Journal of Decisions and Operational Research

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره ۴، شماره (۴)، زمستان ۱۳۹۸

آشنایی با مجموعه‌ی فازی مردد و انواع آن

فاطمه باباکردی[*]

گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران.

چکیده

درمسائل زندگی روزمره و تصمیم‌گیری در علوم مختلف بایستی با تعیین مدل ریاضی مسئله و بکارگیری ابزارهای ریاضی به حل آن ها بپردازیم. اما برای بیان داده‌های نسبی و مبهم تا کنون ابزارهای مختلفی نظیر مجموعه‌های بازه مقدار و مجموعه‌های فازی، مجموعه‌های فازی شهودی و انواع مختلف آن‌ها بیان شده است. تورا در سال ۲۰۰۹ با معرفی مجموعه‌های فازی مردد افق جدیدی برای بحث روی مسائلی که با شک و تردید در تصمیم‌گیری مواجه هستند، گشود. در ادامه ی کار تورا به گسترش کمی و کیفی مجموعه‌های فازی مردد و اعمال روی آن‌ها و کاربرد این مجموعه‌ها در مسائل تصمیم‌گیری پرداخته شد. در این مقاله با توجه به کاربردی بودن این مجموعه‌ها جهت آشنایی هر چه بیشتر پژوهشگران به مروری برانواع مجموعه‌های فازی مردد نظیر مجموعه‌های فازی مردد دوآل، مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته و... می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌های فازی مردد، مجموعه‌های فازی مردد کمی، مجموعه‌های فازی مردد کیفی.

دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۲٦ اصلاح: ۱۳۹۸/۱۱/۰۳ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۰۷

۱- مقدمه

پدیده‌های طبیعی همواره دارای ابهام و عدم قطعیت می‌باشند که بایستی در مدل‌بندی ریاضی در نظر گرفته شوند، به همین منظور برای بیان متغیرهای مبهم، زاده (۱۹٦۵) به معرفی مجموعه‌ها ی فازی پرداخت و در ادامه در سال ۱۹۸۰ مجموعه‌های فازی نوع ۲ و در سال ۱۹۸٦ مجموعه‌های فازی شهودی مطرح شد (آتاناسوی، ۱۹۸٦؛ دابیس و همکاران، ۱۹۸۰). اخیرا پژوهشگران برای بررسی مسائلی که با تردید و شک همراه می‌باشند، مجموعه‌های فازی مردد را مطرح کردند و پژوهش‌های زیادی در این زمینه در حال انجام است.

تورا درسال ۲۰۱۲، به معرفی مجموعه‌های فازی مردد پرداخت. در مفهوم مجموعه‌های فازی مردد دوآل مطرح شد(ژو و همکاران، ۲۰۱۲). در سال ۲۰۱۳ روابط مجموعه‌های فازی مردد بازه مقدار وکاربرد آن درمسائل تصمیم‌گیری بیان گردید (چن و همکاران، ۲۰۱۳). مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته و کاربردهای آنها توسط کیا و همکاران (۲۰۱۳) بحث گردید.

[*] عهده‌دار مکاتبات: babakordif@yahoo.com

شناسه دیجیتال: 10.22105/dmor.2020.215478.1136

مجموعه‌های فازی مردد مثلثی و کاربردهای متنوع آنها معرفی شد (کیا و همکاران، ۲۰۱۳؛وی و همکاران، ۲۰۱٤). در ژو و همکاران (۲۰۱۵) به بررسی مجموعه های فازی مردد گسترش یافته پرداخته شد.

در سال ۲۰۱٤ یک مدل مجموعه‌ی نرم جدید به نام مجموعه‌ی مردد نرم بررسی شد (ونگ و همکاران، ۲۰۱٤). در رودریگز و همکاران (۲۰۱٤) اختلاف و تمایز مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های فازی مردد مرور شد. لیو و همکاران به معرفی مقیاس فاصله و تشابه برای مجموعه‌های فازی زبانی مردد پرداختند و کاربرد این مقیاس‌ها در مسائل تصمیم-گیری چند معیاره در سال ۲۰۱۵ مطرح گردید (لیا و همکاران، ۲۰۱٤؛ لی و همکاران، ۲۰۱۵). وی و همکاران (۲۰۱٦) مجموعه‌های زبانی فازی مردد و حساب روی آن را تحقیق کردند. ونگ و همکاران (۲۰۱٤) مفهوم مجموعه‌های زبانی مردد فازی را به مجموعه‌های زبانی مردد فازی بازه مقدار گسترش داده و کاربرد آن‌را در مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره بررسی کردند. مجموعه‌های فازی مردد به مجموعه‌های زبانی فازی مردد دوآل توسعه داده شد و عملگرها روی آن وکاربرد آن در تصمیم‌گیری بحث شد (یانگ، ۲۰۱٤). دهمیری و همکاران (۲۰۰۲) روی گسترش مجموعه های مردد روی مشبک‌ها و دو مفهوم پایه‌ای آن مطالعه کردند.

