Quarterly Research Journal of Technical and Vocational University

Winter 2021, Vol. 17, No. 4, p. 35-43

Original Research

Investigating the metric dimension of an intersection graph in a commutative ring

Reza Nikandish[1*]

[1]Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 01.28.2020
Revised: 01.18.2021
Accepted: 01.18.2021

Keyword:
Metric dimension
Resolving set
Metric basis Intersection graph
Ideal
Commutative ring

***Corresponding Author:**
Reza Nikandish
Email: *r.nikandish@ipm.ir*

ABSTRACT

Suppose R is a uniform commutative ring. The R-dependent intersection graph, represented by the symbol G (R), is a simple, directionless graph whose set of vertices is the set of all non-trivial ideals of R and two distinct vertices I, J are joined if and only if $I \cap J \neq (0)$. In this paper, the metric dimension of intersection graphs associated with commutative rings is examined and some metric dimension formulas for intersection graphs are provided.

فصلنامه علمی-پژوهشی کارافن

زمستان ۱۳۹۹، دوره ۱۷، شماره ٤، ٤۳-۳۵

وزارت علوم تحقیقات و فناوری
دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقاله پژوهشی

بررسی بعد متریکی گراف اشتراک در یک حلقه جابه‌جایی

رضا نیک‌اندیش*[۱]

۱- استادیار، دپارتمان ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران.

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۰۸
بازنگری مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹
پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹

کلید واژگان:
بعد متریکی
مجموعه تجزیه
پایه متریک
گراف اشتراک
ایده‌آل
حلقه جابه‌جایی

***نویسنده مسئول:** رضا نیک‌اندیش
پست الکترونیکی:
r.nikandish@ipm.ir

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد. گراف اشتراک وابسته به حلقه R که با نماد $G(R)$نمایش می‌دهیم، گرافی ساده و بدون جهت است که مجموعه رئوس آن تمام ایده‌آل‌های نابدیهی حلقه R است و دو رأس مجزای I و J با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر $I \cap J \neq (0)$. در این مقاله بعد متریکی گراف‌های اشتراک وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم و فرمول‌هایی برای بعد متریکی گراف‌های اشتراک ارائه می‌شود.

مقدمه

در سال‌های اخیر، مطالعه گراف‌های وابسته به حلقه‌ها، به یکی از مسائل جذاب در ترکیبیات جبری تبدیل شده است. بررسی خاصیت‌های گرافی، منجر به پیدایش خواص حلقه‌ها می‌شود. برای مثال می‌توان منابع [۱] ، [۲]، [۳] و [۴] را نام برد. یکی از مسائلی که در این راستا بررسی می‌شود همان بعد متریکی گراف‌های وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی است. این مفهوم، اولین‌بار در [۵] تعریف شده است. در [۶] بعد متریکی یکی از گراف‌های وابسته به حلقه‌ها محاسبه و بررسی شده است. در این مقاله، بعد متریکی گراف اشتراک وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی را مطالعه می‌کنیم.

در این مقاله، تمام حلقه‌ها جابه‌جایی و یک‌دار فرض می‌شوند و با R نمایش داده می‌شوند. حلقه R را کاهشی گویند هرگاه صفر آن تنها عنصر پوچ توان آن باشد در غیر این صورت آن را غیرکاهشی گویند. همچنین $Max(R)$ نشان‌دهنده مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال R است. برای آشنایی تعاریف بیشتر در باره حلقه‌ها خواننده می‌تواند به [۷] مراجعه کند.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد که در آن $\mathrm{V}=\mathrm{V(G)}$ مجموعه رئوس و $\mathrm{E}=\mathrm{E(G)}$ مجموعه یال‌ها است. یک گراف را هم‌بند گویند هرگاه بین هر دو رأس آن مسیر وجود داشته باشد. فرض کنید G یک گراف و $yx,$ دو رأس متمایز از آن باشد. در این صورت کوتاه‌ترین مسیری که بین x و y وجود دارد را فاصله این دو رأس گویند و با $d(x,y)$ نمایش می‌دهند. همچنین قطر گراف G را که با $diam(G)$ نمایش می‌دهند برابر است با

