرحله دو پیرو. دومین حالت تمام فرآیند تولید به وسیله یک نشانگر تصمیم اداره می‌شود و ورودی اولیه تغییر می‌کند و سپس بیشترین مجموع از نسبت بین خروجی و ورودی از دو مرحله بدست می‌آید.

۳-۱- مورد رهبر و پیرو

در این زیر بخش، ورودی اولیه از مرحله یک در جهت RTS فعلی خود برای بدست آوردن بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه تغییر می کند. مدلهای جدید شبکه DEA را بر پایه مفروضاتمان از شرایط کافی و ضروری برای وضعیت های متمایز از RTS از هر مرحله بعد از تغییر ورودی اولیه به وجود می‌آوریم. به عبارت دیگر بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه استنباط می شود. فرض می‌کنیم که ورودی اولیه متناظر با واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j0} از x_0 به $\alpha_0 x_0$ یا $\mu_0 x_0$ به ترتیب افزایش یا کاهش یابد، جایی که $\alpha_0 > 1$ و $0 < \mu_0 < 1$. بنابراین اگر DMU_{j0} واحد تحت ارزیابی، پایین تر از سطح مجموعه امکان تولید قرار بگیرد، اول مقدار کارایی را طبق مدل (۲) محاسبه می‌کنیم و سپس RTS را از نقاط $(x_0, \theta_1^* z_0, \theta_2^* y_0)$ ، آنالیز می‌کنیم که وضعیت مشابه با نقاط (x_0, z_0, y_0) دارد (وی و یان، ۲۰۰۴). متعاقباً ، بحث می‌کنیم در حالیکه رهبر در حال تغییرات بهینه از ورودی اولیه است، وضعیت RTS از پیرو مربوطه از مرحله دو چه خواهد بود.

شرایط لازم و کافی برای مشخص کردن RTS از دو مرحله به وسیله قضایای بعدی بیان می شود .

برنامه های خطی زیر را در نظر بگیرید.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ۴ ، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۴۴-۳۳۲

$$\begin{aligned} &\max\ \beta_2\,, \\ &s.t\ \ \sum_{j=1}^{n} z_j\lambda_j^2 \le \beta_1^* z_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j\,\lambda_j^2 \ge \beta_2 y_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{1*} \le 1\,, \lambda_j^2 \ge 0\,, j=1\,,\dots,n\,. \end{aligned} \tag{۸}$$

$$\begin{aligned} &\max\ \eta_2, \\ &s.t\ \sum_{j=1}^{n} z_j \mathrm{K}_j^2 \le \eta_1^* z_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n} y_j\,\mathrm{K}_j^2 \ge \eta_2 y_0\,, \\ &\sum_{j=1}^{n}\mathrm{K}_j^2 = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{K}_j^{1*} \ge 1, \mathrm{K}_j^2 \ge 0, j=1\,,\dots,n. \end{aligned} \tag{۹}$$

توجه کنیم که β_1^* و $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{1*}$ و η_1^* و $\sum_{j=1}^{n}\mathrm{K}_j^{1*}$ به ترتیب جواب های بهینه حاصل از مدلهای (۲) و (۳) هستند. بنابراین جواب های بهینه حاصل از مدل‌های (۸) و (۹) به صورت β_2^* و $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{2*}$ و η_2^* و $\sum_{j=1}^{n}\mathrm{K}_j^{2*}$ تعریف می‌شوند.

