



Numerical Investigation of a MHD Natural Convection Heat Transfer Flow in a Square Enclosure with Two Heaters on the Bottom Wall

Nematollah Askari

Lecturer, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Emam Khomeini, Behshahr Branch, Technical and Vocational University (TVU), Mazandaran, Iran

Mohammad Hasan Taheri

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Emam Khomeini, Behshahr Branch, Technical and Vocational University (TVU), Mazandaran, Iran

Received: 02.01.2020

Accepted: 07.05.2020

In the present study, the thermal behavior of fluid in a square enclosure with two semi-circular constantis investigated numerically. The governing equations are solved by FlexPDE software, which is a simulation software base on the finite element method. The results showed that the distance between the two heaters will be a parameter affecting heat transfer; By reducing this distance, the natural convection heat transfer that is limited to the central part of the channel, is in the form of a symmetrical vertical column. Increasing the Hartmann number will lead to an increase in Lorentz force, a decrease in buoyancy force and consequently a decrease in temperature, a symmetrical temperature distribution and a predominance of conductive heat transfer. Increasing the Riley number increases the natural convection heat transfer in the form of free displacement, and by increasing the Riley number, the free-moving heat transfer will completely dominate the chamber.

Keywords:

Heat Transfer, Natural Convection, Enclosure, MHD.

نوع مقاله: پژوهشی (کاربردی)

بررسی عددی انتقال حرارت جریان جابه‌جایی طبیعی هیدرومغناطیس در محفظه بسته مربعی با هیترهایی در دیواره پایینی

نعمت‌اله عسکری*

مربی، دپارتمان مهندسی مکانیک، دانشکده امام خمینی (ره)، واحد بهشهر، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، مازندران، ایران

محمدحسن طاهری

دپارتمان مهندسی مکانیک، دانشکده امام خمینی (ره)، دانشگاه فنی و حرفه‌ای مازندران، ایران

دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۱۲ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۱۵

چکیده

در این تحقیق، رفتار گرمایی سیال در یک محفظه بسته مربعی که دو هیتر دما ثابت نیمه‌مردور در دیواره پایینی آن قرار دارند، به صورت عددی بررسی شده است. معادله‌های حاکم با استفاده از نرم‌افزار فلکس پی‌دی‌ای (FlexPDE) که نوعی شبیه‌سازی جریان بر پایه روش عددی المان محدود است، شبیه‌سازی و حل شده است. نتایج نشان داد فاصله بین دو هیتر، پارامتر تأثیرگذاری بر انتقال حرارت خواهد بود؛ به‌طوری‌که با کاهش این فاصله، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد محدود به بخش مرکزی کانال به شکل یک ستون عمودی متقارن خواهد بود. در دیواره‌ها نیز انتقال حرارت هدایتی غالب خواهد بود. افزایش عدد هارتمن منجر به افزایش نیروی لورنتس، کاهش نیروی شناوری و در نتیجه کاهش دما، توزیع دمای متقارن و غالب شدن انتقال حرارت هدایتی خواهد شد. افزایش عدد رایلی موجب افزایش انتقال حرارت به شکل جابه‌جایی آزاد می‌شود و با افزایش عدد رایلی، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد به‌طور کامل بر محفظه حاکم خواهد شد.

واژگان کلیدی:

انتقال حرارت، جابه‌جایی طبیعی، محفظه بسته، هیدرومغناطیس.

* نویسنده مسئول: askari.nemat@yahoo.com

۱. مقدمه

بررسی پدیده‌های طبیعی مانند جریان سیال، انتقال گرما و الکترومغناطیس همواره مورد توجه محققان بوده است [۱-۳]. در علوم مختلف جابه‌جایی طبیعی یکی از حالت‌های اصلی در انتقال گرماست. بر اساس رفتار و هندسه جریان، جابه‌جایی طبیعی می‌تواند از نوع داخلی یا خارجی باشد. طی جریان داخلی، سیال به وسیله مرزهای جامد احاطه می‌شود، درحالی‌که شی جامد، به وسیله سیال و طی جریان خارجی احاطه و پوشیده می‌شود. جریان در داخل لوله‌ها یا کانال‌ها مثال‌های مرسوم برای جریان‌های داخلی هستند. جریان روی صفحه مسطح، سیلندرها و کره‌ها نیز مثال‌هایی برای جریان خارجی هستند.