$$diam(G)=\sup\{\mathrm{d(u,v)} \mid \mathrm{u,v} \in \mathrm{V(G)}\}.$$

فرض کنید G یک گراف باشد. مجموعه مرتب $S=\{V_1,V_2,\dots,V_k\}\subseteq V(G)$ را در نظر می‌گیریم. برای هر رأس $v\in V(G)\backslash S$ بردار $D(v|S)=(d(v,v_1),\dots,d(v,v_k))$ را متناظر می‌کنیم. مجموعه S را یک مجموعه تجزیه برای G گویند هرگاه هر رأس $V(G)\backslash S$ دارای بردار متناظر متمایز باشد. به عبارت دیگر اگر $\mathrm{u,v}\in V(G)\backslash S$ به‌طوری که داشته باشیم $\mathrm{D(u|S)=D(v|S)}$، نتیجه شود که $u=v$. مجموعه تجزیه S از گراف G را که در بین تمام مجموعه‌های تجزیه G دارای کمترین تعداد عناصر باشد، را یک پایه متریک برای G نامند و تعداد عناصر این پایه را بعد متریکی گراف G گویند و با $dim_M(G)$ نمایش می‌دهند. برای نمادها و تعاریف بیشتر خواننده می‌تواند به [۵] و [۸] مراجعه کند.

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد. گراف اشتراک وابسته به حلقه R که با نماد $G(R)$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رئوس آن تمام ایده‌آل‌های نابدیهی حلقه R است و دو رأس I و J با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر $\mathrm{I}\cap \mathrm{J}\neq (0)$. این گراف اولین‌بار در [۹] تعریف و به حلقه‌های جابه‌جایی وابسته شده است. در این مقاله بعد متریکی گراف‌های اشتراک وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم و فرمول‌هایی برای به‌دست آوردن بعد متریکی این گراف ارائه می‌دهیم.

بعد متریکی گراف در حلقه‌های کاهشی

در این بخش، بعد متریکی گراف اشتراک را در حلقه‌های کاهشی به‌دست می‌آوریم. ابتدا نشان می‌دهیم که بعد متریکی گراف اشتراک متناهی است اگر و تنها اگر R تعداد متناهی ایده‌آل داشته باشد.

لم ۲-۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت گراف $\mathrm{G(R)}$ هم‌بند است مگر آنکه R بصورت حاصل ضرب دو میدان باشد. علاوه بر این، در صورت هم‌بندی گراف، $\mathrm{diam(G(R))}\in\{0,1,2\}$.

اثبات: فرض کنید R به‌صورت حاصل ضرب دو میدان نباشد. فرض کنید I و J دو رأس متمایز از گراف $\mathrm{G(R)}$ باشند به‌طوری که I و J مجاور نباشند. اگر $\mathrm{I}+\mathrm{J}\neq \mathrm{R}$، آنگاه مسیر $\mathrm{I}-\mathrm{I}+\mathrm{J}-\mathrm{J}$ نشان می‌دهد که $d(\mathrm{I},\mathrm{J})=2$. اگر $\mathrm{I}+\mathrm{J}=\mathrm{R}$، آن‌گاه با توجه به اینکه $\mathrm{I}\cap \mathrm{J}=(0)$، نتیجه می‌شود که $\mathrm{R}=\mathrm{I}\oplus \mathrm{J}$. چون R به‌صورت حاصل ضرب دو

میدان نیست، می‌توان ایده‌آل $K = I \oplus J^{'}$ را طوری انتخاب کرد که $(0) \neq J^{'} \subset J$. حال به‌راحتی می‌توان دید که $I - K - J$ یک مسیر به طول ۲ از I به J می‌باشد.

قضیه ۲-۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت $\dim_M(G(R)) < \infty$ اگر و تنها اگر R تعداد متناهی ایده‌آل داشته باشد.

