

نقش ترسیم در استدلال های هندسی

سهراب عظیم پور^۱

چکیده

از زمان های دور، فهم و درک مفاهیم ریاضی و هندسه برای اکثر دانش آموزان و دانشجویان، مسئله ای حادی بوده است. به خصوص درک مفاهیم درس هندسه که با تجسم فضایی نیز به همراه باشد باعث می شود مشکلات درک و یادگیری را دوچندان می کند. هندسه و به ویژه چند ضلعی ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آن ها می توان این ابهامات را، از بین برد. در فرآیند یاددهی - یادگیری در مبحث ترسیم های هندسی و استدلال، عوامل و عناصر بسیاری دخیل هستند، معلم ناچار است این مجموعه عوامل را در جهت اثربخشی مثبت کلاس خود سازمان دهی کند، بنابراین از همه ی ابزار و دانش حرفه ای که در اختیار دارد، حداکثر استفاده را می برد. برای بهره گیری از آن ها، معلمان باید دارای مهارت های مختلف تفکر باشند. عمل فکورانه ی معلمان، نقش کلیدی در افزایش کیفیت تدریس و یادگیری در کلاس دارد مطالعه ی قضیه تالس و تشابه در شکل های هندسی، اهمیت فوق العاده ای دارد. در این مقاله، مفاهیم اولیه هندسه مورد توجه قرار می گیرد سپس با استفاده از ابزار ترسیم، مسئله هایی که برای دانش آموزان یا فراگیران مبهم است جواب داده می شود.

کلمات کلیدی: قابل انطباق، تشابه، مربع و متناظر.

^۱. استادیار دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، نویسنده مسئول، azimpour@cfu.ac.ir

دریافت: ۹۸/۱/۲۵ پذیرش: ۹۸/۲/۳

هندس و به ویژه ترسیم های هندسی از دیرباز مورد استفاده ی بشر بوده و خواهد بود. همه ی هنرمندان و معماران با هر سبک و در هر رشته به دنبال آن هستند که دیدگاه های خود را از زندگی و جهان اطراف خود در آن چه خلق می کنند و می سازند به نوعی به نمایش بگذارند. هندسه و به ویژه چند ضلعی ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آن ها می توان این آثار را پدید آورد. در فرآیند یاددهی- یادگیری در مبحث ترسیم های هندسی و استدلال، عوامل و عناصر بسیاری دخیل هستند، معلم ناچار است این مجموعه عوامل را در جهت اثربخشی مثبت کلاس خود سازمان دهی کند، بنابراین از همه ی ابزار و دانش حرفه ای که در اختیار دارد، حداکثر استفاده را می برد. برای بهره گیری از آن ها، معلمان باید دارای مهارت های مختلف تفکر باشند. عمل فکورانه ی معلمان، نقش کلیدی در افزایش کیفیت تدریس و یادگیری در کلاس دارد قضیه تالس و تشابه در شکل های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول ها و فاصله های غیر قابل دسترس دارند. محاسبه ی ارتفاع بلندی ها به کمک سایه ی آن ها نمونه ای از این کاربردهاست.

عمل تدریس، نیازمند دانش و معلومات حرفه ای چندگانه ای است که شامل دانش موضوعی، دانش آموزشی، دانش برنامه درسی و معلومات تفاوت های فرهنگی و دانش ارتباطی می باشد. بسیاری از محققان روی این اصل توافق دارند که تدریس به دانش های مختلف نیازمند است و این دانش ها به طور کلی روشن هستند اما توافق کمتری بر روی این موضوع وجود دارد که این دانش، به چه شیوه ای آموخته شود آن ها معتقدند که کلاس های درس پیچیده و غیر قابل پیش بینی هستند و لذا دانش مربوط به تدریس باید در حین عمل و فعالیت کسب شود. در واقع معلمان مجبورند یاد بگیرند قبل از این که تدریس کنند و همچنین زمانی که تدریس می کنند باید از عمل تدریس خودشان یاد بگیرند. بر اساس این باور، کسب دانش و تدریس ریاضی و هندسه، دو روی، یک سکه هستند که هر دو باید همزمان انجام گیرند. برای رسیدن به چنین مقصودی، یعنی بهبود کیفیت تدریس ریاضی و به خصوص هندسه، مناسب ترین روش در حال حاضر استفاده از نرم افزارهای ریاضی است که می تواند دانش دانشجو معلمان آموزش ریاضی را برای تدریس افزایش دهد. روشن است که از طریق یافته های این پژوهش می توان در توسعه حرفه ای معلمان، به خصوص دانشجو معلمان ریاضی و اصلاح بهبود روش های تربیت معلم، بهره مند شد.

