Farhangian University
Quarterly Journal of Education in Basic Sciences
Volume ٦, Issue ١٩, Summer, ٢٠٢٠

دانشگاه فرهنگیان
فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه
دوره ششم، شماره ۱۹، تابستان ۱۳۹۹

چرایی‌های مفهوم حد و کاربرد آن

علی ملخاصی[۱]

دریافت: ۹۹/۳/۱۸ پذیرش: ۹۹/۴/۷

چکیده

در این مقاله تلاش داریم با بررسی تعریف حد تابع، نقاط ضعف و قوت آن را در حل مسائل مربوطه شناسایی کنیم و روشی منطقی برای اصلاح و بهبود درک واقعی از مفهوم حد ارائه دهیم. برای این منظور ضمن بررسی تعریف حد تابع در فضای متری دلخواه بخصوص در فضای متری اقلیدسی سوالاتی را مطرح می‌کنیم که با تامل در درک مفهوم تعریف حد می‌توان به این سوالات جواب داد. در پایان کاربردی از تعریف حد را در زندگی روزمره بیان می‌کنیم.

واژه های کلیدی: حد تابع، فضای متری، آموزش ریاضی.

۱. استادیار گروه علوم پایه دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، molkhasi@gmail.com

۱- مقدمه

اگر هدف آموزش ریاضی را همچنان که استیسی (استیسی[۱]، ۲۰۰۵) می‌گوید پرورش فراگیرانی با توانایی کاوش مستقل در ریاضی و توانایی در به کار بردن ریاضی یاد گرفته شده در جهان واقعی بدانیم، خواهیم دید که باید فراگیران درک درستی از تعاریف و قراردادها و اصول و قضایای ریاضی داشته باشند تا بتوانند در کاربرد ریاضی در زندگی روزمره موفق باشند[۲]. در این مقاله روشی منطقی برای اصلاح و بهبود درک واقعی از مفهوم حد برای اثبات حد تابع از روی تعریف حد ارائه می‌دهیم. در بخش ۲، ضمن یادآوری تعریف حد تابع در فضای متری به سوالاتی مفهومی از تعریف حد تابع می‌پردازیم. در بخش ۳، کاربردهایی از تعریف حد تابع از جمله رابطه‌ی بین مشتق تابع و شیب منحنی مطرح می‌کنیم.

۲- حد تابع در فضای متری

در این قسمت از مقاله، ابتدا تعریف حد تابع را در فضای متری دلخواه و سپس تعریف حد توابع n- متغیره را در فضای متری اقلیدسی یادآوری می‌کنیم و در آخر سوالاتی را مربوط به اثبات حد تابع از روی تعریف حد بیان می‌کنیم که با تکیه بر روشی که در کتاب‌های ریاضی عمومی تحت عنوان حدس δ آورده شده احتمالا نتوان جواب داد. زیرا فراگیر احتمالا ابهام‌هایی در درک رابطه بین δ و ε دارد. ما سعی می‌کنیم این ابهام‌های ممکن را رفع کنیم تا به سوالات مذکور جواب‌های منطقی ارائه دهیم.

۲,۱ حد تابع در فضای متری دلخواه

فرض (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاهای متری، f تابعی بر E به Y و p یک نقطه‌ی حدی E باشد که در آن $E \subset X$ هرگاه نقطه‌ای مانند $q \in Y$ با خاصیت زیر موجود باشد بطوریکه:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta(\varepsilon) > ۰ \ni \quad \forall x,\ x \in E \ \ . < d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), q) < \varepsilon$$

در اینصورت می‌نویسند:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

مثال: با استفاده از تعریف حد توابع ثابت کنید:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x + ۳}{x + ۱} = ۳$$

حل: آنچه که در اکثر کتاب‌ها مشاهده می‌شود این است :

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x + ۳}{x + ۱} = ۳ \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta(\varepsilon) > ۰ \quad \ni \forall x \quad ۰ < |x - ۰| < \delta \Rightarrow |\frac{x + ۳}{x + ۱} - ۳| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x + ۳}{x + ۱} - ۳\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\frac{x + ۳ - ۳x - ۳}{x + ۱}| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\frac{-۲x}{x + ۱}| < |\frac{۲x}{x + ۱}| < \varepsilon$$

