Archive of SID

مروری بر چند اثبات قضیه مورلی

آرزو حسینی [۱]، خدیجه مرشدی [۲]

چکیده

یکی از چالش‌های موجود در آموزش ایجاد انگیزه برای یادگیری است که یکی از موارد انگیزش، کاربرد و تعمیم مسائل بیان شده در درس است. تئوری مورلی [۳] در آموزش ریاضی با روش‌های متفاوت حل شده یکی از ساده ترین حل‌های آن را تاکنون آقای دکتر کرم‌زاده ارائه کرده‌اند. حالا در این جا، با یک روش ساده می‌خواهیم تعمیم آن را به عنوان یک مسئله دوره متوسطه و کاربرد قوانین مثلثاتی حل کنیم. تئوری مورلی باعث به وجود آمدن معماها و مسائل متفاوت و وافری شده است. در این مقاله به بررسی چند روش اثبات این قضیه می‌پردازیم که قابل درک برای دانش آموختگان دوره متوسطه می باشد.

کلید واژه: آموزش ریاضی، حل مسئله، قضیه مورلی.

[۱]. دانشگاه فرهنگیان پردیس نسیبه تهران – مرکز شهید شرافت، نویسنده مسئول، a.hosseini@cfu.ac.ir

[۲]. دانشجوی دبیری ریاضی؛ دانشگاه فرهنگیان پردیس نسیبه تهران – مرکز شهید شرافت.

[۳]. F.Morely

www.SID.ir

Archive of SID

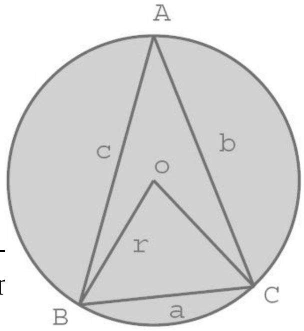
۱. مقدمه

تئوری مورلی فرصت مناسبی برای هندسه (دان ها) فراهم می کند تا ابهام ان را برطرف کنند. هم چنین اثبات می کنیم که اثبات ما بسیاری از معماها (نقاط ابهام) را برطرف می کند. به منظور توجیه نامی که برای عنوان این مقاله انتخاب شده تعدادی از اثبات‌های متفاوت که برای دانش آموزان متوسطه قابل درک باشد بیان می‌گردد.

قضیه مورلی حاکی از این است که نقاط برخورد خطوط مجاور اضلاع تثلیث کننده سه زاویه داخلی هر مثلث تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می‌دهند. این مساله ابتدا در سال ۱۸۹۹ توسط فرانک مورلی مطرح گردید و تاکنون اثبات‌های متعددی برای آن ارائه شده است. همیشه به دنبال پاسخ ساده‌تری برای مسئله هستیم تا بتوان در سطوح متوسطه قابل طرح باشد و بیان یک مسئله به طور ساده و حل ساده آن یک هنر آموزشگر می‌باشد که قابل درک برای تمام سطوح ، حتی دانش آموختگان سطوح پایین‌تر باشد. مانند حل مسئله مورلی توسط آقای دکتر کرم‌زاده [1, 2]. در بیشتر ساختارهای زمینه‌ی (پیش نیاز) اثبات برای تئوری مورلی، یک مثلث مشابه با مثلث داده شده وجود دارد(یا اثبات با مشابهت یک مثلث با مثلث داده شده به پایان می رسد) و موقعیت یک نیمساز ساده مبنایی برای هر مرحله ای از اثبات می‌باشد.

۲. روش حل بانکف [۱]

اثبات بانکف مبتنی بر روش‌های مثلثاتی است [1] . که دانش آموزش در دوره متوسطه با مثلثات آشنا شده و روش‌های هندسه و مثلثاتی این اثبات باعث انگیزش خواهد بود که قضایای مهم نیز با آن قابل حل است.



