



روشی برای محاسبه تراکم بازه‌ای در تحلیل پوششی داده‌ها

علیرضا حاجی حسینی*، فاطمه حکمت‌پور
گروه ریاضی، واحد زاهدان، دانشگاه آزاد اسلامی، زاهدان، ایران

چکیده

در تحلیل پوششی داده‌ها یک رویکرد برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحد‌های تصمیم‌گیری متجانس است. تراکم نیز یکی از مفاهیم مهم در تحلیل پوششی داده‌ها و اقتصاد می‌باشد. برای اندازه‌گیری تراکم در محیط نادقیق، مدل‌ها و روش‌های متعدد پیشنهاد شده است. هدف از این مقاله معرفی یک رویکرد جدید جهت اندازه‌گیری تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها است به طوری که داده‌ها بازه‌ای می‌باشند. در این مقاله از مدل‌های تشخیص تراکم بر اساس مقایسه ورودی‌ها با وزن‌های مشترک و برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای استفاده شده و برای واحد‌های دارای تراکم، تراکم بازه‌ای معرفی شده است. روش پیشنهادی برای داده‌های بازه‌ای با مثال‌هایی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تراکم، برنامه‌ریزی بازه‌ای..

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۴

اصلاح: ۱۳۹۸/۰۹/۲۲

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۰۷

۱- مقدمه

تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها زمانی رخ می‌دهد که افزایش یک یا چند ورودی می‌تواند با کاهش یک یا چند خروجی همراه باشد، بدون بهبود هر گونه ورودی یا خروجی دیگر (کوپر و همکاران، ۲۰۰۰). تحقیق در مورد تراکم توسط (فار و اسونسون، ۱۹۸۰) آغاز شده و در سال‌های ۱۹۸۳ و ۱۹۸۵ توسط فار و گراسکف تکمیل شده است. آنها مدلی با توجه به مفهوم تحلیل پوششی داده‌ها ارائه کردند. رویکرد دیگری نیز در سال ۱۹۹۶ توسط کوپر و همکاران ارائه شد. براکت و همکاران (۱۹۹۶) و کوپر و همکاران (۲۰۰۰) هم رویکردهایی جدید مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای اندازه‌گیری تراکم ورودی را مطرح نموده‌اند. در حالی که ادبیات قابل توجه در مورد این موضوع وجود دارد، دو روش اخیر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. یکی دیگر از روش‌های قابل توجه برای اندازه‌گیری تراکم، روش نورا و همکاران (۲۰۱۰) است. در این مقاله، از مدل‌های تشخیص تراکم بر اساس مقایسه ورودی‌ها با وزن‌های مشترک (حاجی حسینی و همکاران، ۲۰۱۵) و برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای (ونگ و همکاران، ۲۰۰۵) استفاده شده و برای واحد‌های دارای تراکم، تراکم بازه‌ای معرفی می‌شود.



تراکم یکی از مفاهیم مهم علم اقتصاد و تحلیل پوششی داده هاست. این مفهوم هنگامی رخ می‌دهد که افزایش یک یا چند ورودی باعث کاهش یک یا چند خروجی گردد و یا کاهش یک یا چند ورودی باعث افزایش یک یا چند خروجی شود، بدون آن‌که در سایر ورودی‌ها و خروجی‌ها تغییری حاصل گردد. بنابراین تراکم نوعی ناکارایی است و لازم است واحدهای دارای تراکم، تعیین شده و میزان تراکم آنها نیز معین گردد. همچنین تراکم باعث زیان‌هایی در جامعه می‌شود از جمله زیان در تولید، زیان در مصرف و ... که باید جلوی این زیان‌ها گرفته شود. این موضوع در سال‌های اخیر مورد توجه زیاد ریاضی‌دانان و اقتصاددانان قرار گرفته است. مدل‌ها و روش‌های متعددی برای اندازه‌گیری و تعیین میزان تراکم در واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه شده است. در این‌جا ابتدا مجموعه وزن مشترک نورا و همکاران (۲۰۱۲) برای مدل BCC آورده می‌شود. سپس با استفاده از روش نورا و همکاران برای تراکم (۲۰۱۰) روش محاسبه تراکم با استفاده از مجموعه مشترک وزن‌ها (حاجی‌حسینی و همکاران، ۲۰۱۵) مطرح می‌گردد.