قضیه ۳-۱-۱- فرض کنید که واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j0}، کارای سراسری باشد. اگر مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد و ورودی اولیه x_0 برای بدست آوردن بیشترین نسبت بین خروجی میانی و ورودی اولیه تغییر بهینه پیدا کند، مرحله دوم دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد اگر و تنها اگر $1 < \beta_1^* < \beta_2^*$ و $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{1*} < 1$ و $\eta_1^* = \eta_2^* = 1$ و $\sum_{j=1}^{n}\mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

اثبات: چون مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی است، وقتی ورودی از x_0 به $\alpha_0 x_0$ تغییرمی کند،تولید میانی متناظر و خروجی نهایی به ترتیب از z_0 به $\gamma_0 z_0$ و از y_0 به $\varepsilon_0 y_0$ تغییرمی کند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_j\hat{\lambda}_j^1 \le \alpha_0\, x_0, \sum_{j=1}^{n} z_j\hat{\lambda}_j^1 \ge \gamma_0 z_0, \sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^1 = 1. \\ &\sum_{j=1}^{n} z_j\hat{\lambda}_j^2 \le \gamma_0 z_0, \sum_{j=1}^{n} y_0\hat{\lambda}_j^2 \ge \varepsilon_0 y_{0,} \sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^2 = 1. \\ &\hat{\lambda}_j^1 \ge 0, \hat{\lambda}_j^2 \ge 0, j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

اگرما تعریف کنیم $\tilde{\beta}_1 = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}\,, \tilde{\beta}_2 = \frac{\varepsilon_0}{\alpha_0}\,, \lambda_j^1 = \frac{\hat{\lambda}_j^1}{\alpha_0}\,, \lambda_j^2 = \frac{\hat{\lambda}_j^2}{\alpha_0}\,, j = 1\,,\dots,n$ یک جواب شدنی بصورت زیر حاصل می‌شود. بنابراین قضیه ثابت می‌شود.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_j\,\lambda_j^1 \le x_0, \sum_{j=1}^{n} z_j\lambda_j^1 \ge \tilde{\beta}_1 z_0, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 = \frac{1}{\alpha_0} < 1\,. \\ &\sum_{j=1}^{n} z_j\lambda_j^2 \le \tilde{\beta}_1\, z_0, \sum_{j=1}^{n} y_j\,\lambda_j^2 \ge \tilde{\beta}_2 y_0, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 = \frac{1}{\alpha_0} < 1\,. \end{aligned}$$

چون(x_0, z_0) و $(\gamma_0 z_0, \varepsilon_0 y_0)$ هردو دارای بازده به مقیاس افزایشی هستند، بنابراین مطابق تعاریف ۲-۴ و ۲-۵ برای مدل‌های (۲) و (۸) داریم : $1 < \beta_1^* < \beta_2^*$ و $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{1*} < 1$ است.

برعکس: فرض کنیدDMU_{j0} کارای شبکه DEA باشد، اگر $1 < \beta_1^* < \beta_2^*$, $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{1*} < 1$ مطابق قیود مدل‌های (۲) و (۸) روابط زیربرقرار است.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j^1 \le x_0, \sum_{j=1}^{n} z_j\,\lambda_j^1 \ge \beta_1^* z_0\,,$$
$$\sum_{j=1}^{n} z_j\lambda_j^2 \le \beta_1^* z_0, \sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j^2 \ge \beta_2^* y_0\,,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{2*} < 1\,,$$
$$\lambda_j^{1*} \ge 0, \lambda_j^{2*} \ge 0, j = 1, \dots, n.$$

بنابراین مطابق تعاریف ۲-٤ و ۲-۵ ما می‌دانیم که(x_0, z_0) و $(\gamma_0 z_0, \varepsilon_0 \gamma_0)$ هردو دارای بازده به مقیاس افزایشی هستند. بنابراین چون (x_0, y_0) دارای بازده به مقیاس افزایشی است، بنابراین در شبکه دو مرحله ای رهبر است. درمرحله یک ورودی نباید کاهش یابد. بنابراین برای واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j0} که کارای سراسری است، رابطه$\eta_1^* = \eta_2^* = 1$ و $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{2*} = 1$ برقراراست و اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۳-۱-۲- فرض کنید که واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j0} کارای سراسری باشد. ورودی اولیه به مقدار بهینه خود تغییر یابد.