---

[۱] . Stacey
[۲] . OECD

حال یک همسایگی به مرکز صفر و به شعاع $\frac{۱}{۲}$ برای x در نظر می‌گیریم. برای اینکار فرض کنیم:

$$|x| < \frac{۱}{۲}$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$-\frac{۱}{۲} + ۱ < x + ۱ < \frac{۱}{۲} + ۱$$
$$\frac{۱}{۲} < x + ۱ < \frac{۳}{۲}$$
$$\frac{۲}{۳} < \frac{۱}{x + ۱} < ۲$$

بنابراین بیشترین مقدار برای $\frac{۱}{x+۱}$ همان عدد ۲ خواهد بود، لذا خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \left|\frac{-۲x}{x-۱}\right| < ۲|۲x| < \varepsilon$$

در اینصورت حدس می‌زنیم که کافیست برای δ داشته باشیم:

$$\delta < \min\{\tfrac{\varepsilon}{۴}, \tfrac{۱}{۲}\}$$

اکثر نویسندگان کتاب‌های ریاضی عمومی، دانشجویان، دانش‌آموزان، اساتید یا دبیران بزرگوار وقتی δ را پیدا می‌کنند ادعا می‌کنند که مسئله حل شده است و در توجیه سوالات زیر با استدلال بالا عاجزاند:

۱ - چرا $|x| < \frac{۱}{۲}$ می‌شود؟ آیا به جای $\frac{۱}{۲}$ می توانیم هر عدد دلخواه دیگری را اختیار کنیم؟

۲- چرا $\delta \le \min\{\tfrac{\varepsilon}{۴}, \tfrac{۱}{۲}\}$ ؟

۳- چرا ماکزیمم نگرفتیم و مینیم گرفتیم ؟

۴- چرا $\delta > \min\{\tfrac{\varepsilon}{۴}, \tfrac{۱}{۲}\}$ را نمی‌توان اختیار کرد؟

۵- و سوالهای دیگر.

۲,۲ حد تابع حقیقی دو متغیره در فضای متری اقلیدسی

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > ۰ \quad \exists\delta(\varepsilon) > ۰ \quad \ni \forall(x,y); \quad ۰ < \sqrt{(x - a)^۲ + (y - b)^۲} < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

مثال: اگر $f(x,y) = ۲x + ۳y$ در اینصورت ثابت کنید:

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۱)} ۲x + ۳y = ۵$$

اثبات:

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۱)} f(x,y) = ۵$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > ۰ \quad \exists\delta(\varepsilon) > ۰ \quad \ni \forall(x,y); \quad ۰ < \sqrt{(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲} < \delta$$
$$\Rightarrow |۲x + ۳y - ۵| < \varepsilon$$

حال می‌توان نوشت:

$$|۲x + ۳y - ۵| < \varepsilon$$

و

$$|۲x + ۳y - ۵| < ۲|x - ۱| + ۳|y - ۱| < \varepsilon$$

اما داریم:

$$|x-۱| < \sqrt{(x-۱)^۲+(y-۱)^۲} < \delta \Rightarrow ۲|x-۱| < ۲|\delta|$$
$$|y-۱| < \sqrt{(x-۱)^۲+(y-۱)^۲} < \delta \Rightarrow ۳|y-۱| < ۳|\delta|$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$|۲x+۳y-۵| < ۲|x-۱|+۳|y-۱| < ۵\delta$$

پس کافیست که داشته باسیم:

$$۵\delta \leq \varepsilon$$

یا اینکه

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{۵}$$

باز هم وقتی δ پیدا می‌شود ادعا می‌شود که مسئله حل شده است. متاسفانه در توجیه سوالات زیر با استدلال بالا مشکل داریم:

۱- چرا $\delta \leq \frac{\varepsilon}{۵}$؟
۲- چرا $\delta \geq \frac{\varepsilon}{۵}$ را نمی‌توان اختیار کرد؟
۳- چرا $\delta < \frac{\varepsilon}{۵}$ را نمی‌توان اختیار کرد؟
۴- و سوال‌های دیگر.