اخیرا عناصر و مجموعه‌های زبانی سه‌تایی مثلثی و عملگرها روی آن‌ها مطرح شد (فهمی،۲۰۱۸). در سال ۲۰۱۸ساختاری جدید تحت عنوان مجموعه‌های فازی مردد دوقطبی مقدار به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های فازی بحث شد. در ادامه الکندود و همکاران (۲۰۱۹) با مروری بر عدد فازی مردد به توسعه‌ی آنها پرداخته و مجموعه‌های فازی مردد توسعه‌ی یافته‌ی دوآل را مطرح کردند. سپس عمگرهای تجمعی برای مجموعه‌های فازی زبانی مردد بیان گردید (رانگ و همکاران، ۲۰۲۰).

اما از آنجایی که مجموعه‌های مردد به سرعت در حال گسترش می‌باشند، در این مقاله مروری بر انواع مجموعه‌های فازی مردد خواهیم داشت، باشد که شرایط آشنایی و علاقه‌مندی هر چه بیشتر محققان و پژوهشگران را فراهم آورد.

۲- انواع مجموعه‌های مردد فازی

در این قسمت به آشنایی با مجموعه‌های مردد فازی می‌پردازیم.

۲-۱- مجموعه‌های فازی مردد

تعریف ۲-۱- فرض کنید X یک مجموعه‌ی ثابت باشد (زو . همکاران، ۲۰۱۲)، مجموعه‌ی فازی مردد (HFS) روی X تابعی است که اگرروی X بکاربرده شود یک زیرمجموعه از $[0,1]$ را نتیجه دهد. خیا و خو (۲۰۱۱)، نماد ریاضی $\boldsymbol{HFS}$ را به صورت زیر بیان کردند:

$$A = \{< x, h_A(x) > | x \in X\}$$

که $h_A(x)$ مجموعه‌ای از مقادیر متعلق به $[0,1]$ است که درجه عضویت‌های ممکن عنصر $x \in X$ نسبت به مجموعه‌ی A را نمایش می‌دهد. برای راحتی، $h_A(x)$ عنصرفازی مردد نامیده می‌شود (HFE).

مثال ۲-۱- فرض کنید $X = \{1,2\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد،$A = \{< 1, \{0.2,0.4,0.6\} >, < 2, \{0.4,0.8,1.0\} >\}$ یک مجموعه‌ی فازی مردد، با دو عنصرفازی مردد است. (در مجموعه‌های فازی هرعضو با یک درجه عضویت متعلق به $[0,1]$ مشخص می‌شود، در مجموعه‌های فازی مردد چون در تعیین درجه‌ی عضویت هرعنصر شک و تردید وجود دارد، درجه عضویت هرعنصر با مجموعه‌ای از مقادیر متعلق به $[0,1]$ بیان می‌گردد).

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤ ، شماره (٤)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳٥۳-۳٦۱

۲-۲- مجموعه‌های فازی مردد دوگان

تعریف ۲-۲- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (چن و همکاران، ۲۰۱۳)، مجموعه‌ی فازی مردد دوگان *(DHFS)* روی X بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \{< x, h(x), g(x) > | x \in X\},$$

که $h(x)$ و $g(x)$ دو مجموعه از مقادیر در بازه‌ی $[0,1]$ می‌باشند که به ترتیب درجه‌ی عضویت و درجه عدم عضویت عنصر $x \in X$ به مجموعه‌ی D را با شرایط زیر نشان می‌دهد:

$$0 \le \gamma, \delta \le 1, \;\; 0 \le \gamma^+ + \delta^+ \le 1,$$

که درآن بازای هر $x \epsilon X$، $\gamma \epsilon h(x)$،$\delta \epsilon g(x)$ و $\gamma^+ = max_{\gamma \epsilon h(x)}\{\gamma\}$، $\delta^+ = max_{\delta \epsilon g(x)}\{\delta\}$ و زوج $d(x) = \big(h(x), g(x)\big)$ عنصرفازی مردد دوگان نامیده می‌شود.