۱. اگر مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد، سپس بعد از تغییرات، مرحله دو دارای بازده به مقیاس ثابت است اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* > 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

۲. اگر مرحله یک دارای بازده به مقیاس افزایشی باشد، سپس بعد از تغییرات، مرحله دو دارای بازده به مقیاس کاهشی است و پروسه کلی

الف.$IRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* > \beta_2^* > 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

ب.$CRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* > \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

ج.$DRTS$ اگر و تنها اگر$\beta_1^* > 1 > \beta_2^*, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

۳.اگر مرحله یک $CRTS$ باشد، سپس بعد از تغییرات ،مرحله دو

الف.$IRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_2^* > 1 = \beta_1^*, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = 1 > \eta_2^*, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

ب.$CRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} < 1, \eta_1^* = 1, \eta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

ج.$DRTS$ اگر و تنها اگر$\beta_1^* = 1 > \beta_2^*, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} < 1, \eta_2^* > 1 = \eta_1^*, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} = 1$.

٤.اگر مرحله یک $DRTS$ باشد، سپس بعد از تغییرات مرحله دو $IRTS$ است و پروسه کلی

الف. $IRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* > 1 > \eta_2^*, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} > 1$.

ب.$CRTS$ اگر و تنها اگر $\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* > 1 = \eta_2^*, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} > 1$.

ج.$DRTS$ اگر و تنها اگر$\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* > \eta_2^* > 1, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} > 1$.

۵. اگر مرحله یک DRTS باشد، سپس بعد از تغییرات، مرحله دو

الف. $CRTS$ اگر و تنها اگر$\beta_1^* = \beta_2^* = 1, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{1*} = 1, \eta_1^* = \eta_2^* > 1, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{K}_j^{1*} > 1$.

ب. $DRTS$ اگر و تنها اگر $1 < \sum_{j=1}^{n} K_j^{1*}$ ، $1 < \eta_1^* < \eta_2^*$ ، $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{1*} = 1$ ، $\beta_1^* = \beta_2^* = 1$.

اثبات قضیه **۳-۱-۲** شبیه قضیه **۳-۱-۱** هست و در اینجا اثبات نشده است.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که پروسه کلی توسط یک مدیر اداره می‌شود.

در این زیر بخش، بحث می‌کنیم در مورد مساله تغییرات ورودی اولیه و در ادامه در مورد بیشترین نسبت جمع بین خروجی و ورودی از مرحله یک و دو بحث می‌کنیم. در این مورد، پروسه کلی تولید توسط یک نشانگر تصمیم یا مدیر اداره می‌شود، و دو مرحله همان نقش را ایفا می‌کنند. ما شرایط لازم و کافی را برای تشخیص وضعیت های RTS از دو مرحله تولید بعد از اینکه ورودی اولیه تغییر کرد، پیشنهاد می‌دهیم. دو مدل (۱۰) و (۱۱) در زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}
&\max\ \hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2,\\
&s.t\quad \sum_{j=1}^{n} x_j\,\hat{\lambda}_j^1 \le x_0, \sum_{j=1}^{n} z_j\hat{\lambda}_j^1 \ge \hat{\beta}_1 z_0,\\
&\sum_{j=1}^{n} z_j\hat{\lambda}_j^2 \le \hat{\beta}_1 z_0, \sum_{j=1}^{n} y_j\hat{\lambda}_j^2 \ge \hat{\beta}_2 y_0,\\
&\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^1 = \sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^2 \le 1\ ,\\
&\hat{\lambda}_j^1 \ge 0, \hat{\lambda}_j^2 \ge 0, j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned}
&\max\ \hat{\eta}_1+\hat{\eta}_2,\\
&s.t.\quad \sum_{j=1}^{n} x_j\widehat{K}_j^1 \le x_0, \sum_{j=1}^{n} z_j\,\widehat{K}_j^1 \ge \hat{\eta}_1 z_0\ ,\\
&\sum_{j=1}^{n} z_j K_j^2 \ge \hat{\eta}_1 z_0, \sum_{j=1}^{n} y_j\widehat{K}_j^2 \ge \hat{\eta}_2 y_{0,}\\
&\sum_{j=1}^{n}\widehat{K}_j^1 = \sum_{j=1}^{n}\widehat{K}_j^2 \ge 1,\\
&\widehat{K}_j^1 \ge 0, \widehat{K}_j^2 \ge 0. j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

جواب های بهینه حاصل از مدلهای (۱۰) و (۱۱) بصورت زیرتعریف می‌کنیم.