یکی از معروف‌ترین مدل‌های DEA، مدل مضر بی BCC در ماهیت خروجی می‌باشد. کارایی DMU_o با m ورودی و s خروجی به وسیله این مدل به صورت زیر (مدل ۱) ارزیابی می‌شود.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{v^t x_o + v_o}{u^t y_o}, \\ \text{s. t.} \quad & \frac{v^t x_j + v_o}{u^t y_j} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n, \\ & u^t \geq 1\varepsilon, \\ & v^t \geq 1\varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

$v^t = (v_1, \dots, v_m)$ متغیرهای تصمیم‌گیرنده مسأله بوده و $u^t = (u_1, \dots, u_s)$ بردارهای ورودی و خروجی $DMU_j (j = 1, \dots, n)$ می‌باشد. اگر جواب بهینه مدل بالا برابر یک باشد DMU_o کاراست در غیر اینصورت ناکاراست. مدل برنامه‌ریزی خطی معادل مدل (۱) به صورت (۲) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & v^t x_o + v_o \\ \text{s. t.} \quad & u^t y_o = 1, \\ & v^t x_j + v_o - u^t y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n, \\ & v^t \geq 1_m \varepsilon, \quad u^t \geq 1_s \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در ناحیه شدنی مدل (۲)، هر اندازه سمت چپ قید دوم کوچکتر باشد واحد تصمیم‌گیرنده بیشتر ترجیح داده می‌شود. پس هنگامی که $v^t x_j + v_o - u^t y_j (j = 1, \dots, n)$ مینیمم شود، بهترین وزن به دست خواهد آمد. بنابراین به جای حل مدل (۲) می‌توان $v^t x_j + v_o - u^t y_j (j = 1, \dots, n)$ را با همان ناحیه شدنی قبل کمینه نمود به طوری که برنامه‌ریزی خطی چند هدفه ذیل جهت مشخص شدن مجموعه وزن‌های مشترک به دست می‌آید.



$$\begin{aligned} \min \quad & \{v^t x_j + v_o - u^t y_j ; j = 1, \dots, n\}, \\ \text{s. t.} \quad & v^t x_j + v_o - u^t y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u^t \geq 1_s \varepsilon, \\ & v^t \geq 1_m \varepsilon. \end{aligned} \quad (3)$$

برای حل مدل (۳) از روش مجموع وزن دار شده با وزن های برابر با یک استفاده می‌شود. بنابراین برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n (v^t x_j + v_o - u^t y_j). \\ \text{s. t.} \quad & v^t x_j + v_o - u^t y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & u^t \geq 1_s \varepsilon \\ & v^t \geq 1_m \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

حال اگر $(u^*, v^*, v_o^*)^t$ جواب بهینه مدل فوق باشد؛ مقدار کارایی DMU_j به صورت $\varphi_j^* = \frac{v^* x_j + v_o^*}{u^* y_j}$ تعریف می‌شود و در صورتی که $\varphi_j^* = 1$ آنگاه DMU_j کاراست.

پس همانند روش نورا و همکاران (۲۰۱۰) برای تراکم مجموعه E به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$E = \{j: \varphi_j^* = 1\} \quad (5)$$

بیشترین مقدار ورودی برای هر مؤلفه در مجموعه E را با x_i^* نشان داده می‌شود.

$$x_i^* = \max_{j \in E} x_{ij} \quad (6)$$

با توجه به مدل (۴) و ملاحظات اخیر تعریف زیر برای تراکم ارائه شده است (حاجی‌حسینی و همکاران، ۲۰۱۵).