مثال۲-۲- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ یک مجموعه‌ی مرجع باشد، مجموعه‌ی فازی مردد دوگان D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \{< x_1, \{0.4,0.5\}, \{0.3\} >, < x_2, \{0.2,0.4\}, \{0.3,0.5\} >\},$$

۲-۳- مجموعه‌های فازی مردد بازه مقدار

تعریف ۲-۳- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد و $I([0,1])$ مجموعه‌ای از همه‌ی زیربازه‌های بسته‌ی $[0,1]$ باشد. مجموعه‌ی فازی مردد بازه‌مقدار *(IVHFS)* روی X به صورت زیر است (کیا و همکاران، ۲۰۱۳):

$$\tilde{A} = \{< x_i, \tilde{h}_A(x_i) > | x_i \in X, i = 1, \dots, n\},$$

که $\tilde{h}_A(x_i): X \to \varphi(I([0,1]))$ همه‌ی درجه عضویت‌های بازه‌مقدار عنصر $x_i \in X$ نسبت به مجموعه‌ی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد.

مثال ۲-۳- فرض کنید مجموعه‌ی $X = \{x_1, x_2\}$ مرجع باشد، یک *IVHFS*، $\tilde{A}$، می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A} = \{< x_1, [0.2,03], [0.4,0.5] >, < x_2, [0.1,0.4], [0.5,0.6], [0.8,0.9] >\},$$

هرگاه کران بالا و پایین همه‌ی بازه‌ها باهم برابر باشند، مجموعه‌ی فازی مردد بازه‌مقدار به مجموعه‌ی فازی مردد تبدیل می‌شود.

۲-۴- مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته

تعریف۲-٤- یک مجموعه از n تابع عضویت داده شده است (وی و همکاران، ۲۰۱٤):

$$M = \{\alpha_i = (\mu_i, \vartheta_i) |, 0 \le \mu_i, \vartheta_i \le 1, 0 \le \mu_i + \vartheta_i \le 1, i = \{1,2, \dots, n\}\},$$

h_M، مجموعه‌ی فازی مردد تعمیم یافته *(GHFS)* مرتبط با M است که به صورت زیر تعریف شده است:

$$h_M(x) = \cup_{(\mu_i(x), \vartheta_i(x)) \epsilon M} \big(\mu_i(x), \vartheta_i(x)\big),$$

مجموعه‌های فازی مردد و مجموعه‌های فازی حالت خاصی از مجموعه‌های فازی مردد تعمیم یافته می‌باشند. درواقع هرگاه برای هر $i = 1,2, \dots, n$ داشته باشیم $\mu_i + \vartheta_i = 1$ آنگاه *GHFS* به *HFS* تبدیل می‌شود و آنگاه به مجموعه‌ی فازی تبدیل می‌شود.

مثال ۲-٤- فرض کنید $X=\{x_1\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، آنگاه

$$h_M(x_1)=\{(0.5,0.3),(0.6,0.3),(0.4,0.5)\},$$

GHFS می‌باشد (دقت کنید که در این مثال *GHFS* یک *HFS* نیست).

۲-۵- مجموعه‌های فازی مثلثی مردد

تعریف ۲-۵- فرض کنید X یک مجموعه‌ی ثابت باشد، مجموعه‌ی فازی مثلثی مردد $\tilde{E}$ *(HTFS)* روی X به صورت یک تابع $\tilde{f}_{\tilde{E}}(x)$ تعریف می‌شود که می‌تواند چندین مقدار فازی مثلثی را نتیجه دهد (یو، ۲۰۱۳؛ زاو و همکاران، ۲۰۱٤؛ زو و ژو، ۲۰۱٦)،

$$\tilde{E}=\{<x,\tilde{f}_{\tilde{E}}(x)>|x\in X\},$$

که $\tilde{f}_{\tilde{E}}(x)$ یک مجموعه از چندین عدد فازی مثلثی است که درجه‌های عضویت ممکن عنصر $x\in X$ به مجموعه‌ی $\tilde{E}$ را بیان می‌کند. عنصرفازی مثلثی مردد نامیده می‌شود و به صورت $\tilde{f}_{\tilde{E}}(x_i)=\{(\xi^L,\xi^M,\xi^U),\tilde{\xi}\epsilon\tilde{f}_{\tilde{E}}(x_i)\}$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۵-۲- فرض کنید $X=\{x_1,x_2\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، $\tilde{E}$ *HTFS*، بصورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{E}=\{<x_1,\{(0.1,0.3,0.5),(0.4,0.6,0.8)\}>,<x_2,\{(0.1,0.2,0.3)\}>\},$$

اگر آنگاه *HTFS* به *HFS* تبدیل می‌شود.