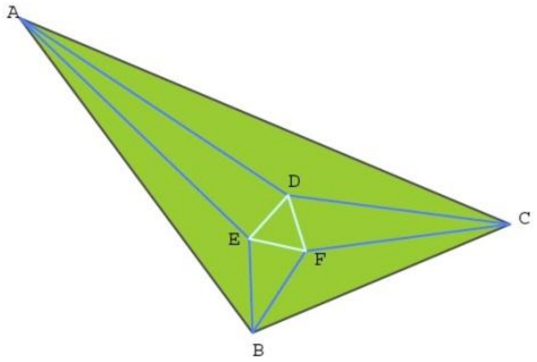
برای هر مثلث ΔABC داریم : $\frac{BC}{\sin(A)} = \frac{AC}{\sin(B)} = \frac{AB}{\sin(C)} = 2r$

[1] .Bar

www.SID.ir

Archive of SID

(r شعاع دایره محیطی مثلث ΔABC)



مثلث دلخواه ΔABC، با زاویه‌ها

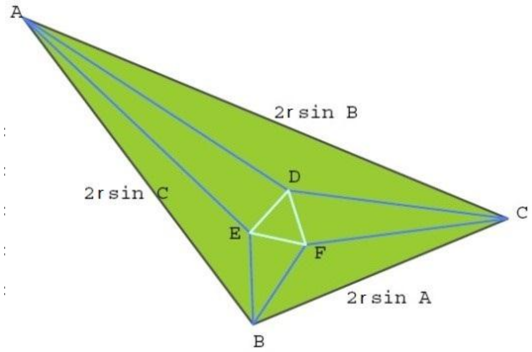
در نقاط A، B و C کشیده شده است. از

شکل ۲-۱

شکل مقابل می دانیم که

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$.

شکل ۲-۲



شکل ۲-۳

$sin\ \angle ADC\ = sin\left(\frac{360^o + \hat{B}}{3}\right) \quad (i)$ به همین ترتیب :

www.SID.ir

Archive of SID

در مثلث ΔABC فرض می کنیم : $\hat{A} = 3\alpha,\ \hat{B} = 3\beta,\ \hat{C} = 3\gamma$ و در مثلث $\triangle BFC$ داریم :

$$\frac{BF}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin(180^0-\gamma-\beta)}.$$

$$BC/\sin(180^0-\gamma-\beta) = 2r\sin(3\alpha)/\sin(\gamma+\beta) = 2r\sin(3\alpha)/\sin(60^0-\alpha).$$

بنابراین $BF/\sin\gamma = 2r\sin(3\alpha)/\sin(60^0-\alpha)$ پس

$$BF = 2r\sin(3\alpha)\sin c/\sin(60^o-\alpha).$$

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\\
&= 4\sin(x)\,[(\sqrt{3}/2)^2 - \sin^2(x)]\\
&= 4\sin(x)\,[\sin^2(60^o) - \sin^2(x)]\\
&= 4\sin(x)\,(\sin 60^o + \sin(x))(\sin 60^o - \sin(x))\\
&= 4\sin(x)\,2\sin[(60^o+x)/2]\cos[(60^o-x)/2]\,2\sin[(60^o-x)/2]\cos[(60^o+x)/2]\\
&= 4\sin(x)\sin(60^o+x)\sin(60^o-x)
\end{aligned}$$

بنابراین :

$$BF = 8r\sin(\alpha).\sin(60^o+\alpha).\sin(60^o-\alpha).\frac{\sin\gamma}{\sin(60^o-\alpha)}$$

$$BF = 8r\sin(\alpha).\sin(60^o+\alpha).\sin(\gamma) \qquad (ii)$$

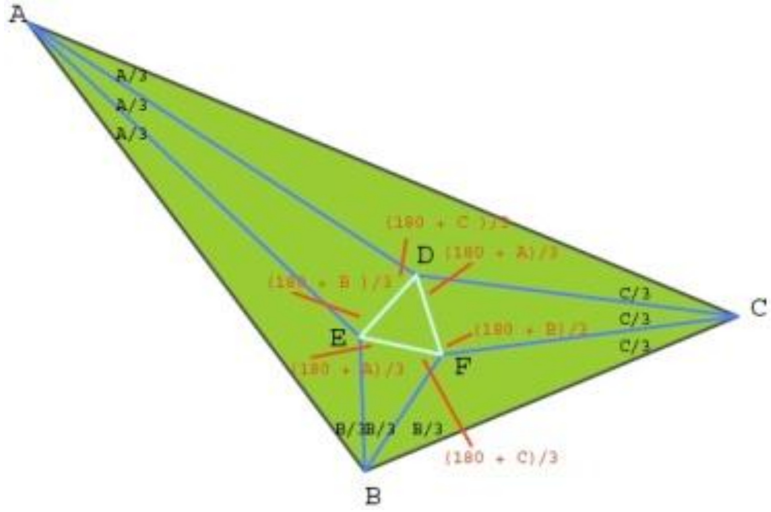
مانند (ii) برای $B = 3\beta$ و $C = 3\gamma$ استفاده می کنیم و بدست می آید:

$$AD = 8r\sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(60^0+\beta)$$

$$AE = 8r\sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(60^o+\gamma)$$

www.SID.ir

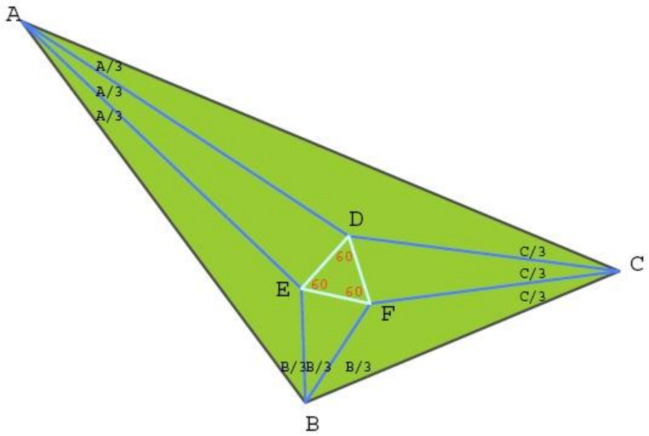
Archive of SID



شکل ۲-٤

$$AE/AD = \sin(60^o + \gamma)/\sin(60^o + \beta).$$

$$\begin{aligned}\angle ADE + \angle AED &= 180^o - A/3\\ &= (540^o - A)/3\\ &= (540^o - (180^o - B - C))/3\\ &= (360^o + B + C)/3\\ &= (180^o + B)/3 + (180^o + C)/3.\end{aligned}$$



www.SID.ir

Archive of SID

شکل ۲-۵

از اینجا خواهیم داشت

$\angle AED = \frac{180^o + C}{3}$ ، $\angle ADE = \frac{180^o + B}{3}$،

به همین ترتیب برای مثلث‌های ΔDFC ، ΔBFE بدست می‌آید.

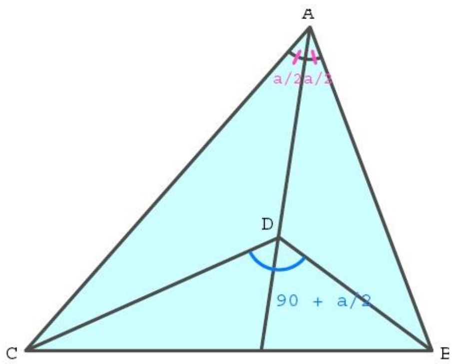
زوایای حول F را بدست می آوریم $\widehat{DFE} = 300^o$ و یا $\widehat{DFE} = 60^o$. به همین ترتیب برای زوایای D و E نیز 60^o خواهند بود.

۳. روش اثبات دریگیدز[1]

اثبات دیگری از قضیه مورلی مطرح می‌کنیم ؛ این نوع اثبات ها از این نظر حائز اهمیت است که با اطلاعات دانش آموزان در دوره متوسطه قابل درک می‌باشند.

برای اثبات قضیه مورلی از لم زیر استفاده می شود که اثبات لم در [4] آمده است.

لم۱: فرض کنید $\angle BAC = a$ و نقطه D در مرکز مثلث $\triangle ABC$ است، اگر و تنها اگر خط DA نیمساز زاویه a باشد و $\angle CDB = 90^o + a/2$.