۲،۳ حد تابع n- متغیره در فضای متری اقلیدسی

اگر f یک تابع حقیقی n- متغیره تعریف شده روی زیرمجموعه D از R باشد. تابع f وقتی x به $a \in D$ میل می‌کند دارای حد L هست، یعنی

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta(\varepsilon) > ۰ \quad \ni \quad \forall x; \quad ۰ < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

برای توابع n - متغیره نیز مسائل بالا مطرح است و با استدلال‌های بالا نمی‌توان به سوالات مذکور جواب داد.

۲،٤ حد

با توجه به مطالب بخش ۲ مشاهده می‌کنیم که متاسفانه در جواب به سوالات مذکور بعضی از اساتید یا دبیران محترم ادعا می‌کنند ریاضی مجموعه‌ای از قوانین و رویه‌های معمولی است که باید قبول کرد و همین که پیدا شد دیگر مسئله حل شده است. ولی همانطور که گویا (گویا، ۱۳۷۵) و پترو و گولدینگ (پترو و گولدینگ[۱]، ۲۰۱۱) ابراز می دارند اگر معلمان باور داشته باشند که ریاضی به طور خاص، مجموعه‌ای از قوانین و رویه‌های معمولی است که باید به خاطر سپرده شود، رویکرد آن‌ها در رویارویی با مسائل ناآشنای ریاضی، محدود خواهد شد و این امر ممکن است بر تدریس و استدلال در منطق فکری آن‌ها تأثیر بگذارد. برای این منظور در این قسمت از مقاله با تمرکز بر تعریف حد تابع، نه تنها به سوالات این بخش بلکه به هر سوال احتمالی دیگری که در این خصوص به ذهن فراگیر می‌رسد در صورت امکان جواب خواهیم داد. به عنوان جمع بندی می‌توان تعریف حد تابع حقیقی f را که در همسایگی a در یک فضای متری اقلیدسی تعریف شده، به صورت زیر بیان کرد که گوییم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

[۱] Petrou & Goulding

اگر و فقط اگر به ازای هر عدد مثبت ε حداقل یک عدد مثبت δ وابسته به ε وجود دارد بطوریکه تمامی x هایی که در همسایگی محذوف به مرکز a و به شعاع δ قرار بگیرند آنگاه مقادیر همان x ها در تابع f در همسایگی به مرکز L و به شعاع ε قرار گرفته بودند. بنابراین حکم اصلی ما در اثبات حد تابع از روی تعریف یافتن δ است که اگر رابطه $|x-a|<\delta$ در زمان t برقرار باشد رابطه $|f(x)-L|<\varepsilon$ قبل از زمان t برقرار شده بود و همواره عدد ε قبل از δ انتخاب می‌شود. متاسفانه به غلط چنان تصور می‌شود که اگر رابطه $|x-a|<\delta$ برقرار شود آنگاه رابطه $|f(x)-L|<\varepsilon$ نیز برقرار خواهد بود. در صورتیکه f قبلا وجود می‌داشته است. به عبارتی اگر f وجود نداشته باشد چیزی برای مطالعه نداریم زیرا همواره x وجود دارد و نقش اصلی را f تعیین می‌کند. . حال اگر مثال زیر را به صورتیکه در زیر استدلال خواهیم کرد توجه کنیم به سوالات مطرح شده در این بخش جواب‌های منطقی و قابل درک خواهیم داد.