۲-۶- مجموعه‌های فازی مردد گسترش یافته

تعریف ۲-٦- فرض کنید X یک مجموعه‌ی ثابت و $h_D(x)=\cup_{\gamma_D\epsilon h_D(x)}\{\gamma_D\}$ $(D=\{1,\dots,m\})$ یک *HFS* روی X باشند. آنگاه مجموعه‌ی فازی مردد گسترش یافته *(EHFS)* یعنی $H_{h_D(x)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود (ونگ و همکاران، ۲۰۱٤):

$$H_{h_D(x)}=h_1(x)\times\dots\times h_m(x)=\cup_{\gamma_1\epsilon h_1(x),\dots,\gamma_m\epsilon h_m(x)}\{<x,\gamma_1(x),\dots,\gamma_m(x)>|x\in X\},$$

مثال ۲-٦- دو نماینده ارزیابی‌های خود را از عوامل x و y ارائه می‌دهند.

الف) نماینده ۱ مجموعه عضویت $\{0.3\}$ و نماینده ۲ مجموعه عضویت $\{0.3,0.4\}$ را برای x ثبت می‌کنند که با *EHFE* درجه‌ی ۲ $H(x)=\{(0.3,0.3),(0.3,0.4)\}=\{0.3\}\times\{0.3,0.4\}$ متناظر می‌شود.

ب) نماینده ۱ مجموعه‌ی عضویت $\{0.5,0.6\}$ و نماینده ۲مجموعه عضویت $\{0.8\}$ را برای y ثبت می‌کند که با *EHFE* درجه‌ی ۲ $H(y)=\{(0.5,0.8),(0.6,0.8)\}=\{0.5,0.6\},\{0.8\}$ *متناظر می‌شود.* چنین اطلاعاتی، *EHFE* درجه‌ی ۲روی

$$H_2^X=\{<x,\{(0.3,0.3),(0.3,0.4)\}>,<y,\{(0.5,0.8),(0.6,0.8)\}>\},$$

$X=\{x,y\}$ به صورت زیر فراهم می‌کند:

۲-۷- مجموعه‌های نرم فازی مردد

تعریف ۲-۷- فرض کنید $\widetilde{H}(U)$ مجموعه‌ای از تمام مجموعه‌های فازی مردد در U باشد: زوج $(\tilde{F},A)$ مجموعه‌ی نرم فازی مردد روی U نامیده می‌شود هرگاه $\tilde{F}$ یک نگاشت به صورت زیر باشد (رودریگز و همکاران، ۲۰۱٤):

$$\tilde{F}:A\to\widetilde{H}(U)$$

یک مجموعه‌ی نرم فازی مردد یک نگاشت از پارامترها به $\tilde{H}(U)$ است. بعبارت دیگر، یک خانواده‌ی پارامتری شده از زیرمجموعه‌های فازی مردد U است. برای $e\epsilon A$،$\tilde{F}(e)$ ممکن است به صورت مجموعه عناصر e–تقریب از مجموعه‌ی نرم فازی مردد $(\tilde{F},A)$ باشد.

مثال ۲–۷– فرض کنید که $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ مجموعه‌ی خانه‌ها و $A=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ مجموعه‌ی پارامترهایی است که به ترتیب بر "ارزانی"، "زیبایی"، "اندازه"، "موقعیت" و "محیط اطراف" دلالت می‌کنند. آقای خی، شش خانه دلخواه را تحت شرایط مختلف با عناصرفازی مردد ارزیابی می‌کند. بنابراین، مجموعه نرم فازی مردد $(\tilde{F},A)$ می‌تواند ویژگی‌های خانه‌ها را تحت شرایط اطلاعات فازی توصیف نماید. روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{F}(e_1)=\left\{\frac{h_1}{\{0.2,0.3\}},\frac{h_2}{\{0.5,0.6\}},\frac{h_3}{\{0.3\}},\frac{h_4}{\{0.3,0.5\}},\frac{h_5}{\{0.4,0.5\}},\frac{h_6}{\{0.6,0.7\}}\right\},$$
$$\tilde{F}(e_2)=\left\{\frac{h_1}{\{0.4,0.6,0.7\}},\frac{h_2}{\{0.5,0.7,0.8\}},\frac{h_3}{\{0.6,0.8\}},\frac{h_4}{\{0.7,0.9\}},\frac{h_5}{\{0.3,0.4,0.5\}},\frac{h_6}{\{0.3\}}\right\},$$
$$\tilde{F}(e_3)=\left\{\frac{h_1}{\{0.2,0.4\}},\frac{h_2}{\{0.6,0.7\}},\frac{h_3}{\{0.8,0.9\}},\frac{h_4}{\{0.3,0.5\}},\frac{h_5}{\{0.4,0.6\}},\frac{h_6}{\{0.7\}}\right\},$$
$$\tilde{F}(e_4)=\left\{\frac{h_1}{\{0.3,0.5,0.6\}},\frac{h_2}{\{0.2\}},\frac{h_3}{\{0.5\}},\frac{h_4}{\{0.6,0.7\}},\frac{h_5}{\{0.5,0.6\}},\frac{h_6}{\{0.8\}}\right\},$$
$$\tilde{F}(e_5)=\left\{\frac{h_1}{\{0.6\}},\frac{h_2}{\{0.2,0.3,0.5\}},\frac{h_3}{\{0.5,0.7\}},\frac{h_4}{\{0.2,0.4\}},\frac{h_5}{\{0.5,0.7\}},\frac{h_6}{\{0.3,0.5\}}\right\}.$$