شکل ۳-۱

اثبات قضیه مورلی : فرض می کنیم زوایای داخلی مثلث دلخواه ΔABC ، $\hat{A} = \alpha$، $\hat{B} = \beta$، $\hat{C} = \gamma$ باشد و دریگیدز فرض می کند:

شکل ۲

[11] .Dergiades

www.SID.ir

Archive of SID

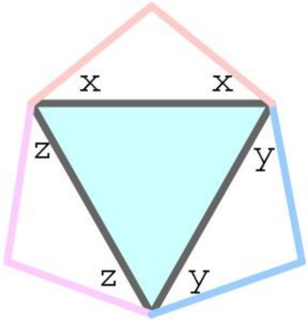
$x = 60^o - (\alpha/3)$،

$y = 60^o - (\beta/3)$،

$z = 60^o - (\gamma/3)$.

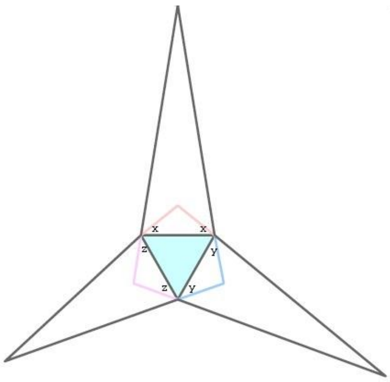
و فرض می شود $0 < x،y،z < 60^0$ و $x + y + z = 120^0$.

سه مثلث متساوی الساقین روی اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع با زوایای جانبی x، y و z می‌سازیم که $0 < x،y،z < 60^0$ و $x + y + z = 120^0$ در شکل مقابل می‌بینید.



شکل ۳-۲

ساق ها را مانند آنچه که در شکل(۳-۳) مشاهده می‌کنید امتداد داده تا یکدیگر را قطع کنند.

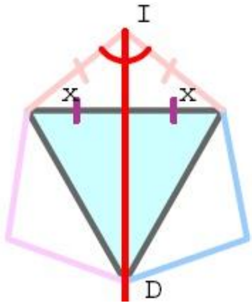


شکل ۳-۳

www.SID.ir

Archive of SID

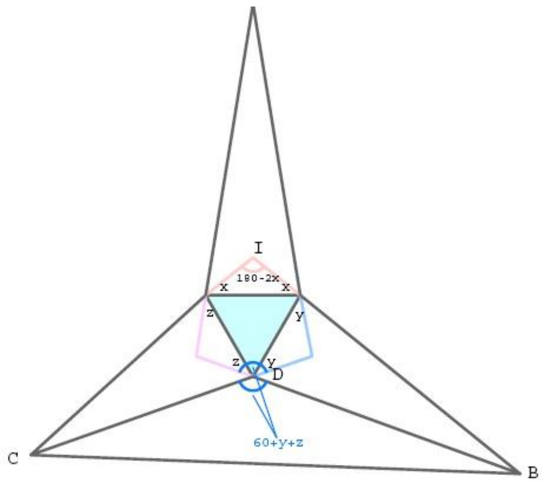
چون D راس مثلث متساوی الاضلاع است بنابر آنچه که در شکل مشاهده می‌کنید خط ID نیمساز زاویه‌های I و D خواهد بود در شکل (۳-۴).



شکل ۳-٤

راس‌های B و C را به هم وصل می‌کنیم.