مثال: با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+۳}{x+۱}=۳$$

حل:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+۳}{x+۱}=۳\Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>۰\quad \exists\delta(\varepsilon)>۰\ \ni\ \forall x\ ۰<|x-۰|<\delta\ \Rightarrow\left|\frac{x+۳}{x+۱}-۳\right|<\varepsilon,$$

حکم ما یافتن δ است. حال ادعا می‌کنیم که

$$\delta\le\min\left\{\frac{\varepsilon}{۴},\frac{۱}{۲}\right\}.$$

یافتن δ را می‌توان مشابه پیدا کردن کلید یک **در** تشبیه کرد. وقتی کسی ادعا می‌کند کلید **در** این است و دلیل آن را از فردی که کلید **در** را پیدا کرده می‌پرسند فرد می‌گوید برید امتحان کنید ببینید در باز می‌شود یا نه، ولو فرد ممکن است دلیل اینکه چرا این کلید را انتخاب کردید نگوید و سری باشد یا فرد تخصص داشته یا دزد حرفه‌ای بوده یا دلایل دیگر. لذا در اینجا ثابت می‌کنیم که اگر $۰<|x-۰|<\delta$ برقرا باشد آنگاه رابطه $\left|\frac{x+۳}{x-۱}-۳\right|<\varepsilon$ حتما برقرار شده بود. حال فرض کنیم $۰<|x-۰|<\delta$ برقرار باشد بنا بر به تعریف $\min$ و رابطه‌ی $\delta\le\min\left\{\frac{\varepsilon}{۴},\frac{۱}{۲}\right\}$ هر دو رابطه $\delta\le\frac{\varepsilon}{۴}$ و $\delta\le\frac{۱}{۲}$ توام برقراراند. از $۰<|x-۰|<\delta\le\frac{۱}{۲}$ خواهیم داشت $|x-۰|=|x|\le\frac{۱}{۲}$

و در نتیجه

$$-\frac{۱}{۲}+۱<x+۱<\frac{۱}{۲}+۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<x+۱<\frac{۳}{۲}$$

پس می‌توان دریافت که:

$$\Rightarrow\left|\frac{x+۳}{x+۱}-۳\right|=\left|\frac{x+۳-۳x-۳}{x+۱}\right|=\left|\frac{-۲x}{x+۱}\right|=\left|\frac{۲x}{x+۱}\right|<\varepsilon$$

و بیشترین مقدار عبارت

$$\frac{۱}{x+۱}$$

عدد ۲ است و طبق فرض $۰<|x-۰|=|x|<\delta$ آنگاه داریم:

$$\left|\frac{x+۳}{x+۱}-۳\right|=\left|\frac{x+۳-۳x-۳}{x+۱}\right|=\left|\frac{-۲x}{x+۱}\right|=\left|\frac{۲x}{x+۱}\right|<|۲x|\times۲=۴|x|<۴.$$

حال با استدلال بالا ما می‌توانیم به سوالات مطرح شده جواب دهیم. برای پاسخ به سوالات اول بالا اگر $|x| < \frac{1}{2}$ برقرار نبود نمی‌توانستیم بیشترین مقدار $\frac{1}{x+1}$ را بدست آوریم تا قبلا برقرار بودن $\left|\frac{x+3}{x+1} - 3\right| < \varepsilon$ را تضمین کنیم. در پاسخ به سوال دوم، اگر $\delta \le \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ برقرار نبود نمی‌توانستیم از هر دو رابطه $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$ و $\delta \le \frac{1}{2}$ استفاده کنیم که هم در نشان دادن رابطه $\left|\frac{x+3}{x+1} - 3\right| < \varepsilon$ به هر دو رابطه نیاز داشتیم و هم با این کار آزادی عمل در انتخاب عدد $\frac{1}{2}$ را محدود کردیم. برای سوال سوم که چرا ماکزیمم نگرفتیم. زیرا در اینصورت فقط یکی از روابط $\delta \le \frac{\varepsilon}{4}$ یا $\delta \le \frac{1}{2}$ برقرار می‌شد در صورتیکه ما به هر دو رابطه نیاز داشتیم. در مورد سوال چهارم استدلال این هست که اگر $\delta > \min\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{2}\}$ برقرار بود نمی‌توانستیم بین δ و ε رابطه برقرار کنیم. به همین ترتیب می‌توانیم به سوالات دیگر در این خصوص را هم جواب دهیم.