۲-۸- مجموعه‌های زبانی فازی مردد

تعریف ۲–۸– فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (ونگ و همکاران، ۲۰۱٤)، مجموعه‌ی زبانی فازی مردد *(HFLS)*

$$A=\{< x,s_\theta,h_A(x) >| x\epsilon X >\},$$

روی X تابعی است که یک زیر مجموعه از مقادیر [0,1] را نتیجه می‌دهد. این مجموعه با نماد ریاضی به صورت زیر بیان می شود:

که $h_A(x)$ مجموعه‌ای از مقادیر در [0,1] می‌باشد که درجه عضویت‌های ممکن عنصر $x\epsilon X$ برای عبارت زبانی $s_\theta(x)$ را نمایش می‌دهد.

مثال ۲–۸– فرض کنید $X=\left\{x_{\frac{9}{5}1},x_2\right\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و

$S=\{s_0$: هیچی; s_1 : خیلی کم ; s_2 : کم; s_3 : متوسط; s_4 : زیاد; s_5 : خیلی زیاد; s_6 : کامل$\}$ یک مجموعه عبارت زبانی باشد، یک *DHFLS* می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$A=\{< x_1,s_1,\{0.3,0.4,0.5\}\} >,< x_2,s_3,\{0.3,0.5\} >\}.$$

۲-۹- مجموعه‌های زبانی فازی مردد بازه‌مقدار

تعریف ۲–۹– فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (یانگ و ژو، ۲۰۱٤)، مجموعه‌ی زبانی فازی بازه‌مقدار*(IVHFLS)* روی X به صورت زیر است:

$$B=(< x,s_\theta(x),\Gamma_B(x) >|x\epsilon X)$$

که $\Gamma_B(x)$ مجموعه‌ای با تعداد متناهی از بازه‌های بسته‌ی متعلق به [0,1] است که درجه‌های عضویت بازه مقدار ممکن را نشان می‌دهد و x متعلق به $s_\theta(x)$ می‌باشد.

مثال ۲-۹- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ مجموعه‌ی مرجع و $S = \{s_0$: هیچی ; s_1 : خیلی کم ; s_2 : کم; s_3 : متوسط ; s_4 : زیاد ; s_5 : خیلی زیاد ; s_6 : کامل$\}$ مجموعه عبارات زبانی باشد، یک *IVHFLS* ممکن است به صورت زیر باشد:

$$B = \{< x_1, s_5, \{[0.4,0.5], [0.6,0.7], [0.8,0.9]\} >, < x_2, s_6, \{[0.1,0.3], [0.5,0.6]\} >\}.$$

۲-۱۰- مجموعه‌های زبانی فازی مردد دوگان

تعریف ۲-۱۰- فرض کنید X مجموعه‌ی مرجع باشد (نویین و همکاران، ۲۰۰۲)، مجموعه‌ی زبانی فازی مردد دوگان *(DHFLS)* روی X به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$C = \{< x_1, s_\theta, h(x), g(x) >| x\epsilon X >\}.$$

که $s_\theta(x)\epsilon S$ می‌باشد، $h(x)$ و $g(x)$ دو مجموعه از تعدادی مقادیر در [0,1] است که درجه‌های ممکن عدم عضویت و عضویت عنصر $x\epsilon X$ به عبارت زبانی $s_\theta(x)$ را تحت شرایط زیر نشان می‌دهد:

$$0 \leq \gamma, \delta \leq 1, 0 \leq \gamma^+, \delta^+ \leq 1,$$

که بازای هر $x\epsilon X$ ، $\gamma\epsilon h(x)$، $\gamma^+ = max_{\gamma\epsilon h(x)}\{\gamma\}$ و $\delta^+ = max_{\delta\epsilon g(x)}$.