جریان‌های جابه‌جایی طبیعی به دلیل کوپل میدان جریان هیدرودینامیکی و گرمایی سیال از پیچیدگی برخوردارند. مسائل جریان داخلی پیچیدگی بیشتری نسبت به جریان‌های خارجی دارند. جریان‌های خارجی را می‌توان با استفاده از نظریه لایه مرزی مدل‌سازی کرد و این‌گونه انگاشت که ناحیه خارج از لایه مرزی، تحت تأثیر مرز جامد قرار نمی‌گیرد [۴]. در مقابل، برای جابه‌جایی داخلی، اثر متقابل بین لایه مرزی و هسته مرکزی سبب ایجاد پیچیدگی در مسئله خواهد شد. بر اساس شرایط مرزی گرمایی به‌کاررفته، سیستم‌های جابه‌جایی داخلی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

۱. محفظه‌های بسته که از دیواره‌های جانبی گرما می‌گیرند (گرادیان دما عمود بر جهت گرانش است)؛

۲. محفظه‌های بسته که از دیواره‌های پایینی گرما می‌گیرند (گرادیان دما موازی با جهت گرانش است) [۴]. جابه‌جایی طبیعی در یک محفظه بسته گرمای متفاوت، نمونه‌ای برای نوع (الف) است و جابه‌جایی رایلی - برنارد بین دو صفحه افقی بی‌نهایت نمونه‌ای برای نوع (ب) است.

علاوه‌براین، شرایط مرزی دمایی دیگری نیز باید در ترکیب با هر دو نوع در بخش‌های مختلف دیواره‌ها قرار بگیرد. انواع مختلفی از الگوهای گرمایی جابه‌جایی طبیعی را می‌توان در بسیاری از کاربردهای مهندسی نام برد از جمله تجهیزات الکتریکی سرمایش [۵]، سیستم‌های روغن‌کاری [۶]، مبدل‌های گرمایی [۷]، کلکتورهای انرژی خورشیدی [۸]، اجاق‌های برقی [۹]، سیستم‌های نم‌زدایی خورشیدی [۱۰] و فرایندهای ذوب و جامدسازی [۱۱ و ۱۲] اشاره کرد.

از جمله موضوعات مورد توجه در فناوری نوین که در مکانیک سیالات اهمیت بسیار دارد، مسئله مگنتوهیدرودینامیک (MHD) است که برهم‌کنش سیال و میدان مغناطیسی را توصیف می‌کند. مطالعه

جریان مگنتوهیدرودینامیک در بسیاری از فرایندهای صنعتی برای کنترل نرخ سرمایش استفاده می‌شود. همچنین در رآکتورهای اتمی با دیواره‌های خنک‌کن [۱۳]، ترمزهای هیدرومغناطیسی [۱۴]، پمپ‌ها [۱۶-۱۵] و کاربردهای بیولوژیکی و شبیه‌سازی جریان خون [۱۷-۱۹] جریان مگنتوهیدرودینامیک قابل مشاهده است.

در دو دهه اخیر، انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در محفظه‌ای بسته مربعی و مستطیلی در بسیاری از پژوهش‌ها بررسی شده است. در بیشتر این پژوهش‌ها تمرکز بر اثر شرایط مرزی، نسبت اندازه و انتقال حرارت متوسط جابه‌جایی طبیعی بوده است. کوپل بین میدان‌های هیدرودینامیکی و گرمایی در یک هندسه پیچیده از طریق نیروی شناوری، موجب سخت‌شدن مدل‌سازی ریاضی می‌شود؛ در نتیجه پژوهشگران مطالعات قابل توجهی بر جابه‌جایی طبیعی در محفظه‌های بسته غیرمستطیلی با دیواره‌های شیب‌دار، منحنی و موج‌دار انجام داده‌اند.