تعریف ۱- تراکم در DMU_o اتفاق می‌افتد اگر برای هر جواب بهینه DMU_o از مدل (۴) شرایط زیر صادق باشد:

$$i=1, \dots, m, \quad x_{io} > x_i^* \quad \text{و} \quad \varphi_o^* > 1$$

مقدار تراکم در i -امین ورودی DMU_o با s_i^c نشان داده می‌شود و

$$s_i^c = x_{io} - x_i^* \quad (7)$$

مجموع همه s_i^c ها مقدار تراکم DMU_o می‌باشد.

تراکم در DMU_o وجود ندارد در صورتی که $x_{io} \leq x_i^*$ یا $s_i^c = 0$ برای هر $i=1, \dots, m$

قضیه ۱- اگر DMU_o در روش حاجی‌حسینی و همکاران تراکم داشته باشد آنگاه با مقدار تراکم DMU_o در روش کوپر برابر است.

$$S_i^{-c*} = x_{io} - \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8)$$

از مقایسه دو معادله اخیر و $S_i^c = x_{io} - x_i^*$ نتیجه می‌گیریم که برای اثبات $S_i^c = S_i^{-c*}$ کفایت ثابت شود که رابطه (۹) برقرار است.

$$x_i^* = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (9)$$

برای اثبات رابطه (۹) به خلف گیریم که

$$x_i^* \neq \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

رابطه (۱۰) ایجاب می‌کند که یکی از حالت‌های زیر را داشته باشیم:

$$\begin{aligned} i) \quad & x_i^* > \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \\ ii) \quad & x_i^* < \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \end{aligned}$$

اینک ثابت خواهیم نمود که هیچ یک از روابط i) یا ii) نمی‌تواند اتفاق بیفتد. با توجه به $DMU_o^* \in T_v$ ، یک بردار $\bar{\lambda} \in [0,1]$ وجود دارد (نورا و همکاران، ۲۰۱۰) به طوری که

$$\varphi_o^* Y_o + S^{+*} = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j Y_j \quad \text{و} \quad X^* = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j X_j$$

است و متناظراً داریم که

$$x_i^* = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (a)$$

$$\varphi_o^* y_{ro} + s_r^{+*} = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j y_{rj}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (b)$$

علاوه بر این با توجه به مجموعه امکان تولید T_v قید زیر را نیز داریم

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j = 1, \quad (c')$$

سه قید (a) ، (b) و (c') تعدادی از قیود مدل تک مرحله‌ای کوپر و همکاران (۲۰۰۲) می‌باشد که به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_{io} - s_i^c &= x_i^* = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j y_{rj} &= \varphi_o^* y_{ro} + s_r^{+*}, \quad r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j &= 1, \\ x_{io} \geq x_i^* &\Rightarrow s_i^c \geq 0. \end{aligned}$$



در واقع $(\bar{\lambda}, s_i^c)$ یک جواب شدنی از مدل تک مرحله‌ای کوپر و همکاران (۲۰۰۲) است. بنابراین اگر شرط i در $Archive of SID$ باشد داریم:

$$\begin{aligned}
 x_i^* &> \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \xrightarrow{*(-1)} -x_i^* &< -\sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \xrightarrow{+x_{io}} x_{io} - x_i^* &< x_{io} - \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \Rightarrow s_i^c &< s_i^{-c*}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^m s_i^c &< \sum_{i=1}^m s_i^{-c*}
 \end{aligned}$$

چون $(\bar{\lambda}, s_i^c)$ یک جواب شدنی از مدل تک مرحله‌ای کوپر و همکاران (۲۰۰۲) در ارزیابی DMU_o است پس رابطه $\sum_{i=1}^m s_i^c < \sum_{i=1}^m s_i^{-c*}$ در تناقض است با فرض بهینگی (λ^*, s_i^{-c*}) بنابراین قید i نمی‌تواند درست باشد.

اینک رابطه ii را در نظر می‌گیریم $(x_i^* < \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij})$ تعریف می‌کنیم $\hat{x}_{io} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij}$ و $\hat{y}_{ro} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_{rj}$ پس $\overline{DMU} = (\hat{X}, \hat{Y})$ روی مرز کارایی قرار دارد لذا $\overline{DMU} \in E$ و با توجه به خواص مجموعه E داریم: $x_i^* \geq \hat{x}_{io} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij} \quad i = 1, \dots, m$ که متناقض رابطه ii است.