مثال ۲-۱۰- فرض کنید $X = \{x_1, x_2\}$ مجموعه‌ی مرجع و $S = \{s_0$: هیچی ; s_1 : خیلی کم ; s_2 : کم; s_3 : متوسط ; s_4 : زیاد ; s_5 : خیلی زیاد ; s_6 : کامل$\}$ مجموعه عبارات زبانی باشد، یک *DHFLS* می تواند به صورت زیر باشد:

$$C = \{< x_1, s_3, \{0.4,0.5\}, \{0.3,0.4\}\} >, < x_2, s_4, \{0.3,0.5\}, \{0.2,0.3\} >\}.$$

۲-۱۱- مجموعه‌های $\mathcal{L}$- فازی مردد

تعریف ۲-۱۱- فرض کنید X مجموعه‌ای مرجع باشد (دهمیری و همکاران، ۲۰۱۷). یک شبکه، مجموعه‌ای تا حدی مرتب $\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}}$ است که در آن هر جفت عنصر $\mathcal{L}$، یک سوپریمم (sup) و یک اینفیمم (inf) در $\mathcal{L}$ داشته باشد. اگر هر زیرمجموعه از $\mathcal{L}$ هم sup و inf در $\mathcal{L}$ داشته باشد، یک شبکه کامل نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۱۲- فرض کنید X مجموعه‌ای مرجع باشد (امین و همکاران، ۲۰۱۸) و $(\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ یک شبکه‌ی دلخواه باشد آنگاه مجموعه‌ی $\mathcal{L}$-فازی مردد از X یک نگاشت به صورت زیر است:

$$H: X \to 2^{\mathcal{L}}$$
$$x \to H(x)$$

مقدار $H(x)$ درجه عضویت x به H را نشان می‌دهد و عنصر $\mathcal{L}$-فازی مردد *(HFEL)* نامیده می‌شود. برای یک مجموعه‌ی جهانی ثابت، کلاس همه‌ی مجموعه‌های $\mathcal{L}$-فازی مردد با *HFS $\mathcal{L}$ (X)* نمایش داده می‌شود.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤، شماره (٤)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۶۱-۳۵۳

مثال ۲-۱۱- فرض کنید $X=\{1,2,3,4\}$ مجموعه جهانی و $(\mathcal{L},\leq_{\mathcal{L}})=(2^{Y},\subseteq)$ باشد. H یک $HFS\ \mathcal{L}$ می‌باشد:

$$H=\left\{\frac{\{\emptyset\}}{1}+\frac{\{\{a\},\{a,b\}\}}{2}+\frac{\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}}{3}+\frac{\{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b\}\}}{4}\right\}$$

۲-۱۲- مجموعه‌های فازی مردد زبانی مکعبی مثلثی

تعریف ۲-۱۳- فرض کنید $\tilde{b}$ عددفازی مردد زبانی مکعبی مثلثی روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد (آلاه و همکاران، ۲۰۱۸)، مجموعه‌ی فازی مردد زبانی مثلثی بازه‌مقدار بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_{\tilde{b}}=\begin{cases} s_{\theta(b)},\left\{\dfrac{(h-p^{-})}{(q^{-}-p^{-})},\dfrac{(h-p^{+})}{(q^{+}-p^{+})}p^{-}\leq h\leq q^{-},p^{+}\leq h<q^{+}\right\}\\ s_{\theta(b)},\left\{\dfrac{(r^{-}-h)}{(r^{-}-q^{-})},\dfrac{(r^{+}-h)}{(r^{+}-q^{+})}q^{-}\leq h\leq r^{-},q^{+}\leq h<r^{+}\right\}\\ 0 \qquad \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

و مجموعه‌ی فازی مردد زبانی مثلثی آن به صورت زیر است:

$$\Gamma_{\tilde{b}}(h)=\begin{cases} s_{\theta(b)},\left\{\dfrac{(q-h)}{(q-p)},\ q\leq h<p\right\}\\ s_{\theta(b)},\left\{\dfrac{(r-h)}{(r-q)},\ q<h\leq r\right\}\\ 0 \qquad \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

که $0\leq\lambda_{\tilde{b}}\leq 1$ ،$0\leq\Gamma_{\tilde{b}}(h)\leq 1$. آنگاه $b=\{<s_{\theta(b)},<[(p^{-},q^{-},r^{-})],[(p^{+},q^{+},r^{+})],p,q,r>>\}$ عددفازی مردد زبانی مکعبی مثلثی است.

مثال ۲-۱۲- حالت‌های دیگری را با استفاده از مجموعه‌ی عبارات زبانی $S=\{s_0:$ زیاد، $s_1:$ خیلی زیاد، $s_2:$ بد، $s_3:$ معمولی$\}$، در نظربگیرید. $b=\{<s_2,<[0.2,0.4,0.6)],[(0.4,0.6,0.8)],0.3,0.5,0.7>>\}$ و $b=\{<s_3,<[(0.12,0.14,0.16)],[(0.14,0.16,0.18)],0.13,0.15,0.17>>\}$ دو عدد فازی مردد زبانی مکعبی مثلثی هستند.