در این مقاله به آنالیز محتوای کتاب هندسه ی ۱ سال دهم رشته ریاضی می پردازیم به منظور رفع ابهامات برای دانش آموزان و تعدادی مسئله ی مکمل برای موضوعات این کتاب را بیان و اثبات می کنیم. بنابراین لازم است قبل از بیان مسائل، تعاریف مقدماتی مورد نیاز را بیان کنیم.

تعریف ۱: دو شکل هم نهشت (قابل انطباق)

دو شکل را در صورتی هم نهشت یا قابل انطباق گوئیم که تمامی زوایا و اضلاع نظیر هم برابر باشند.

حالت خاص: دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در سه حالت زیر می توانند هم نهشت (قابل انطباق) باشند.

(۱) دو ضلع از مثلث $\triangle ABC$ با دو ضلع از مثلث $\triangle A'B'C'$ هم اندازه و زاویه ی بین این اضلاع در دو مثلث برابر باشند.

(۲) دو زاویه از مثلث $\triangle ABC$ با دو زاویه از مثلث $\triangle A'B'C'$ برابر بوده و اضلاع بین این زوایا در دو مثلث هم اندازه باشند.

(۳) سه ضلع از مثلث $\triangle ABC$ با سه ضلع از مثلث $\triangle A'B'C'$ نظیر به نظیر هم اندازه باشند.

تعریف ۲: دو شکل مشابه

دو شکل را مشابه گوییم هر گاه با استفاده از عملیاتی چون تغییر مقیاس (تجانس)، دوران، انتقال یا بازتاب محوری بتوان یکی را به دیگری تبدیل نمود.

ممکن است تشخیص تشابه دو شکل هندسی دشوار باشد زیرا ممکن است نیاز به اعمال دوران، انتقال یا بازتاب محوری نیز باشد. نتیجه: در هندسه دو شکل هم نهشت خواهند بود اگر نسبت تشابه آن ها برابر یک باشد

تعریف ۳: نیمساز

نیمساز زاویه ی \hat{AOB} عبارت است از نیم خط \vec{OX} بطوری که هر نقطه روی \vec{OX} از دو ضلع زاویه ی \hat{AOB} به یک فاصله باشد.

تعریف ۴: مربع

مربع یک چهارضلعی که همه ی اضلاع آن هم اندازه بوده و حداقل یک زاویه ی قائمه داشته باشد.

تعریف ۵: دو خط متنافر

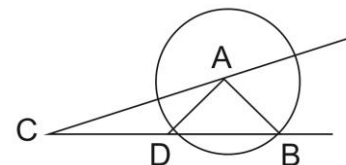
دو خط که نقطه ی مشترکی نداشته باشند و در یک صفحه قرار نگیرند.

یافته ها و بحث

مسئله اول: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر، قابل انطباق بوده و یکی از زوایای خارج این دو ضلع در هر دو مثلث، قابل انطباق باشند آیا این دو مثلث قابل انطباق اند؟

جواب: منفی است. دایره ای به مرکز A و به شعاع AD رسم می کنیم مطابق شکل ۱ چون AB و AD هر دو شعاع دایره اند لذا $AD=AB$. حال دو

مثلث $\triangle ACD$ و $\triangle ACB$ را در نظر بگیرید.



شکل ۱

$$AC = AC$$

در این دو مثلث $AD = AB$

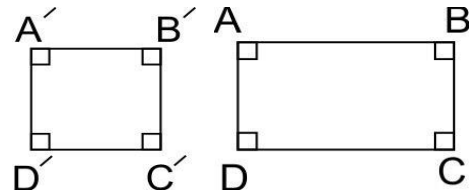
$$\hat{C} = \hat{C}$$

بدیهی است دو مثلث $\triangle ACD$ و $\triangle ACB$ قابل انطباق نیستند.

مسئله دوم: اگر در تعریف تشابه دو شکل، فقط به تساوی زاویه ها، اشاره شود آیا دو شکل، باز می توانند تشابه باشند؟

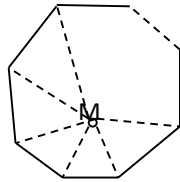
جواب: منفی است:

چهارضلعی های $ABCD$ و $A'B'C'D'$ مستطیل و مربع اند (شکل ۲) که همه ی زوایای آن قائمه اند ولی این دو شکل متشابه نیستند.