اثبات: یک طرف حکم بدیهی است؛ زیرا اگر R تعداد متناهی ایده‌آل داشته باشد، آن‌گاه به‌طور بدیهی بعد متریکی آن متناهی است.

برعکس، فرض کنید که بعد متریکی گراف $G(R)$ متناهی باشد، نشان می‌دهیم که R تعداد متناهی ایده‌آل دارد. چون بعد متریکی گراف $G(R)$ متناهی است، فرض کنید که $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ یک پایه متریک برای $G(R)$ باشد که در آن k یک عدد صحیح و مثبت است. چون $\mathrm{diam}(G(R)) \in \{0,1,2\}$، نتیجه می‌شود که هر مؤلفه بردار $D(I|S)$ فقط ۳ حالت ممکن را دارد و لذا تعداد بردارها حداکثر $3^k - k$ تا می‌تواند باشد. از طرف دیگر چون هر ایده‌آل باید یک بردار متمایز تولید کند؛ لذا نتیجه می‌شود که تعداد ایده‌آل‌های حلقه باید متناهی باشد.

قضیه ۲-۳. فرض کنید R یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت اگر $\dim_M(G(R)) < \infty$ آن‌گاه:

(۱) اگر $|\mathrm{Max}(R)|=2$، آنگاه $\dim_M(G(R) = 1$

(۲) اگر $|\mathrm{Max}(R)|=3$، آنگاه $\dim_M(G(R) = 2$

(۳) اگر $|\mathrm{Max}(R)| \geq 4$ آنگاه $\dim_M(G(R)) = |\mathrm{Max}(R)|$.

اثبات: ۱- چون $\dim_M(G(R)) < \infty$، از قضیه ۲-۲ نتیجه می‌شود که R تعداد متناهی ایده‌آل دارد. پس R یک حلقه آرتینی است و چون کاهشی و $|\mathrm{Max}(R)|=2$، نتیجه می‌شود که R بصورت حاصل ضرب دو میدان می‌باشد. حال به‌سادگی دیده می‌شود که $G(R) = \overline{K}_2$. لذا $\dim_M(G(R) = 1$.

۲- مشابه با اثبات ۱ و با توجه به اینکه $|\mathrm{Max}(R)|=3$، نتیجه می‌شود که $R \cong F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ که در آن F_1, F_2, F_3 میدان هستند. بنابراین:

$$V(G(R)) = \{0 \oplus F_2 \oplus F_3, F_1 \oplus 0 \oplus F_3, F_1 \oplus F_2 \oplus 0, F_1 \oplus 0 \oplus 0, 0 \oplus F_2 \oplus 0, 0 \oplus 0 \oplus F_3\}.$$

حال قرار می‌دهیم:

$$S = \{F_1 \oplus 0 \oplus 0, 0 \oplus 0 \oplus F_3\}$$

با محاسبه بردارهای متناظر برای سایر رئوس نشان می‌دهیم که S یک پایه متریک برای $G(R)$ می‌باشد. لذا داریم:

$$D(0 \oplus F_2 \oplus F_3|S) = (2,1)$$
$$D(F_1 \oplus 0 \oplus F_3|S) = (1,1)$$
$$D(F_1 \oplus F_2 \oplus 0|S) = (1,2)$$
$$D(0 \oplus F_2 \oplus 0|S) = (2,2).$$

دیده می‌شود که S یک پایه متریک برای $G(R)$ است و لذا $\dim_M(G(R) = |S| = 2$.

۳- چون $\dim_M(G(R)) < \infty$، از قضیه ۲-۲ نتیجه می‌شود که R تعداد متناهی ایده‌آل دارد. پس R یک حلقه آرتینی است. لذا $|\mathrm{Max}(R)|$ متناهی بوده و R به‌صورت حاصل ضرب n تا میدان نوشته می‌شود. پس $R \cong F_1 \oplus$

$\oplus F_n$ ... که در آن $|\mathrm{Max}(R)|=n$. حال نشان می‌دهیم که $\dim_M(G(R)) = n$. لذا دو ادعای زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

ادعای ۱: $\dim_M(G(R)) \geq n$.