۲-۱۳- مجموعه‌های فازی مردد دوقطبی‌مقدار

تعریف ۲-۱۴- برای هرمجموعه‌ی X، مجموعه‌ی فازی مردد دوقطبی‌مقدار($BPVHFS$) روی بعضی از مقادیردامنه‌ی X به صورت زیر نمایش داده می‌شود (آلکانتد و همکاران، ۲۰۱۹):

$$B=\{(m,(F^{+}(m),F^{-}(m))):x\epsilon X\}$$

که $F^{+}:X\to[0,1]$ و $F^{-}:X\to[-1,0]$ HFS هایی هستند که درجه عضویت و عدم‌عضویت عنصر "m" به $BPVHFS$ را نشان می‌دهد.

مثال ۲-۱۳- فرض کنید $X=\{m_1,m_2\}$ مجموعه‌ی جهانی باشد، آنگاه $A=\{<m_1,\{0.1,0.2\},\{-0.3,-0.2\}>,<m_2,\{0.4,0.5\},\{-0.6,-0.5\}>\}$ یک $BPVHFS$ می‌باشد.

۲-۱۴- مجموعه‌های فازی مردد گسترش یافته‌ی دوگان

تعریف ۲-۱۵- عنصرفازی مردد گسترش‌یافته‌ی دوگان *(DEHFE)* از درجه m، عنصر $D=(d_1,\dots,d_m)$ می‌باشد بطوریکه برای $i=1,\dots,m$ ، d_i، *DHFE* می‌باشد (رنگ و همکاران، ۲۰۲۰). یک مجموعه‌ی فازی مردد گسترش‌یافته‌ی دوگان *(DEHFS)* از درجه m روی x بصورت زیر است:

$$D_m^X=\{<x,d_1(x),\dots,d_m(x)>:x\epsilon X\},$$

بطوریکه برای هر $x\epsilon X$ ، $D(x)=(d_1(x),\dots,d_m(x))$ یک *DEHFE* از درجه m می‌باشد.

مثال ۲-۱٤- دو نماینده، انتخابهای xو y را به ترتیب با *DHFEs* زیر ارزیابی می‌کنند:

الف) نماینده ۱، ارزیابی بصورت $d_1(x)=(\{0.1,0.3,0.4\},\{0.3,0.5\})$ و $d_1(y)=(\{0.2,0.3\},\{0.4,0.5,0.6\})$ را فراهم می کند.

ب) نماینده ۲، ارزیابی بصورت $d_2(x)=(\{0.2,0.5\},\{0.1,0.2,0.4\})$ و. $d_2(y)=(\{0.3,0.4,0.5\},\{0.1,0.2\})$ را فراهم می کند.

این اطلاعات بطور یکجا به صورت *DEHFS* از درجه ۲ روی $X=\{x,y\}$ به فرم زیرتعریف می‌شود:

$$D\_2^\wedge X=\{<x,(\{0.1,0.3,0.4\},\{0.3,0.5\},\{0.2,0.5\},\{0.1,0.2,0.4\})>,$$
$$<y,(\{0.2,0.3\},\{0.4,0.5,0.6\},\{0.3,0.4,0.5\},\{0.1,0.2\})>\}.$$

۳- نتیجه‌گیری

از آنجائیکه نظریه‌ی مجموعه‌های مردد پدیده‌ای جوان و نوظهور می‌باشد، دراین مقاله جهت آشنایی هرچه بیشتر پژوهشگران با مجموعه‌های مردد به مروری بر مجموعه‌های فازی مردد نظیر مجموعه‌های فازی مردد دوآل، مجموعه‌های فازی مردد بازه‌مقدار، مجموعه‌های فازی مردد بازه‌مقدار، مجموعه‌های فازی مردد تعمیم‌یافته، مجموعه‌های فازی مثلثی مردد، مجموعه‌های فازی مردد گسترش‌یافته، مجموعه‌های نرم فازی مردد، مجموعه‌های زبانی فازی مردد، مجموعه‌های زبانی فازی مردد بازه‌مقدار، مجموعه‌های زبانی فازی مردد دوآل، مجموعه‌های $\mathcal{L}$ - فازی مردد، مجموعه‌های فازی مردد سه‌تایی مثلثی، مجموعه‌های فازی مردد دوقطبی مقدار، مجموعه‌های فازی مردد گسترش‌یافته‌ی دوآل پرداختیم. در پژوهش بعدی به حل دستگاه فازی مردد برای این مجموعه‌های مرددخواهیم پرداخت.