$\hat{\beta}_1^*, \beta_2^*, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1, \sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_j^{2*}, \hat{\eta}_1^*, \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^{n}\widehat{K}_j^{1*}$ و $\sum_j^n \widehat{K}_j^{2*}$

در زیر قضایای زیر شرایط لازم و کافی برای تعیین کلاس RTS از مرحله های یک و دو در دومین حالت را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳-۱-۳- فرض کنید که واحد تحت ارزیابی یعنی DMU_{j0} ،کارای سراسری باشد. بعد از اینکه ورودی اولیه برای بدست آوردن بیشترین مجموع نسبت بین خروجی و ورودی از دو مرحله تغییر می‌کند، مرحله های یک و دو هر دو در وضعیت $IRTS$ هستند اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_2^* > \hat{\beta}_1^* > 1, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{1*} < 1$ یا $1 > \hat{\eta}_1^* > \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^{n}\widehat{K}_j^{1*} > 1$.

روابط متفاوت از RTS در میان مرحله های یک و دو می‌باشد و همچنین بازده به مقیاس پروسه کلی به وسیله قضیه ۳-۱-۴ بر اساس برنامه های (۱۰) و (۱۱) بیان می‌شود.

قضیه ۳-۱-۴- فرض کنید که مشاهدات DMU_{j0} کارایی شبکه DEA است. پس از اینکه ورودی اولیه برای بدست آوردن بیشترین مجموع نسبت بین خروجی و ورودی از مرحله های یک و دو تغییر پیدا کرد، سپس

۱. مرحله یک $IRTS$ است و مرحله دو $CRTS$ است اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$.

یا $\hat{\eta}_1^* = \hat{\eta}_2^* < 1, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

۲. مرحله یک $IRTS$ است و مرحله دو $DRTS$ است، بنابراین کل فرآیند تولید هست

الف. $IRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* > \hat{\beta}_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* < \hat{\eta}_2^* < 1, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* > \hat{\beta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* < \hat{\eta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

ج. $DRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* > 1 > \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* < 1 < \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

۳. مرحله یک $CRTS$ است و مرحله دو هست

الف. $IRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_2^* > \hat{\beta}_1^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = 1 > \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = \hat{\eta}_2^* = 1, \sum_{j=1}^n K_j^{1*} > 1$.

ج. $DRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = 1 > \beta_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = 1 < \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

٤.مرحله یک $DRTS$ است و مرحله دو $IRTS$ است، بنابراین کل فرآیند تولید هست

الف. $IRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* < 1 < \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* > 1 > \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* < 1 = \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* > 1 = \hat{\eta}_2^*, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

ج. $DRTS$ اگر و تنها اگر $1 > \hat{\beta}_2^* > \hat{\beta}_1^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* > \hat{\eta}_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

۵. مرحله یک $DRTS$ است و مرحله دو هست.

الف. $CRTS$ اگر و تنها اگر $\hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_2^* < 1, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_1^* = \hat{\eta}_2^* > 1, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

ب. $DRTS$ اگر و تنها اگر $1 > \hat{\beta}_1^* > \hat{\beta}_2^*, \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j^{1*} < 1$ یا $\hat{\eta}_2^* > \hat{\eta}_1^* > 1, \sum_{j=1}^n \widehat{K}_j^{1*} > 1$.

اثبات قضیه ۳-۱-٤ شبیه قضیه ۳-۱-۳ است و در اینجا ذکر نشده است.