چون $\dim_M(G(R))$ متناهی است، فرض کنید که $W = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ یک پایه متریک برای گراف $G(R)$ باشد که در آن k یک عدد صحیح و مثبت است. چون $\mathrm{diam}(G(R)) \in \{1,2\}$، نتیجه می‌شود که برای هر $I \in V(G(R))\backslash W$ فقط 2^k حالت ممکن برای بردار $D(I|W)$ وجود دارد. پس باید داشته باشیم، $|V(G(R))\backslash W| \leq 2^k$. از طرف دیگر چون $|V(G(R))\backslash W| = 2^n - k - 2$، نتیجه می‌شود که

$2^n \leq 2^k + k + 2$. چون $n \geq 4$، بوضوح دیده می‌شود که $k = \dim_M(G(R)) \geq n$. بنابراین ادعای ۱ اثبات می‌شود.

ادعای ۲: $\dim_M(G(R)) \leq n$.

فرض کنید I_i ایده‌آلی از R باشد بطوری که مولفه i ام آن برابر F_i و بقیه مولفه‌های آن صفر باشند. قرار می‌دهیم:
$W = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$

نشان می‌دهیم که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد؛ از این رو فرض کنید که $I, J \in V(G(R))\backslash W$ دو رأس متمایز از گراف باشند. نشان می‌دهیم که $D(I|W) \neq D(J|W)$. اما این واضح است. چون باتوجه به اینکه $I \neq J$ نتیجه می‌شود که بعضی مولفه‌های I مخالف مؤلفه‌های J است. لذا بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که مولفه اول I برابر با F_1 و مولفه اول J برابر با صفر باشد. بنابراین مؤلفه اول بردار $D(I|W)$ برابر با ۱ و مولفه اول بردار $D(J|W)$ برابر با ۲ است. این نشان می‌دهد که $D(I|W) \neq D(J|W)$ و لذا W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد. پس

$$k = \dim_M(G(R)) \leq |W| = n$$

حال از ادعاهای ۱و ۲ نتیجه می‌شود که برای $n \geq 4$، $\dim_M(G(R)) = |\mathrm{Max}(R)|$.

بعد متریکی گراف اشتراک در حلقه‌های غیرکاهشی

در این بخش، بعد متریکی گراف $\boldsymbol{G(R)}$ را به‌دست می‌آوریم که در آن، $\boldsymbol{R}$ یک حلقه غیرکاهشی است. برای این کار اول به نکته زیر نیاز داریم:

نکته۳ -۱. فرض کنید G یک گراف هم‌بند باشد. فرض کنید

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

یک بخش‌بندی برای رئوس G باشد، به‌طوری که برای هر $1 \leq i \leq k$ اگر $x, y \in v_i$، آنگاه داشته باشیم $N(x) = N(y)$. در این صورت:

$$\dim_M(G(R)) \geq |V(G)| - k.$$

قضیه۳-۱. فرض کنید $R \cong R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، (R_i, m_i) یک حلقه موضعی و آرتینی غیر میدان می‌باشد. فرض کنید $n_i \geq 3$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد؛ به‌طوری که $m_i^{n_i} = (0)$. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، m_i یک ایده‌آل اصلی باشد، آن‌گاه:

$$dim_M(G(R)) = \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^n - 1.$$

اثبات: فرض کنید $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ و $J = J_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus J_n$ دو رأس از $V(G(R))$ باشند. گوییم I و J هم ارز هستند و می‌نویسیم $I \sim J$، اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم

$I_i = (0)$ اگر و تنها اگر $J_i = (0)$.به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $V(G(R))$ می‌باشد. فرض کنید $[I]$ نشان‌دهنده کلاس هم‌ارزی I باشد. فرض کنید $X, Y \in [I]$. حال چون برای هر ایده‌آلی مانند K، $K \cap X \neq (0)$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $K \cap Y \neq (0)$. نتیجه می‌شود که $N(X) = N(Y)$. چون تعداد کلاس‌های هم ارزی برابر با $2^n - 1$ تا است، لذا از نکته ۳-۱ نتیجه می‌شود که $dim_M(G(R)) \geq \left|V\left(G(R)\right)\right| - (2^n - 1) = \left|V\left(G(R)\right)\right| - 2^n + 1$.