۳- کاربرد تعریف حد در زندگی روزمره

حال در این قسمت از مقاله، بخشی از نگاشت سوم سند برنامه‌ی درسی ملی (۱۳۹۱ ؛ ص ۳۳) می‌آوریم «ریاضیات و کاربردهای آن بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه‌های مختلف به شمار می‌آید که دارای کاربردهای وسیع در فعالیت‌های متفاوت انسانی است. ریاضیات موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل بتوانند به طور منطقی استدلال کنند، قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند و درباره‌ی پدیده‌های پیرامونی تئوری‌های جامع بسازند. وجه مهم ریاضی توانمندسازی انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده، پیش‌بینی و کنترل وضعیت‌های ممکن مادی طبیعی، اقتصادی و اجتماعی است. بنابراین توانایی به کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره و انتزاعی، از اهداف اساسی آموزش ریاضی می‌باشد [تأکیدها در اصل است]». با اشراف به اینکه اهداف برنامه درسی حوزه ریاضی از سه شاخه اهداف دانشی، مهارتی و نگرشی تشکیل شده و توجه به نقش ریاضیات در حل مشکلات و مسائل زندگی روزمره از اهداف نگرشی است. بنابراین با استناد به این اسناد یا اسناد دیگر مانند (واسیلیو[۱]، ۲۰۱۱)، می‌توان گفت آموزشگران مرجع ریاضی باید در تدریس ریاضی، در بکارگیری ریاضی در زندگی روزمره توجه ویژه داشته باشند. زیرا آموزش ریاضی درگیر تمام مسائل مربوط به جریان یاددهی- یادگیری ریاضی است (گویا ، ۱۳۷۵). به گفته‌ی کلمنتز و الرتون (کلمنتر و الرتون[۲]، ۱۹۹۶) آموزش ریاضی عبارت است گسترش و کاربرد یک برنامه درسی ریاضی مناسب. حال در این قسمت پایانی به کاربردی از حد در زندگی روزمره اشاره می‌کنیم:

۳,۱ کاربرد

در این قسمت برای اثبات اینکه مشتق یک تابع حقیقی در یک نقطه از دامنه تعریف در صورت وجود برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط مماس بر منحنی در نقطه تماس با جهت مثبت محور x ها می‌سازد، قضیه زیر را لازم خواهیم داشت:

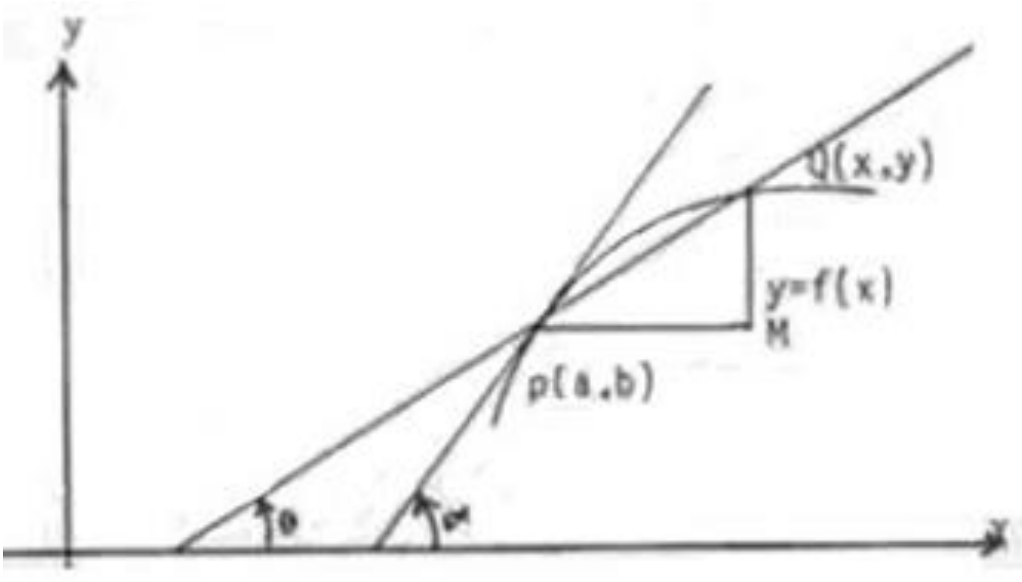
قضیه پیوستگی توابع مرکب: فرض کنیم g تابعی از R^n به R^m و f تابعی از R^m به R^k باشد و fog تعریف شده باشد. اگر g در a و f در g(a) پیوسته باشد، آنگاه fog در a پیوسته است.