بنابراین هیچ یک از روابط i و ii برقرار نبوده و اثبات کامل می‌گردد. به عبارت دیگر ما داریم که

$$x_i^* = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_{ij} \quad i = 1, \dots, m \Rightarrow s_i^{-*} = s_i^c, \quad i = 1, \dots, m,$$

روش حاجی حسینی و همکاران (۲۰۱۵) شبیه روش نورا و همکاران (۲۰۱۰) می‌باشد با این برتری که این روش برای همه واحدها به جای n برنامه‌ریزی خطی یک برنامه‌ریزی خطی حل می‌کند. بنابراین محاسبات به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته، علاوه بر این دانش قابل فهم ساده‌تری از تراکم را فراهم می‌نماید.

۳- محاسبه تراکم بازه‌ای

n واحد تصمیم‌گیرنده با m ورودی و خروجی در نظر بگیرید که داده‌ها بازه‌ای و به صورت زیر باشد.

$$x_{ij} \in [x_{ij}^l, x_{ij}^u], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

$$y_{rj} \in [y_{rj}^l, y_{rj}^u], \quad r = 1, 2, \dots, S, \quad (12)$$

در اندازه‌گیری تراکم با داده‌های بازه‌ای، ابتدا باید بازه کارایی در هر DMU تعیین گردد. برای این کار جهت هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از دو مدل معرفی شده زیر توسط ونگ و همکاران (۲۰۰۵)، کارایی بدبینانه و خوشبینانه مشخص می‌شود.





$$\begin{aligned}
 x_i^* &= \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \text{s.t.} \quad v^t x_j^U + v_o - u^t y_j^L &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 u^t &\geq 1_s \varepsilon, \\
 v^t &\geq 1_m \varepsilon
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

حال اگر $(u^*, v^*, v_o^*)^t$ جواب بهینه مدل فوق باشد؛ مقدار کارایی بدینانه DMU_j به صورت $\varphi_j^{*U} = \frac{v^* x_j^U + v_o^*}{u^* y_j^L}$ تعریف می‌شود.

در مدل (۱۴) نیز که در زیر آمده است، بهترین حالت ارزیابی DMU ها در نظر گرفته شده است که کمترین ورودی و بیشترین خروجی را دارد.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{j=1}^n (v^t x_j^L + v_o - u^t y_j^U y_j) \\
 \text{s.t.} \quad & v^t x_j^L + v_o - u^t y_j^U \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & u^t \geq 1_s \varepsilon, \\
 & v^t \geq 1_m \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

حال اگر $(u^*, v^*, v_o^*)^t$ جواب بهینه مدل فوق باشد؛ مقدار کارایی خوشبینانه DMU_j به صورت $\varphi_j^{*L} = \frac{v^* x_j^L + v_o^*}{u^* y_j^U}$ تعریف می‌شود.

بعد از تعیین بازه کارایی، مشابه روش نورا و همکاران (۲۰۱۰) برای محاسبه تراکم، مجموعه \hat{E} را به صورت زیر تعریف می‌شود.

\hat{E} بزرگترین مجموعه تأثیرگذاری است که ممکن است داده‌های بالا را شامل شود. به عبارت دیگر DMU هایی که شامل