از طرف دیگر چون

$$\left|V\left(G(R)\right)\right| = \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$dim_M(G(R)) \geq \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^n - 1$$

حال نشان می‌دهیم که

$$dim_M(G(R)) \leq \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^n - 1$$

برای این کار مجموعه‌های

$$A = \left\{I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n \in V\left(G(R)\right) \middle| I_i \in \{(0), R_i\}\right\} \cup \{J(R)\}$$

و $W = V(G(R) \backslash A$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد. فرض کنید:

$I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$ و $J = J_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus J_n$ دو رأس متمایز از A باشند. نشان می‌دهیم که

$$D(I|W) \neq D(J|W)$$

اگر $I = J(R)$ باشد، آنگاه چون هیچ‌یک از مؤلفه‌های I صفر نمی‌باشد اما بعضی از مؤلفه‌های J برابر با صفر است لذا نتیجه می‌شود که $D(\mathrm{I}|W) \neq D(J|W)$.

حال فرض کنید که هیچ کدام از I, J برابر $J(R)$ نباشد. چون مؤلفه‌های این دو رأس فقط از (0) و R_i تشکیل شده است، لذا بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $I_1 = (0)$ و $J_1 = R_1$. حال باتوجه به اینکه R_1 یک میدان نیست، می‌توان ایده‌آل نابدیهی K_1 از R_1 را انتخاب کرد.

قرار می‌دهیم $K = K_1 \oplus (0) \oplus \cdots \oplus (0)$. به‌راحتی دیده می‌شود که K با J مجاور اما با I مجاور نمی‌باشد. با توجه به اینکه $K \in W$، نتیجه می‌گیریم که:

$$\mathrm{D(I|W)} = (2, -, \cdots, -) \neq (1, -, \cdots, -) = \mathrm{D(J|W)}$$

این نشان می‌دهد که W یک مجموعه تجزیه برای G(R) می‌باشد؛ لذا

$$dim_M(G(R)) \leq |W|$$

از طرف دیگر چون $|W| = \left|V\left(G(R)\right) - A\right|$ و $|\mathrm{A}| = 2^n - 1$؛ بنابراین:

$$dim_M(G(R)) \leq \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - (2^n - 1) = \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^n - 1$$

قضیه ۳-۲: فرض کنید $R \cong R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$ که در آن برای هر $1 \le i \le n$، (R_i, m_i) یک حلقه موضعی آرتینی و برای هر $1 \le i \le m$، F_i یک میدان می‌باشد. فرض کنید $n_i \ge 3$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد؛ به‌طوری که $m_i^{n_i} = (0)$. اگر برای هر $1 \le i \le n$، m_i یک ایده‌آل اصلی باشد، آن‌گاه:

$$\mathrm{dim_M(G(R)) = 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^{n+m} + m - 1}$$

اثبات:

فرض کنید $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \cdots \oplus I_{n+m}$ و $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_n \oplus J_{n+1} \oplus \cdots \oplus J_{n+m}$ دو رأس از $V(G(R))$ باشند. گوییم I و J هم‌ارز هستند و می‌نویسیم $I \sim J$، اگر برای هر $1 \le i \le n$، داشته باشیم $I_i = (0)$ اگر و تنها اگر $J_i = (0)$. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی $V(G(R))$ می‌باشد. فرض کنید $[I]$ نشان‌دهنده کلاس هم‌ارزی I باشد. فرض کنید $X, Y \in [I]$. حال چون برای هر ایده‌آلی مانند K، $K \cap X \neq (0)$ اگر و تنها اگر $K \cap Y \neq (0)$، نتیجه می‌شود که $N(X) = N(Y)$. چون تعداد کلاس‌های هم‌ارزی برابر با $2^{n+m} - 1$ تا است؛ لذا از نکته ۳-۱ نتیجه می‌شود که

$$dim_M(G(R)) \ge \left|V\big(G(R)\big)\right| - (2^{n+m} - 1)J = \left|V\big(G(R)\big)\right| - 2^{n+m} + 1$$