در واقع قضیه با شرایط بالا بیان می‌کند که $\lim_{x\to a} fog(a) = f(\lim_{x\to a} g(x))$ به عبارت دیگر حد از تابع عبور می‌کند. حال فرض کنیم تابع f در نقطه به طول a مشتق‌پذیر است. طبق تعریف تابع مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

[۱] .Vassiliou
[۲] .Clements &Ellerton

همانطوریکه در نمودار زیر مشاهده می‌شود خط قاطع PQ با راستای افق زاویه θ می‌سازد. اگر در نمودار تابع f زیر نقطه $Q(x,,y)$ به نقطه $P(x,,y)$ نزدیک شود در نهایت این خط بر نمودار تابع P نزدیک می‌شود و داریم:



$$\alpha = \lim_{Q\to P} \theta$$

چون تانژانت یک تابع است. طبق تعریف تابع داریم:

$$\tan\alpha = \tan \lim_{Q\to P} \theta$$

طبق قضیه پیوستگی توابع مرکب پیوستگی تابع tan، تانژانت از حد عبور می‌کند و خواهیم داشت:

$$\tan\alpha = \lim_{Q\to P} \tan\theta.$$

با توجه به بخش ۲، به این نتیجه رسیدیم که وقتی x به a نزدیک شود آنگاه y به b نزدیک شده بود. لذا در اینجا نیز کافیست در میل کردن Q به P کافیست به طول نقاط تمرکز کنیم و لازم نیست

$$(x,y) \to (a,b)$$

و کافیست $x \to a$ و نیازی به نوشتن $y \to b$ و بخصوص $(x,y) \to (a,b)$ نیست و می‌نویسیم:

$$\tan\alpha = \lim_{x\to a} \tan\theta\,.$$

طبق تعریف، تانژانت یک زاویه در یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با اندازه ضلع مقابل به آن زاویه تقسیم بر اندازه ضلع مجاور و در نهایت داریم:

$$\tan\alpha = \lim_{x\to a} \tan\theta = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x)$$

۳,۲ کاربرد

اگر فردی یک کارخانه‌ای را راه‌اندازی می‌کند بایستی تابع درآمد آن را در نظر بگیرد اگر δ از ε بیشتر باشد در اینصورت شخص سود نخواهد کرد. زیرا ماشین موقعی مفید است که $\varepsilon \leq \delta$ ، یعنی انرژی کم مصرف کنیم نتجه بیشتر بگیریم.

منابع

۱. گویا، زهرا (۱۳۷۵)، «آموزش ریاضی چیست؟» *مجموعه مقالات اولین کنفرانس آموزش ریاضی ایران*، اصفهان، انتشارات آموزش و پرورش اصفهان.

٢. Clements, M. A and Ellerton, N. F. (١٩٩٦). *Mathematics Education Research: Past, present and Future*, Published by the UNESCO Principal Regional Office for Asia and the Pacific.

٣. OECD, (٢٠٠٩b). *Learning Mathematics for Life: A Perspective from PISA*. Paris: OECD Publishing.

٤. Petrou, M and Goulding, M. (٢٠١١). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching. In T.Rowland K.Ruthven (Eds.) *Mathematical Knowlwdge in Teaching*. Springer, ٩-٢٥.

٥. Stacey, K. (٢٠٠٥). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents, *Journal of Mathematical Behavior*, ٢٤, ٣٤١-٣٥٠.

٦. Vassiliou, A. (٢٠١١). *Mathematics in Education in Europe: Common Challenges and National*, Website: http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice Policies.