$\angle BDC = 60^o + z + y$



شکل ۳-٥

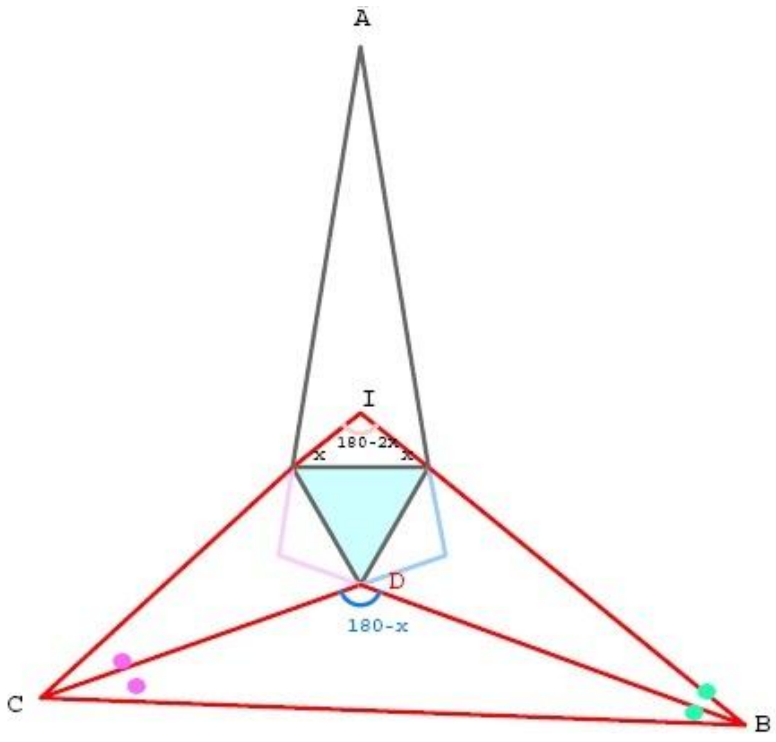
$$\widehat{BDC} = 60^0 + z + y = 60^0 + x + y + z - x = 180^0 - x.$$

چون $\angle BIC = 180^0 - 2x$ و D روی نیمساز زاویه $\angle BIC$ است بنابر لم۱ نتیجه می گیریم که D در مرکز مثلث $\triangle CIB$ می‌باشد.

www.SID.ir

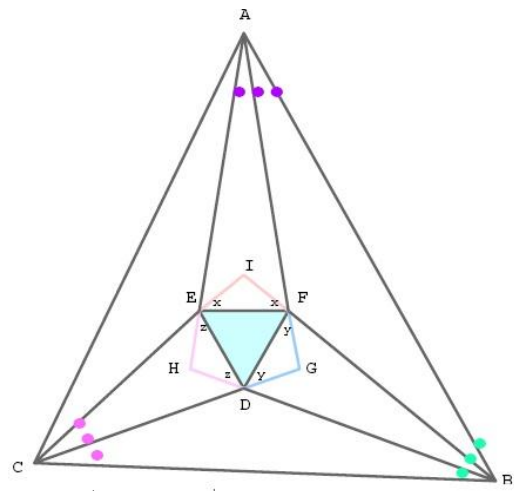
Archive of SID

(D محل برخورد نیمسازها در مثلث $\triangle$CIB است.)



شکل ۳-۶

حال ضلع AB و AC را رسم می‌کنیم.



www.SID.ir

Archive of SID

شکل ۳-۷

در آخر ثابت می کنیم که زوایای داخلی مثلث $\triangle ABC$ همان γ و β و α می باشد.

بنابر شکل ۳-۷ داریم : $s+x+z+60=180^0$ و درنتیجه $s+x+z=120^0$. همچنین $a+s+t+x+x=180^0$.

به همین ترتیب $t+x+y+60=180^0$ پس $t+x+y=120^0$ و همچنین $x+y+z=120^0$.

بدین ترتیب

$t+x)=180^0$
$+(120^0-y)=180^0$
$20^0-z-y)=180^0$
$=180^0$

بنابراین بدست می آید $a=60^0-x=\alpha/3$. لذا مثلث $\triangle ABC$ دارای زوایای α و γ و β است.

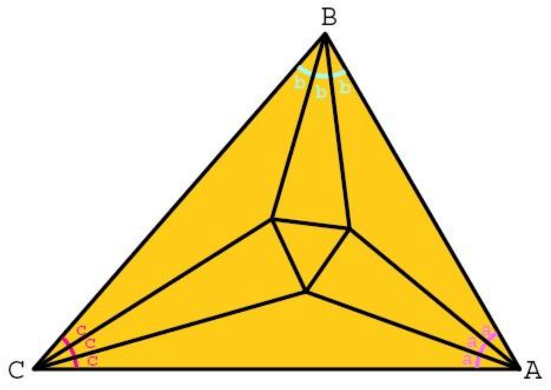
شکل ۳-۸

www.SID.ir

Archive of SID

۴. روش کانوی[1]

اثبات زیر اثری از کانوی که در سال ۱۹۹۵ انجام شده است [3, 5, 6] . در این اثبات بنابر شکل (۴-۱) در نظر گرفته شده است $3a + 3b + 3c = 180^o$ بنابر این $a + b + c = 60^o$.