شکل ۲

مسئله سوم: با استدلال استنتاجی، نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب، برابر $(n-2) \times 180^\circ$ است. حل: یک n ضلعی محدب دلخواه مطابق شکل ۳ در نظر می‌گیریم نقطه ای مانند M را در داخل این n ضلعی محدب در نظر می‌گیریم تعداد پاره خط‌هایی که یک سر آن‌ها نقطه M و سر دیگر آن، رئوس روی n ضلعی محدب باشند، برابر n تا است.



شکل ۳

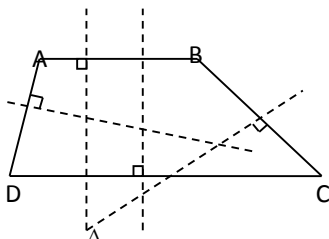
بنابراین این n ضلعی (رئوس این n ضلعی) به همراه رأس M ، n مثلث تشکیل می‌دهند لذا مجموع زوایای داخلی این n مثلث $n \times 180^\circ$ است. از طرفی‌های این مثلث‌ها در رأس M مشترک و مجموع‌های زوایای مربوط به این مثلث‌ها به رأس M ، $2 \times 180^\circ = 360^\circ$ می‌باشند لذا $(n-2) \times 180^\circ =$ مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب

مسئله ی چهارم:

آیا برای یک n ضلعی محدب $n \geq 4$ ، همواره، دایره ی محیطی وجود دارد؟

جواب: منفی است.

اگر جواب داشته باشد، باید مرکز این دایره محل تقاطع عمود منصف‌های اضلاع n ضلعی باشند که با توجه شکل ۴، چنین چیزی امکان ندارد.

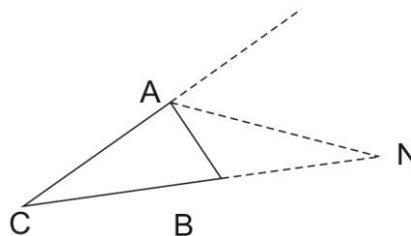


شکل ۴

مسئله ی پنجم: با استدلال استنتاجی ثابت کنید نیمساز زاویه ی خارجی یک رأس A (مطابق شکل ۵) از مثلث ABC ، ضلع مقابل به این زاویه

$$\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC}$$

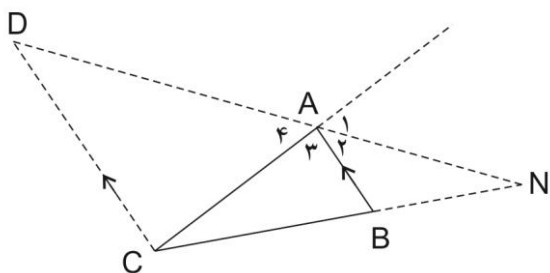
(امتداد ضلع مقابل) را به نسبت اضلاع دو ضلع زاویه ی A قطع می‌کند



شکل ۵

برهان:

از نقطه C خطی به موازات AB رسم می کنیم تا این که، امتداد AN را در نقطه ای مانند D قطع کند. (مطابق شکل ۶)



شکل ۶

AN نیمساز خارجی زاویه A است پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. چون $\hat{D} = \hat{A}_1$ لذا $AB \parallel DC$ و در نتیجه $\hat{A}_3 = \hat{D}$ پس

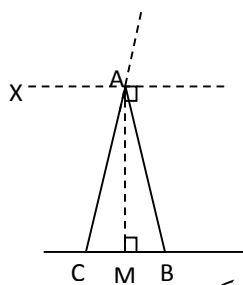
$$(I) \quad CD = CA$$

بنابراین در مثل $\triangle DCN$ چون $AB \parallel DC$ بنا به قضیه ی تالس

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

حالت خاص: در صورتی که نیمسازهای داخلی و خارجی در یک مثلث بر هم عمود باشند (یعنی مثلث خود متساوی الساقین باشد) امتداد نیمساز

خارجی ضلع مقابل را در بینهایت قطع می کند. (مطابق شکل ۷)



شکل ۷

حل: فرض کنید \overleftrightarrow{XA} نیمساز خارجی راس A با خط \overleftrightarrow{CB} موازی باشد لذا همدیگر را در بینهایت قطع می کنند.

با تصور آن که دو خط موازی همدیگر را در بینهایت در نقطه ای مانند N قطع کنند.