$$\hat{E} = \{DMU_j | \varphi_j^{*L} = 1\}, \tag{۱۵}$$

مجموعه \hat{E} هستند بهترین شرایط را دارند. اینک هدف تعیین تراکم بازه‌ای است به طوری که مقدار احتمالی مرتبط با هر ترکیب آن از مقادیر ورودی و خروجی بازه‌ای مربوط به DMU های هر بازه به دست آید. با توجه به این واقعیت که شرط لازم برای وجود تراکم ناکارایی است، پس در DMU هایی با جواب $\varphi^{*L} = \varphi^{*U} = 1$ تراکم وجود ندارد. به عبارت دیگر DMU در مجموعه مؤثر \hat{E} در بهترین حالت خود قرار دارند اما تراکم را نشان نمی‌دهند. با این حال ممکن است DMU هایی که در بدترین حالت خود قرار دارند نیز ناکارا باشند. بنابراین تراکم برای DMU هایی که در این حالت قرار دارند، وجود دارد. خوشبینانه‌ترین حالت ممکن در محاسبه تراکم وجود کمترین مؤلفه ورودی یک DMU در مقایسه با بیشترین مؤلفه ورودی از DMU هایی که در مجموعه \hat{E} قرار دارد. علاوه بر این x_i^{*U} را به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\forall i = 1, \dots, m \exists t_i \text{ s.t. } x_{t_i}^U = x_i^{*U} = \max \{x_{ij}^U | j \in \hat{E}\}, \tag{۱۶}$$

در خوشبینانه‌ترین حالت ممکن، بیشترین مؤلفه ورودی یک DMU با کمترین مؤلفه ورودی در هر یک از DMU های موجود در مجموعه \hat{E} مقایسه شده است (آنها در بهترین حالت کارایی هستند). x_i^{*L} نیز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$s. t. \quad x_i^L = x_i^{*L} = \min \{x_{ij}^L | j \in \hat{E}\}, \forall \quad i = 1, \dots, m \quad \exists k_i \quad (17)$$

حال پایین‌ترین حد تراکم در ورودی i از DMU_0 را که توسط S_{io}^{CL} مشخص می‌شود به صورت زیر است:

$$S_{io}^{CL} = x_{io}^L - x_i^{*U}, \quad i = 1, \dots, m \quad (18)$$

اگر $S_{io}^{CL} > 0$ باشد، مقدار تراکم نشان داده شده است در غیر این صورت تراکم در پایین‌ترین حالت صفر است.

علاوه بر این بالاترین حد تراکم DMU_0 در ورودی i با S_{io}^{CU} نشان داده می‌شود و در این صورت تعریف می‌شود.

$$S_{io}^{CU} = x_{io}^U - x_i^{*L}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (19)$$

اگر $S_{io}^{CU} > 0$ باشد، مقدار تراکم نشان داده شده است در غیر این صورت تراکم در بالاترین حد صفر است.

قضیه ۲- بازه $[S_o^{CL}, S_o^{CU}]$ نشان دهنده حد بالا و پایین تراکم برای DMU_0 هستند.

اثبات (برهان خلف): فرض کنید مقدار تراکم DMU_0 در ورودی i می‌باشد به طوری که $S_{io}^{-C} < S_{io}^{CL}$ بنابراین وجود دارد $\bar{DMU} \in \hat{E}$ ی کارایی که $\bar{DMU} \in \hat{E}$ و $S_{io}^{-C} = x_{io}^L - \bar{x}_i$ با توجه به فرض، روابط زیر را داریم:

$$S_{io}^{-C} < S_{io}^{CL} \Rightarrow x_{io}^L - \bar{x}_i < x_{io}^L - x_i^{*U} \Rightarrow \bar{x}_i > x_i^{*U},$$

از آنجا که $\bar{DMU} \in \hat{E}$ و این با تعریف x_i^{*U} در تناقض است.

به طوری مشابه برای حد بالا فرض می‌کنیم S_{io}^{+C} که نشان‌دهنده مقدار تراکم DMU_0 در ورودی i است به طوری که $S_{io}^{+C} > S_{io}^{CU}$ پس وجود دارد $\bar{DMU} \in \hat{E}$ کارایی که $\bar{DMU} \in \hat{E}$ و $S_{io}^{+C} = x_{io}^U - \bar{x}_i$ از معادله زیر می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_{io}^{+C} < S_{io}^{CU} \Rightarrow x_{io}^U - \bar{x}_i > x_{io}^U - x_i^{*L} \Rightarrow x_i^{*L} > \bar{x}_i,$$

از آنجایی که $\bar{DMU} \in \hat{E}$ و این با تعریف x_i^{*L} در تناقض است. بنابراین نشان داده شد که بازه $[S_o^{CL}, S_o^{CU}]$ حد بالا و پایین برای تراکم DMU_0 است.