۳-۲- رابطه *RTS* بین مراحل و پروسه کلی

بر پایه آنالیز بالا و تعریف ۲-۵ ،در این دو مورد رابطه RTS میان مراحل و پروسه کلی به صورت زیر نتیجه گیری می شود: اگر ورودی اولیه به صورت بهینه تغییر کند.

۱.مرحله یک $IRTS$ است و

الف. مرحله دو $IRTS$ یا $CRTS$ است، سپس کل فرآیند باید $IRTS$ باشد.

ب. مرحله دو $DRTS$ است، سپس کل فرآیند ممکن است $CRTS,IRTS$ یا $DRTS$ باشد.

۲.مرحله یک $CRTS$ است و

الف. مرحله دو $IRTS$ است، سپس کل فرآیند باید $IRTS$ باشد.

ب. مرحله دو همچنین $CRTS$ است، سپس کل فرآیند باید $CRTS$ باشد.

ج. مرحله دو $DRTS$ است، سپس کل فرآیند باید $DRTS$ باشد.

۳. مرحله یک $DRTS$ است،

الف. مرحله دو $IRTS$ است ،سپس کل فرآیند تولید ممکن است $IRTS$, $CRTS$ یا $DRTS$ باشد.

ب .مرحله دو$CRTS$ یا $DRTS$ است، سپس کل فرآیند باید$DRTS$ باشد.

۴- مثال عددی

سیستم تولیدی دو مرحله ای را در نظر بگیرید .شش $DMUs$ در نظر گرفته شده است، بردار های ورودی، تولید میانی و خروجی تک بعدی هستند. داده ها در جدول یک آمده است.

جدول ۱- داده های مربوط به شش واحد تصمیم گیرنده.

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
X	1.8	2	3	4	6	7
Z	1	2	6	9	13.5	14
Y	1	4	7	8	9	9

با حل مدل (۱) ما شش واحد تصمیم گیرنده که همگی کارای شبکه DEA هستند، داریم. بر اساس مدل‌های(۲) و (۳) و همچنین (٤) و (٥) جوابهای بهینه حاصل از مدلها برای هر DMU در **جدول (۲)** آمده است. در **جدول (۲)** مقادیر λ^{1*} و K^{1*} و $\acute{\eta}_1^*$ و $\acute{K}^{1*}$ بردارهای شش بعدی هستند و $\lambda_5^{1*} = 0.3$.به این معنی که عنصر پنجم از بردار λ^{1*} 0.3 است و بقیه عناصر صفر هستند.

توجه کنید که مقادیر بهینه منحصر به فرد هستند. جوابهای بهینه حاصل از مدل‌های (۸) و (۹) در **جدول (۳)** آمده است و جوابهای بهینه حاصل از مدل‌های (۱۰) و (۱۱) در **جدول (٤)** آمده است.

جدول ۲ ـ مقادیر حاصل از مدل‌های (۲) و (۳) و (۴) و (۵).

		DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
Stage 1	β_1^*	4.05	2.25	1.125	1	1	1
	η_1^*	1	1	1	1	1	1
	λ^{1*}	$\lambda_5^{1*} = 0.3$	$\lambda_5^{1*} = 0.33$	$\lambda_5^{1*} = 0.5$	$\lambda_5^{1*} = 0.67$	$\lambda_5^{1*} = 1$	$\lambda_6^{1*} = 1$
	K^{1*}	$k_1^{1*} = 1$	$k_2^{1*} = 1$	$k_3^{1*} = 1$	$k_4^{1*} = 1$	$k_5^{1*} = 1$	$k_6^{1*} = 1$
Stage 2	$\acute{\beta}_1^*$	2	1	1	1	1	1
	$\acute{\eta}_1^*$	1	1	1.17	2.25	3	3.11
	$\acute{\lambda}^{1*}$	$\acute{\lambda}_2^{1*} = 0.5$	$\acute{\lambda}_2^{1*} = 1$	$\acute{\lambda}_3^{1*} = 1$	$\acute{\lambda}_4^{1*} = 1$	$\acute{\lambda}_5^{1*} = 1$	$\acute{\lambda}_5^{1*} = 1$
	$\acute{k}^{1*}$	$\acute{k}_1^{1*} = 1$	$\acute{k}_2^{1*} = 1$	$\acute{k}_2^{1*} = 3$	$\acute{k}_2^{1*} = 4.5$	$\acute{k}_2^{1*} = 6.75$	$\acute{k}_2^{1*} = 7$

جدول ۳ ـ مقادیر حاصل از مدل‌های (۸) و (۹) .