شکل ٤-١

فرض می کنیم $x^+ = x + 60^o$ و چون $a + b + c = 60^o$ پس می توان $0^+ = a + b + c = 60^o$ در نظر گرفت.

بنابراین برای ساخت یک مثلث می توان سه نوع ترکیب از زوایا را در نظر گرفت:

۱- نوع اول : 0^+،0^+،0^+

۲- نوع دوم : $a^+، b^+، c$؛ $a^+، b، c^+$؛ $a، b^+، c^+$

۳- نوع سوم : $a، b، c^{++}$؛ $a، b^{++}، c$؛ $a^{++}، b، c$

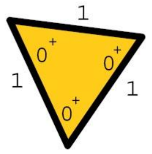
چون جمع هر یک از این هفت ترکیب برابر 180^o است.

[1] Conway

www.SID.ir

Archive of SID

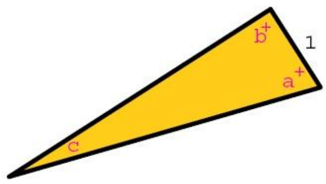
کانوی به روش بازگشتی مسئله را حل کرده است . او نشان می دهد که روی یک مثلث متساوی الاضلاع می توان یک مثلث با هر زاویه ای ساخت. یعنی با زوایای دلخواه a و b و c که $a + b + c = 60^{o}$ می-توان داشته باشیم:



۱- نوع اول : مثلث متساوی اضلاع با طول ۱ می‌سازیم.

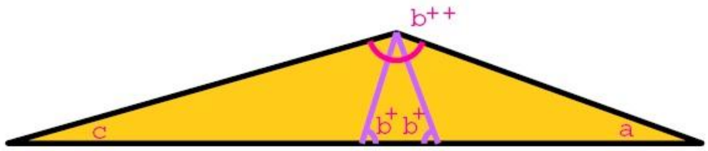
شکل ۴-۲

۲- نوع دوم: یک مثلث با یک ضلع ۱ و زوایای a^{+} b^{+} می‌سازیم.



شکل ۴-۳

۳- نوع سوم : دو خط با نقطه اشتراک در b^{++} روی ضلع مقابل به زاویه b^{++} با زاویه b^{+} باشند. مثلث متساوی الساقین با زاویه پایه b^{+} ایجاد می کند. (دلیل و نحوه ساخت این مثلث در پایین ذکر شده است.)

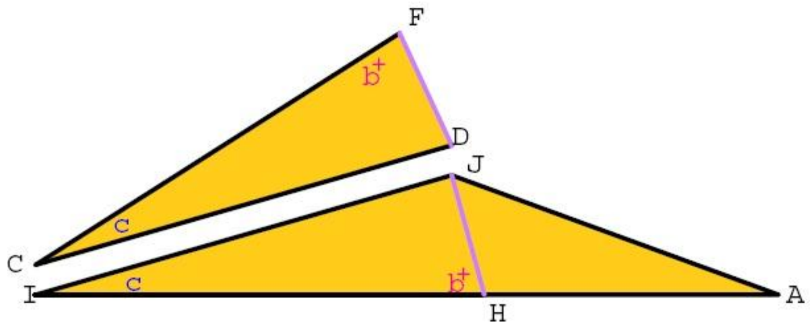


شکل ۴-۴

مثلث های $\triangle JHI$ و $\triangle DFC$ را می‌سازیم

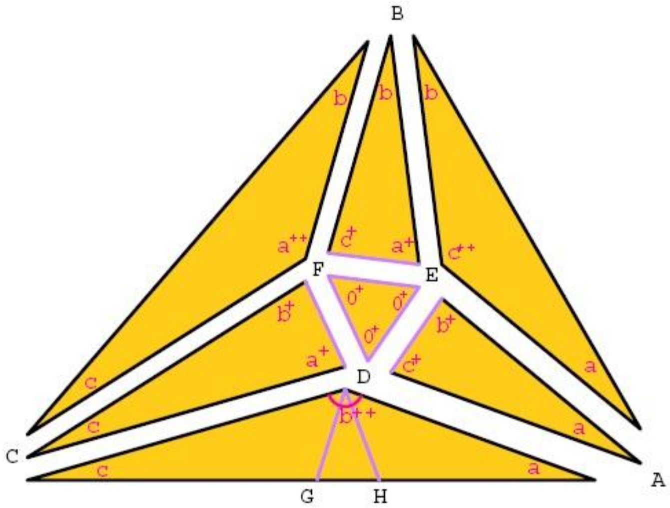
www.SID.ir

Archive of SID



- $\angle JHI = \angle DFC = b^{+}$
- $\angle JIH = \angle DCF = c$
- $JH = DF = 1$