تساوی $\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BN}$ قابل قبول است زیرا مشابه حالتی که $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x+1} = 1$ می توانیم $\frac{CN}{BN} \cong 1$

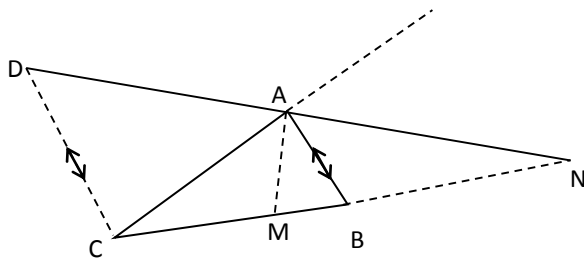
مثال: در مثلث $\triangle ABC$ ، طول اضلاع $AB = 2, AC = 8, BC = 9$ است، نیمسازهای زاویه ی A ، ضلع BC را در M و N قطع می کند اندازه ی MN کدام است؟

- ۴/۲ (۱) ۴/۵ (۲) ۴/۸ (۳) ۵/۱ (۴)

حل: از C ، خطی به موازات AB رسم می کنیم، لذا طبق مساله ی ششم

$$\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NB+BC} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{NB}{NB+9} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{NB}{NB+9} \Rightarrow NB+9 = 4NB \rightarrow NB = 3$$



شکل ۸

از طرفی

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC} \rightarrow \frac{AB}{AC+AB} = \frac{MB}{MB+MC}$$

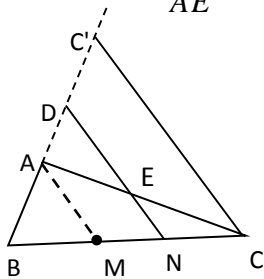
$$\xrightarrow{MB+MC=BC} \frac{2}{8+2} = \frac{MB}{9} \rightarrow MB = 1/8$$

بنابراین

$$MN = MB + BN = 1/8 + 3 = 4/8$$

مساله ششم:

در مثلث $\triangle ABC$ ، $\frac{AB}{AC} = \frac{n}{m}$ ، که در آن $n, m \in \mathbb{N}$ و پاره خط DN موازی میانه AM است نسبت $\frac{AD}{AE}$ چقدر است (مطابق شکل ۹)



شکل ۹

Archive of SID

حل: از C خطی به موازت AM رسم می کنیم تا امتداد AB را در C قطع طبق فرض $BM = MC$ لذا در مثل $\triangle BCC'$ ، $AM \parallel CC'$ پس

$$(I) \quad AB = AC'$$

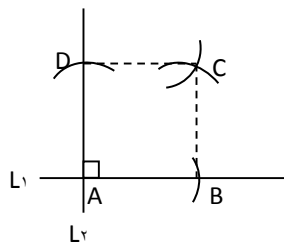
از طرفی دو مثلث $\triangle ADE, \triangle ACC'$ متشابه اند زیرا $DE \parallel CC'$ بنابراین

$$\frac{AD}{AC'} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC'}{AC} \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{n}{m}$$

مسئله ی هفتم:

با استفاده از پرگار و خط کش یک مربع رسم کنید.

ابتدا دو خط عمود بر هم L_1, L_2 را مطابق شکل ۱۰ رسم می کنیم فرض کنید $L_1 \cap L_2 = \{A\}$. حال به مرکز A و به شعاع ثابتی مانند r، کمانی رسم می کنیم تا دو خط L_1 و L_2 را در نقاط D, B قطع کند پس به مراکز D, B و با همان شعاع r، کمان هایی را رسم می کنیم. محل برخورد این دو کمان یعنی C، جواب مسئله است. زیرا حداقل یک زاویه ی قائمه دارد و همه ی اضلاع $ABCD$ ، هم اندازه اند.



شکل ۱۰

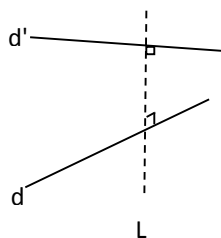
مسئله هشتم

آیا عکس قضیه ی زیر در فضا برقرار است؟

اگر دو خط d, d' موازی هم باشند آنگاه حداقل یک خط عمود بر d وجود دارد بطوری که بر خط d' عمود باشد.

جواب:

دو خط متنافر d, d' را در فضا مطابق شکل ۱۱ در نظر بگیرید. فرض کنید L خطی باشد که بر هر دو خط d, d' در فضا عمود باشد بنابراین:



شکل ۱۱

$$\begin{aligned} L \perp d \\ L \perp d' \end{aligned} \Rightarrow d \parallel d'$$

چون d, d' متنافرند بنابراین عکس این قضیه نمی تواند همواره برقرار باشد.

نتیجه گیری

استفاده از ترسیمات هندسی به همراه تفکر تجسمی می تواند راهگشای مسائل هندسی باشد.

Archive of SID

منابع

- ۱- هندسه ۱، پایه دهم دوره ی دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران
- ۲- هندسه ۲، پایه ی یازدهم دوره ی دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.