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
β_1^*	۴٫۰۴	۲٫۲۵	۱٫۱۲۵	۱	۱	۱
β_2^*	۲٫۷	۰٫۷۴۲۵	۰٫۶۴۳	۰٫۷۵	۱	۱
λ^{1*}	$\lambda_5^{1*} = 0.3$	$\lambda_5^{1*} = 0.33$	$\lambda_5^{1*} = 0.5$	$\lambda_5^{1*} = 0.67$	$\lambda_5^{1*} = 1$	$\lambda_6^{1*} = 1$
λ^{2*}	$\lambda_5^{2*} = 0.3$	$\lambda_5^{2*} = 0.24,$ $\lambda_5^{2*} = 0.09$	$\lambda_5^{2*} = 0.5$	$\lambda_4^{2*} = 0.01,$ $\lambda_5^{2*} = 0.66$	$\lambda_5^{2*} = 1$	$\lambda_6^{2*} = 1$
η_1^*	1	1	1	1	1	1.125
η_2^*	1	1	1	1	1	1.169
K^{1*}	$k_1^{1*} = 1$	$k_2^{1*} = 1$	$k_3^{1*} = 1$	$k_4^{1*} = 1$	$k_5^{1*} = 1$	$k_6^{1*} = 1$
K^{2*}	$k_1^{2*} = 1$	$k_2^{2*} = 1$	$k_3^{2*} = 1$	$k_4^{2*} = 1$	$k_5^{2*} = 1$	$k_4^{2*} = 0.01$ $, k_5^{2*} = 1.16$

جدول ۴- مقادیر حاصل از مدل‌های (۱۰) و (۱۱).

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
$\hat{\beta}_1^*$	3.6	1	1	1	1	1
$\hat{\beta}_2^*$	4.2	1	1	1	1	1
$\hat{\lambda}^{1*}$	$\hat{\lambda}_3^{1*} = 0.6$	$\hat{\lambda}_4^{1*} = 0.5$	$\hat{\lambda}_3^{1*} = 1$	$\hat{\lambda}_4^{1*} = 1$	$\hat{\lambda}_5^{1*} = 1$	$\hat{\lambda}_6^{1*} = 1$
$\hat{\lambda}^{2*}$	$\hat{\lambda}_3^{2*} = 0.6$	$\hat{\lambda}_4^{2*} = 0.5$	$\hat{\lambda}_3^{2*} = 1$	$\hat{\lambda}_4^{2*} = 1$	$\hat{\lambda}_5^{2*} = 1$	$\hat{\lambda}_6^{2*} = 1$
$\hat{\eta}_1^*$	1	1	1	0.89	0.89	1
$\hat{\eta}_2^*$	1	1	1	1.167	1.56	1.815
$\hat{k}^{1*}$	$\hat{k}_1^{1*} = 1$	$\hat{k}_2^{1*} = 1$	$\hat{k}_3^{1*} = 1$	$\hat{k}_3^{1*} = 1.33$	$\hat{k}_3^{1*} = 2$	$\hat{k}_3^{1*} = 2.33$
$\hat{k}^{2*}$	$\hat{k}_1^{2*} = 1$	$\hat{k}_2^{2*} = 1$	$\hat{k}_3^{2*} = 1$	$\hat{k}_3^{2*} = 1.33$	$\hat{k}_3^{2*} = 2$	$\hat{k}_3^{2*} = 2.33$

طبق تعریف های ۲-٤ تا ۲-٦ و قضایای ۳-۱-۱ تا ۳-۱-٤ همچنین نتایج حاصل در **جداول (۳) و (٤)** بازده به مقیاس مربوط به واحدهای تصمیم گیرنده در **جدول (۱)**، در **جداول (٥) و (٦)** آمده است.