ثابت می شود مثلث های $\triangle JHI$ و $\triangle DFC$ همنهشت هستند. این نشان می دهد که $JI = DC$،
چون دو مثلث یکسان شدند پس ضلع مشترک هستند و نقاط $D =$ شکل ٤-٥ ه همین ترتیب می‌توان
مثلث های دیگر را نیز ساخت و آن‌ها را کنار هم قرار داد.



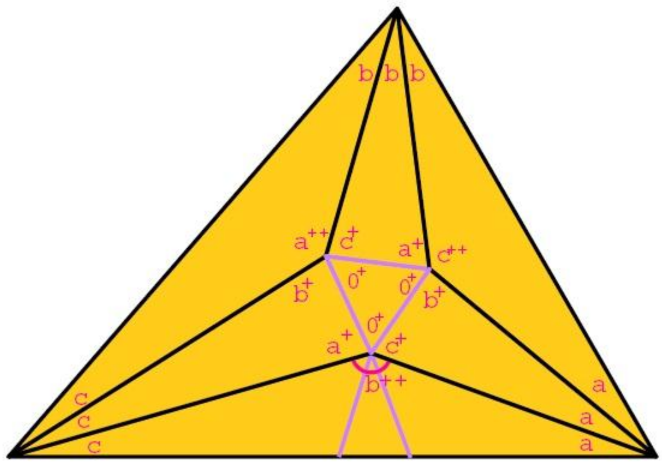
Archive of SID

شکل ٤-٦

توجه کنید جمع زوایای راس های مثلث متساوی الاضلاع 360^o باشد.

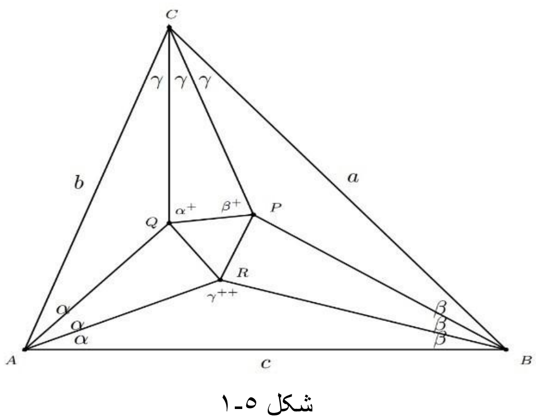
$$(a^{+})+(c^{+})+(b^{++})+(0^{+}) = a+60^o+c+60^o+b+120^o+60^o$$
$$=(a+b+c)+300^o=360^o$$

چون جمع زوایا در D، 360^o است و اضلاع منطبق هستند. می‌بینیم مثلث بزرگتر از روی مثلث تساوی الاضلاع ساخته شده است با زوایای 3a، 3b و 3c، به نتیجه مطلوب دست پیدا کردیم.



شکل ٤-٧

۵. روش اثبات کرم‌زاده [3, 4]. در بیشتر ساختارهای اثبات بازگشتی قضیه مورلی، اثبات با یک مثلث متشابه با مثلث داده شده به پایان می رسد اما در اثبات دکتر کرم زاده با اجتناب از تشابه، در انتهای اثبات،



شکل ۵-۱

www.SID.ir

Archive of SID

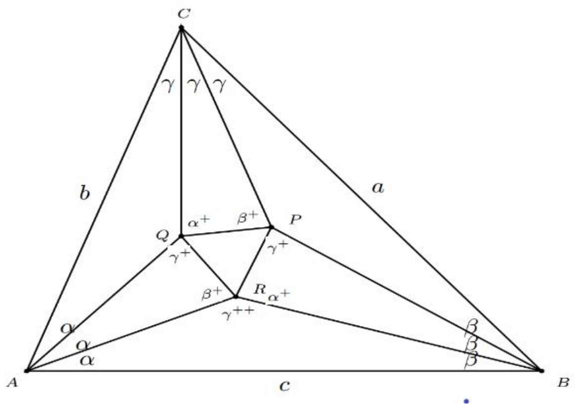
به مثلث اولیه می رسیم. همچنین در این اثبات، قضیه نیمسازها (لم۲).