۴- مثال عددی

مثال ۱- جدول زیر را با داده‌های بازه ای در نظر بگیرید (۶ واحد تصمیم گیرنده با یک ورودی و یک خروجی).

جدول ۱- داده‌های بازه‌ای.

DMU	ورودی x	خروجی y
A	[2,3]	[1,3]
B	[4,6]	[5,6]
C	[8,9]	[6,8]
D	[7,10]	[2,3]
E	[12,13]	[5,7]
F	[14,15]	[3,4]



$$\hat{E} = \{A, B, C, E\},$$

توسط روابط (۱۶) و (۱۷) دو مقدار $x^*U = 13$ و $x^*L = 2$ به دست می‌آید.

سرانجام با استفاده از رابطه (۱۸) و (۱۹) پایین‌ترین مقدار تراکم ممکن (S^{CL}) و بالاترین مقدار تراکم ممکن (S^{CU}) محاسبه شده است که نتایج در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲- تراکم بازه‌ای مثال ۱.

DMU	A	B	C	D	E	F
Interval Congestion	[0,1]	[0,4]	[0,7]	[0,8]	[0,11]	[1,13]

۵- نتیجه‌گیری

تراکم با داده‌های بازه‌ای کمتر مورد توجه قرار گرفته است که در این مقاله، با استفاده از مدل‌های تشخیص تراکم بر اساس مقایسه ورودی‌ها با وزن‌های مشترک و برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای برای واحدهای دارای تراکم، تراکم بازه‌ای معرفی گردید. از برتری‌های روش این است که برای همه واحدها جهت کارایی کران پایین و بالا به جای n برنامه‌ریزی خطی یک برنامه‌ریزی خطی حل می‌کند. بنابراین محاسبات به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته، علاوه بر این دانش قابل فهم ساده‌تری از تراکم بازه‌ای را مطرح نموده است.

منابع

- Banker, R. D., Chang, H. & Cooper, W. W. (1996). Equivalence and implementation of alternative methods for determining returns to scale in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 89(3), 473-481.
- Brockett, P. L., Cooper, W. W., Wang, Y. & Shin H-C. (1996). Inefficiency and congestion in Chinese production before and after the 1978 economic reforms. *Socio-Economic planning sciences*, 32(1), 1-20.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M. & Zhu J. (2000). A unified additive model approach for evaluating inefficiency and congestion with associated measures in DEA. *Socio-Economic planning sciences*, 34(1), 1-25.
- Cooper, W. W., Deng, H., Huang, Z. M. & Li, S. X. (2002). A one-model approach to congestion in data envelopment analysis. *Socio-Economic planning sciences*, 36(4), 231-238.
- Färe, R. & Grosskopf, S. (1983). Measuring congestion in production. *Journal of economics*, 43(3), 257-271.
- Färe, R., Grosskopf, S. & Lovell, C. K. (1985). *The measurement of efficiency of production*. Springer Science & Business Media.
- Färe, R. & Svensson, L. (1980). Congestion of production factors. *Journal of the econometric society*, 1745-1753.
- Hajhosseini, A., Noura, A. & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2015). A New Approach to Measuring Congestion in DEA with Common Weights. *Indian journal of science and technology*, 8(6), 574-580.
- Noura, A., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo G. R., Rashidi, S. F. & Parker, B. R. (2010). A new method for measuring congestion in data envelopment analysis. *Socio-Economic planning sciences*, 44(4), 240-246.
- Payan, A., Noura, A. & Nozohour, M. (2012). Improvement of Ranking Method Based on Effectiveness Of Units In Society By Common Weights Approach In DEA. *WSEAS transactions on mathematics*, 11(9), 742-750.
- Wang, Y. M., Greatbanks, R. & Yang, J. B. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy sets and systems*, 153(3), 347-370.