DMU1	DMU2	DMU3

جدول ۵- کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده.

حالت اصلی	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	افزایشی
	مرحله ۲	افزایشی	ثابت	کاهشی
استراتژی اول	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	افزایشی
	مرحله ۲	کاهشی (افزایشی)	کاهشی (افزایشی)	کاهشی (افزایشی)
استراتژی دوم	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	–
	مرحله ۲	افزایشی	کاهشی (ثابت)	–

جدول ۶ - کلاس بازده به مقیاس واحدهای تصمیم گیرنده.

		DMU4	DMU5	DMU6
حالت اصلی	مرحله ۱	ثابت	ثابت	کاهشی
	مرحله ۲	کاهشی	کاهشی	کاهشی
استراتژی اول	مرحله ۱	ثابت	–	کاهشی
	مرحله ۲	کاهشی	–	کاهشی
استراتژی دوم	مرحله ۱	افزایشی	افزایشی	ثابت
	مرحله ۲	کاهشی (کاهشی)	کاهشی (کاهشی)	کاهشی

توجه کنید که در جدول علامت " –" یعنی در دومین حالت $DMU3$ بدون تغییر است، و (افزایشی) به معنی کل فرآیند سراسری تولید در وضعیت های افزایشی RTS است ،بقیه اصطلاحات معنی مشابه دارند.

برای مثال در مورد واحدهای $DMU2$ و $DMU4$، پارآمترها در **جداول (۲) و (۳)** به روش زیر توضیح داده می‌شود.

برای $DMU2$ ،در **جدول (۳)** می توانیم ببینیم که RTS روی این موارد متفاوت از بقیه است .در حالت اصلی، حالتهای ۱ و ۲ افزایشی و ثابت بودن RTS هستند به ترتیب در این مورد، چون RTS افزایشی از مرحله یک است، ورودی اولیه باید از ۲ تا ٦ افزایش یابد . $\left(\alpha_0 x_0 = \frac{1}{\rho_{1*}} x_{\ 0} = \frac{1}{0.33} 2 = 6\right)$ و بیشترین نسبت $\beta_1^* = 2.25$ بین تولید میانی و ورودی اولیه بدست می‌آید ،که تولید میانی از ۲ تا ۱۳/۵تغییر می‌کند.

$\left(\gamma_0 z_0 = \beta_1^* \alpha_0 z_0 = \frac{\beta_1^*}{\rho_{1*}} z_0 = \frac{2.25}{0.33} 2 \cong 13.5\right)$ بنابراین، برای مرحله دو ،بیشترین نسبت $\beta_2^* = 0.7425$ خواهد بود، خروجی نهایی متناظر به ۹ می‌رسد. $\varepsilon_0 y_0 \beta_2^* \alpha_0 y_0 = \frac{\beta_2^*}{\rho^{1*}} y_0 = \frac{0.7425}{0.33} 4 \cong 9$ در نتیجه، طبق قضیه ۳-۱-۲ (c) (ii) مرحله یک RTS افزایشی است $(\beta_1 > 1)$ و مرحله دو RTS کاهشی است. علاوه بر این، کل فرآیند تولید روی وضعیت RTS کاهشی است. برای دومین مورد، از **جدول (٤)** میتوانیم ببینیم که ورودی اولیه از ۲ تا ٤ تغییر می کند. $\left(\acute{\alpha}_0 x_0 = \frac{1}{\hat{\rho}^{1*}} x_0 = 4\right)$ بیشترین نسبت از مرحله یک $\hat{\beta}_1^* = 2.25$ است و تولید میانی ۹ بدست می آید، سپس بیشترین نسبت متناظر از مرحله دو $\hat{\beta}_2^* = 1$ است و خروجی نهایی ۸ است. طبق قضیه ۳-۱-٤ (c)(ii)، مرحله یک RTS افزایشی $\hat{\beta}_1^* > 1$ است و مرحله دو RTS کاهشی است ، $(\hat{\beta}_1^* > \hat{\beta}_2^*)$ بنابراین کل فرآیند تولید ثابت بودن RTS است$(\hat{\beta}_2^* = 1)$.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله بازده به مقیاس را برای فرآیند تولید با ساختار شبکه دو مرحله‌ای وقتی ورودی اولیه از دو جنبه تغییر می‌کند، در نظر گرفتیم، یکی اینکه ورودی اولیه تغییر کند برای بدست آوردن بیشترین نسبت بین تولید میانی و ورودی اولیه از مرحله یک، یعنی اولین مرحله