۶. برای اثبات هر کدام از گامهای قضیه کفایت می کند. اثبات دقیق این قضیه در منبع [7] ذکر شده است ، اینجا روش اثبات عنوان می گردد.

برای اثبات، ابتدا مسئله حل شده در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب خواهیم داشت :

$$\alpha^{+} = 60^{0} - \alpha$$
$$\beta^{+} = 60^{0} - \beta$$
$$\gamma^{+} = 60^{0} - \gamma$$
$$\gamma^{++} = 120^{0} + \alpha$$

لم۲: فرض کنید A نقطه ای درون زاویه $\widehat{XOY}$ و B و C به ترتیب نقاطی روی اضلاع OX و OY هستند. سپس اگر دو تا از گزاره‌ی زیر درست باشند، آنگاه سومی هم درست است [3, 6].



شکل ۵-۲

۱. نقطه ی A روی نیمساز زاویه‌ی $\widehat{XOY}$ قرار دارد.

۲. $AB = AC$.

۳. زاویه ی $\widehat{OBA}$ و $\widehat{OCA}$ یا مساوی‌اند یا مکمل‌اند.

www.SID.ir

Archive of SID

بنابر لم ۲ خواهیم داشت :

$$\widehat{CQP} = \widehat{PRB} = \alpha^{+}$$
$$\widehat{AQR} = \widehat{RPB} = \gamma^{+}$$
$$\widehat{ARQ} = \widehat{RPB} = \beta^{+}.$$

حال برای اثبات قضیه مورلی مثلث ΔARB با داشتن ضلع AB و زوایای جانبی α و β رسم می‌کنیم سپس مثلث ΔARQ را روی ضلع AR با زوایای جانبی α و β^{+} رسم کرده به همین ترتیب مثلث ΔBRP و ثابت می کنیم $QR = PR = QP$ پس مثلث ΔPQR متساوی الاضلاع بوده که همان مثلث مورلی می‌باشد. مثلث $\Delta PQC'$ را روی ضلع PQ با زوایای جانبی α^{+} و β^{+} رسم کرده و ثابت می‌کنیم نقطه C' همان نقطه C است، بدین ترتیب حکم کامل می‌شود.

منابع

1- Alexander Bogomolny, this proof is first published, in **Mathematics Magazine**, 35 (1962) 223-224

2- Dergiades, A simple geometric proof of Morley's Theorem, Diastasi 1991 issue 1-2 pp 37-38. Thessaloniki-Gree.

3- Connes, A., A new proof of Morley’s theorem, http://www.alainconnes.org/docs/morley.pdf

4- I. Gorjian ، O. A. S. Karamzadeh ، M. Namdari، Morley’s Theorem Is No Longer Mysterious! 2015 Springer Science New York، DOI: 10.1007/s00283-015-9579-0، December 2015.

5- O.A.s. Karamzadeh، Is John Conway's Proof of Morley's Theorem the Simplest and Free of A Deus Ex Machina? ، The Mathematical Intelligencer، September 2014، ***Volume 36*** *، Issue 3،* ***pp 4–7.***

6- Dragutin Svrtan and Darko Veljan، Side Lengths of Morley Triangles and Tetrahedra ، Forum Geometricorum، Volume 17 (2017) 123–142.

۷- آرزو حسینی، مریم شمس سولاری ، پردیس نیک فطرت ، مروری بر تعمیم قضیه مورلی ،"مجله شهید شرافت (دانشگاه فرهنگیان)س" (۲۰۱۷) ۲۰-۲۴ .

www.SID.ir

Archive of SID

www.SID.ir