از طرف دیگر چون

$$\left|V\big(G(R)\big)\right| = 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$dim_M(G(R)) \ge 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^{n+m} - 1$$

در واقع اگر فرض کنیم W یک پایه متریک برای G(R) باشد، آن‌گاه ایده‌آل‌هایی که حداقل در یکی از مؤلفه‌های آنها ایده‌آل پوچتوان غیر صفر دارد به W تعلق دارد؛ زیرا کلاس‌های هم‌ارزی این عناصر بیشتر از یک عنصر دارند. پس می‌توان فرض کرد که حداکثر عناصری که بیرون از W می‌توانند قرار بگیرند عناصر مجموعه A است.

$$A = \left\{I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \cdots \oplus I_{n+m} \in V\big(G(R)\big) \middle| I_i \in \{(0), R_i, F_i\}\right\} \cup$$
$$\{m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n \oplus F_{n+1} \oplus \cdots \oplus F_{n+m}\}$$

حال مجموعه $B \subset A$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\mathrm{B} = \left\{\mathrm{I = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n \oplus I_{n+1} \oplus \cdots \oplus I_{n+m} \in V(G(R))} \,\middle|\, \mathrm{I_i \in \{(0), F_i\}}\right\}$$

فرض کنید که I, J دو عنصر از B باشند. اگر واقعاً $W = V(G(R)) \setminus A$. آن‌گاه به‌راحتی دیده می‌شود که

$$\mathrm{D(I|W) = (1,1,\cdots,1) = D(J|W)}$$

که یک تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که برای پوشش دادن عناصر B یک رده از عناصر باید به W اضافه شود. فرض کنید E_{n+i} ایده‌آلی باشد که مؤلفه $n+i$ ام آن F_i و بقیه مؤلفه‌های آن صفر باشد. به کمک برهان قضیه ۳-۲ و با توجه به اینکه $|B| = 2^m - 1$، نتیجه می‌شود که حداقل عناصر برای پوشش دادن عناصر B، عناصر C می‌باشد.

$$C = \{E_{n+1}, \cdots, E_{n+m}\}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$dim_M(G(R)) \ge 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^{n+m} - 1 + |C| =$$

$2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i+1)-2^{n+m}-1+m$

حال نشان می‌دهیم که

$dim_M(G(R)) \leq 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i+1)-2^{n+m}-1+m$

مجموعه‌های

$A=\{I=I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \cdots \oplus I_{n+m} \in V\big(G(R)\big) \big| I_i \in \{(0), R_i, F_i\}\} \cup$
$\{m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n \oplus F_{n+1} \oplus \cdots \oplus F_{n+m}\}$
$C=\{E_{n+1}, \cdots, E_{n+m}\}$

را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $W=V\big(G(R)\big)\backslash\{A\backslash C\}$. نشان می‌دهیم که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد.

فرض کنید $I=I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \cdots \oplus I_{n+m}$ و $J=J_1 \oplus J_2 \oplus \cdots \oplus J_n \oplus J_{n+1} \oplus \cdots \oplus J_{n+m}$ دو رأس متمایز از $A\backslash C$ باشند. نشان می‌دهیم که

$D(I|W) \neq D(J|W)$

اگر $I=m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n \oplus F_{n+1} \oplus \cdots \oplus F_{n+m}$ باشد، آن‌گاه چون هیچ‌یک از مؤلفه‌های I صفر نمی‌باشد اما بعضی از مؤلفه‌های J برابر با صفر است؛ لذا نتیجه می‌شود که