رهبر است و دومین مرحله فرمانبردار است .دیگری اینکه ورودی اولیه تغییر کند برای بدست آوردن بیشترین مجموع نسبت از مرحله یک و دو یعنی، دو مورد نقش یکسان انجام می‌دهند و کل فرآیند تولید به وسیله یک نشانگر تصمیم انجام می‌شود. طبق تکنیک تئوری شبکه DEA ،ما مدلهای جدید شبکه DEA را فراهم می‌کنیم برای بدست آوردن شرایط کافی و ضروری برای تشخیص دادن افزایش، ثابت بودن و کاهش RTS از هر مرحله (مرحله های یک و دو) در دو مورد، به ترتیب در اولین مورد متوجه شدیم، از آنجایی که مرحله یک رهبر است ،وقتی مرحله یک از ورودی اولیه برای رسیدن به بیشترین نسبت بین تولید میانی و ورودی اولیه تغییر می‌کند، حالت اصلی از RTS از مرحله دو تغییر خواهدکرد. می توانیم روش ارائه شده در مقاله را برای دیگر ساختارهای شبکه توسعه دهیم.

منابع

Banker, R. D. (1984). Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 17, 35–44.
Banker, R. D. & Thrall R. M. (1992). Estimation of return to scale using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 62, 78–84.
Banker, R. D., Cooper, W. W., Seiford, L. M., Thrall, R. M. & Zhu J. (2004). Returns to scale in different DEA models. *European journal of operational research*, 154, 345–362.
Eslami R., Khodabakhshi, M., Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F. & Khoveyni, M. (2012). Estimating most productive scale size with imprecise chance constrained input–output orientation model in data envelopment analysis. *Computers & industrial engineering*, 63, 254–261.
Eslami, R. & Khoveyni, M. (2013). Right and left returns to scales in data envelopment analysis: Determining type and measuring value. *Computers &industrial engineering*, 65, 500–508.
Färe, R. & . Grosskopf, S. (1994). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis: A comment. *Journal of operational research*, 79, 379–382.
Färe, R. & Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-Economic planning science*, 34, 35–49.
Jahanshahloo, G. R. & Khodabakhshi, M. (2003). Using input–output orientation model for determining most productive scale size in DEA. *Applied mathematics and computation*, 146, 849–855.
Jahanshahloo, G. R. & Soleimani-damaneh, M. (2004). Estimating returns-to-scale in data envelopment analysis: A new procedure. *Applied mathematics and computation*, 150, 89–98.
Krivonozhko, V. E., Føsund, F. R. & Lychev, A. V. (2014). Returns-to-scale properties in DEA models: The fundamental role of interior points. *European journal of operational research*, 232, 644–670.
Khodabakhshi, M., Gholami, Y. & Kheirollahi, H. (2010). An additive model approach for estimating returns to scale in imprecise data envelopment analysis, Applied Mathematical Modelling, 34, 1247–1257.
Zhang, Q. W. (2015). Ranking performance of DMUs with two-stage structure-An empirical analysis of five state-owned banks. Mathematics in Practice and Theory, 7, 101–106. (in Chinese)