اثر نسبت اندازه بر الگوی جریان و انتقال انرژی در محفظه‌های بسته مستطیلی با دیواره دما ثابت داغ و سقف خنک‌شده با استفاده از فرمول‌های تابع جریان و سرعت توسط آیدین و همکاران [۲۰] گزارش داده شده است. در ادامه، ساریس و همکاران [۲۱] به صورت عددی، جابه‌جایی طبیعی در محفظه بسته مستطیلی با پروفیل دمای سینوسی بر دیواره بالایی و شرایط آدیاباتیک بر دیواره‌های پایینی و کناری را بررسی کرده‌اند. آن‌ها گزارش داده‌اند شدت چرخش سیال و عمق نفوذ دمایی با افزایش نسبت اندازه، افزایش می‌یابد.

باساک و همکاران [۲۲] اثر شرایط مرزی دمایی بر جریان جابه‌جایی طبیعی در حفره مربعی را با استفاده از روش عددی المان محدود بررسی کرده‌اند. آن‌ها گزارش داده‌اند نرخ‌های کلی انتقال حرارت برای حالت گرمای غیریکنواخت در مقایسه با حالت گرمای یکنواخت، کمتر است. وارول و همکاران [۲۳] پدیده جابه‌جایی آزاد در محفظه بسته مربعی شکل را که در گوشه آن هیتر قرار دارد، به صورت عددی بررسی کرده‌اند. آن‌ها از روش تفاضل محدود برای حل معادله‌های مونتم و انرژی استفاده کردند. محدوده عدد رایلی بین 10^3 تا 10^6 انتخاب شده است. اثر عدد رایلی، پراکتل و زاویه انحراف محفظه بسته نیز بررسی شده‌اند.

اثر تشعشع سطح بر جابه‌جایی محفظه بسته در حضور هیترهای مجزا توسط ساراولان و همکاران [۲۴] انجام گرفته است. جریان به وسیله هیترهای مجزا در یک محفظه بسته مربعی شکل ایجاد می‌شود. دیواره‌های عمودی هم‌دما، سرد و متقارن و دیواره‌های افقی عایق در نظر گرفته شده است. معادله‌های دیفرانسیل جزئی حاکم نیز به روش حجم محدود حل شده‌اند.

کالوری و باساک [۲۵] اثر گرمای توزیع‌شده بر جابه‌جایی طبیعی را در حفره مربعی از طریق رویکرد

گرمایی مورد مطالعه قرار دادند. مطالعه آن‌ها نشان می‌دهد توزیع گرما و دمای مخلوط در حفره و در حالت گرمای توزیع شده در مقایسه با حالت دیواره پایینی گرم و دما ثابت، افزایش بسیاری خواهد داشت. در سال‌های اخیر مطالعات فراوانی بر انتقال حرارت در محفظه بسته به روش‌های مختلف انجام شده است. لیما و گانزارلی [۲۶] انتقال حرارت در محفظه بسته مربعی را که از دیواره‌های کناری سرد و گرم می‌شود و در داخل آن یک جسم جامد هادی قرار دارد، مطالعه کردند. اثر جسم مربعی بر انتقال حرارت پایا در محفظه بسته، برای عدد پرانتل مشخص و عدد رایلی‌های مختلف، نسبت محفظه بسته و ابعاد جسم و نسبت هدایت گرمایی جامد و سیال مورد بررسی قرار گرفت. از رویکرد خط گرمایی برای تحلیل انتقال گرما در محفظه بسته استفاده شده است. با افزایش اندازه جسم، عدد ناسلت نیز بر اندازه جسم و هدایت گرمایی آن وابسته می‌شود.