$D(I|W) \neq D(J|W)$

حال فرض کنید که هیچ‌کدام از I, J برابر با $m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_n \oplus F_{n+1} \oplus \cdots \oplus F_{n+m}$ نباشد. چون مؤلفه‌های این دو رأس فقط از (0) و R_i تشکیل شده است؛ لذا اگر برای بعضی از $1 \leq i \leq n$، $I_i=(0)$ و $J_i \neq (0)$ باشد، آن‌گاه بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $I_1=(0)$ و $J_1=R_1$. حال باتوجه به اینکه R_1 یک میدان نیست، می‌توان ایده‌آل نابدیهی K_1 از R_1 را انتخاب کرد. قرار می‌دهیم $\mathrm{K}=K_1 \oplus (0) \oplus \cdots \oplus (0)$. به راحتی دیده می‌شود که K با J مجاور اما با I مجاور نمی‌باشد. با توجه به اینکه $K \in W$، نتیجه می‌گیریم که

$D(I|W)=(2,-,\cdots,-) \neq (1,-,\cdots,-)=D(J|W)$.

اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، $I_i=(0)$ اگر و تنها اگر $J_i=(0)$، آن‌گاه به‌راحتی می‌توان $K \in C$ را طوری پیدا کرد که با J مجاور اما با I مجاور نمی‌باشد. با توجه به اینکه $K \in W$، نتیجه می‌گیریم که

$D(I|W) \neq D(J|W)$

این نشان می‌دهد که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد. لذا

$dim_M(G(R)) \leq |W|$

از طرف دیگر چون $|W|=\big|V\big(G(R)\big)\big|-|A|-|C|$ و $|A|=2^{n+m}-1$. لذا داریم

$dim_M(G(R)) \leq 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i+1)-2-(2^{n+m}-1)+m$

و لذا

$dim_M(G(R)) \leq 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i+1)-2^{n+m}-1+m$

پس نتیجه می‌شود که

$$dim_M(G(R)) = 2^m \Pi_{i=1}^{n}(n_i + 1) - 2^{n+m} + m - 1$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله، بعد متریکی گراف اشتراک بررسی و مطالعه شده است. نشان داده شده است که بعد متریکی این گراف، متناهی است اگر و تنها اگر حلقه R تعداد متناهی ایده‌آل داشته باشد. چون هر حلقه‌ای که تعداد متناهی ایده‌آل دارد، یک حلقه آرتینی است؛ لذا بعد متریکی این حلقه در صورت متناهی بودن فقط در حلقه‌های آرتینی بحث شده است؛ از این رو در چندین رده از حلقه‌های آرتینی بعد متریکی گراف $\boldsymbol{G(R)}$ به‌دست آمده است.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم که با ارائه پیشنهادهای ارزشمند خود موجب ارتقای سطح کیفی مقاله شدند بسیار سپاسگزاریم.

Reference

1. Nikandish, R. Nikmehr, M. J. and Bakhtyiari, M. (2016).Coloring of the the annihilator graph of a commutative ring. J. Algebra Appl. 15 1650124 (13 pages).
2. Nikmehr, M. J. Nikandish, R. and Bakhtyiari, M. (2017).More on the annihilator graph of a commutative ring, Hokkaido Math. J. 46. 107-118.
3. Pirzada, S. Raja, R. andRedmond, S. P. (2014).Locating sets and numbers of graphs associated to commutative rings, J. Algebra Appl. 13. 1450047 (18pages).
4. Pirzada, S.and Raja, R. (2017). On the metric domension of a zero-divisor graph, Comm. Algebra 45. 1399--1408.
5. Harary, F and Melter, A. (1976).On the metric dimension of a graphG.Ars Combin. 2, 191-195.
6. Pirzada, S. Raja, R and Redmond, S.P. (2014). Locating sets and numbers of graphs associatsd to commutative rings. J. Algebra Appl. 13(7) 140047 18 pp.
7. Sharp, R. Y(2000). (2001) M. Steps in Commutative Algebra. 2nd ed, London Mathematical Society Student Texts 51, Cambridge University Press, Cambridge.
8. West, D. B. (2001) M. "Introduction to graph theory", Phys. 2nd ed. USA. Prentice Hall.
9. Chakrabarty, S. Ghosh, T. K and Mukherjee, M, K. Sen. (2009) . Intersection graphs of ideals of rings. Discrete Math, 309, 5381-5392.