منابع

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, *8*(3), 338-353.
Atanassov, K. T. (1999). *Intuitionistic fuzzy sets. In Intuitionistic fuzzy sets* (pp. 1-137). Physica, Heidelberg. Dubois, D. J. (1980). *Fuzzy sets and systems: theory and applications* (Vol. 144). Academic press.
Torra, V. (2010). Hesitant fuzzy sets. *International journal of intelligent systems*, *25*(6), 529-539.
Zhu, B., Xu, Z., & Xia, M. (2012). Dual hesitant fuzzy sets. *Journal of applied mathematics*. DOI:10.1155/2012/879629.
Chen, N., Xu, Z., & Xia, M. (2013). Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making. *Knowledge-based systems*, *37*, 528-540.
Qian, G., Wang, H., & Feng, X. (2013). Generalized hesitant fuzzy sets and their application in decision support system. *Knowledge-based systems*, *37*, 357-365.
Wei, G., Wang, H., Zhao, X., & Lin, R. (2014). Hesitant triangular fuzzy information aggregation in multiple attribute decision making. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, *26*(3), 1201-1209.
Yu, D. (2013). Triangular hesitant fuzzy set and its application to teaching quality evaluation. *Journal of information &computational science*, *10*(7), 1925-1934.
Zhao, X., Lin, R., & Wei, G. (2014). Hesitant triangular fuzzy information aggregation based on einstein operations and their application to multiple attribute decision making. *Expert systems with applications*, *41*(4), 1086-1094.
Zhu, B., & Xu, Z. (2016). Extended hesitant fuzzy sets. *Technological and economic development of economy*, *22*(1), 100-121.

نشریه تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات، دوره ٤، شماره (٤)، زمستان ۱۳۹۸، صفحه: ۳۵۳-۳٦۱

Wang, F., Li, X., & Chen, X. (2014). Hesitant fuzzy soft set and its applications in multicriteria decision making. *Journal of applied mathematics*. DOI:10.1155/2014/643785.

Rodríguez, R. M., Martínez, L., Torra, V., Xu, Z. S., & Herrera, F. (2014). Hesitant fuzzy sets: state of the art and future directions. *International journal of intelligent systems, 29*(6), 495-524.

Liao, H., Xu, Z., & Zeng, X. J. (2014). Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making. *Information sciences, 271*, 125-142.

Li, D., Zeng, W., & Li, J. (2015). New distance and similarity measures on hesitant fuzzy sets and their applications in multiple criteria decision making. *Engineering applications of artificial intelligence, 40*, 11-16.

Wei, G., Alsaadi, F. E., Hayat, T., & Alsaedi, A. (2016). Hesitant fuzzy linguistic arithmetic aggregation operators in multiple attribute decision making. *Iranian journal of fuzzy systems, 13*(4), 1-16.

Wang, J. Q., Wu, J. T., Wang, J., Zhang, H. Y., & Chen, X. H. (2014). Interval-valued hesitant fuzzy linguistic sets and their applications in multi-criteria decision-making problems. *Information sciences, 288*, 55-72.

Yang, S., & Ju, Y. (2014). Dual hesitant fuzzy linguistic aggregation operators and their applications to multi-attribute decision making. *Journal of intelligent & fuzzy systems, 27*(4), 1935-1947.

Nguyen, H. T., Prasad, N. R., Walker, E. A., & Walker, C. L. (2002). *A first course in fuzzy and neural control*. Chapman and hall/CRC.

Dehmiry, A. H., Mashinchi, M., Mesiar, R. (2017). Hesitant $\mathcal{L}$-Fuzzy Sets. *International journal of intelligent systems,* 0, 1–16.

Amin, F., Fahmi, A., Abdullah, S., Ali, A., Ahmad, R., & Ghani, F. (2018). Triangular cubic linguistic hesitant fuzzy aggregation operators and their application in group decision making. *Journal of intelligent & fuzzy systems, 34*(4), 2401-2416.

Ullah, K., Mahmood, T., Jan, N., Broumi, S., & Khan, Q. (2018). On bipolar-valued hesitant fuzzy sets and their applications in multi-attribute decision making. *Nucleus, 55*(2), 85-93.

Alcantud, J.C.R., Santos-García, G., Peng X and Zhan J. (2019). dual extended hesitant fuzzy sets. *Symmetry, 11*(5). DOI:10.3390/sym11050714.

Rong, Y., Pei, Z., & Liu, Y. (2020). Hesitant fuzzy linguistic hamy mean aggregation operators and their application to linguistic multiple attribute decision-making. *Mathematical problems in engineering*. DOI:10.1155/2020/3262618.

Xia, M., & Xu, Z. (2011). Hesitant fuzzy information aggregation in decision making. *International journal of approximate reasoning, 52*(3), 395-407.