الواهیی و همکاران [۲۷] به صورت عددی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در یک محفظه بسته دوزنقه‌ای پُر شده از نانوذرات را شبیه‌سازی و مطالعه کردند. دیواره‌های سمت چپ و راست محفظه بسته در دماهای مختلفی قرار داشته و دیواره‌های بالایی و پایینی عایق فرض شده‌اند. پس از اینکه معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله با استفاده از پارامترهای بی‌بعد به فرم بی‌بعد شده درآمدند، روش باقیمانده وزنی گالرکین بر اساس روش المان محدود برای حل به کار گرفته شد. اثر پارامترهای مختلف از نظر عدد رایلی، نسبت اندازه، کسر حجمی و فاکتور شکل نانوذره بر خطوط جریان و دما به صورت نمودارهای مختلف ترسیم و مورد بحث قرار گرفته است. افزایش انتقال حرارت برای ترکیب‌های مختلف پارامترهای ذکر شده و همچنین عدد ناسلت متوسط بر دیواره گرما سمت چپ ارائه شده است.

مدل دو فازی بر اساس رویکرد پخش دوگانه برای مطالعه عددی جابه‌جایی طبیعی نانوسیال بر پایه آب در حفره‌های مربعی که توسط دو دیواره با دمای متفاوت گرما می‌بینند، توسط کویتینو و همکاران [۲۸] بررسی قرار گرفته است. فرض شده است پخش بروینین و گرمادایی تنها مکانیزم لغزش است که فاز جامد می‌تواند سرعت نسبی قابل توجهی را با توجه به فاز مایع توسعه دهد. معادله‌های حاکم شامل پیوستگی، مومنتم و انرژی برای نانوسیال و پیوستگی برای نانوذره، با استفاده از کد محاسباتی حل شده‌اند که سه رابطه تجربی برای ارزیابی هدایت گرمایی مؤثر، لزجت دینامیکی مؤثر و ضریب پخش گرمادایی را در خود دارد. از الگوریتم سیمپل برای کوپل سرعت و فشار استفاده شده است. شبیه‌سازی عددی برای سه نانوسیال متفاوت، قطرهای مختلف و کسر حجمی متوسط انجام شده است.

انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد جریان نانوسیال آب - جیوه درون محفظه بسته با هیتز مرکزی و منبع گرمایی از سطح زیرین توسط ماه‌لاکشمی و همکاران [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت. اثر طول مرکز هیتز بر میدان جریان و دما در اعداد رایلی مختلف مورد تحلیل قرار گرفت. از روش عددی برای حل و تحلیل

مسئله استفاده شده است. نتایج نشان داد با افزایش طول هیتر و افزایش عدد رایلی، انتقال حرارت نیز افزایش می‌یابد.

ما و همکاران [۳۰] از روش عددی حجم محدود برای بررسی جریان جابه‌جایی آزاد نانوسیال در یک محفظه بسته مربعی استفاده کردند. محفظه بسته تحت تأثیر میدان مغناطیسی قرار گرفته است. معادله‌های حاکم با روش حجم محدود و الگوریتم سیمپل حل شده‌اند. نتایج نشان داد با افزایش عدد رایلی، نرخ انتقال حرارت می‌تواند تا بیش از سه برابر افزایش یابد. همچنین مشاهده شد که بیشترین انتقال حرارت در میدان مغناطیسی ضعیف رخ داده است.

دوتا و همکاران [۳۱] به صورت عددی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی هیدرومغناطیس را در یک محفظه بسته لوزی شکل مطالعه کردند. درون محفظه نانوسیال آب - مس، محدوده عدد رایلی 10^3 تا 10^6 در نظر گرفته شده است. محفظه دارای زاویه انحراف 30° ، 60° و 90° درجه است. نتایج بیانگر این واقعیت است که برای اعداد رایلی کوچک، با افزایش عدد هارتمن نرخ انتقال حرارت تقریباً تغییر نمی‌کند. ولی برای اعداد رایلی بزرگ‌تر از 10^5 ، افزایش میدان مغناطیسی موجب کاهش نرخ انتقال حرارت می‌شود.

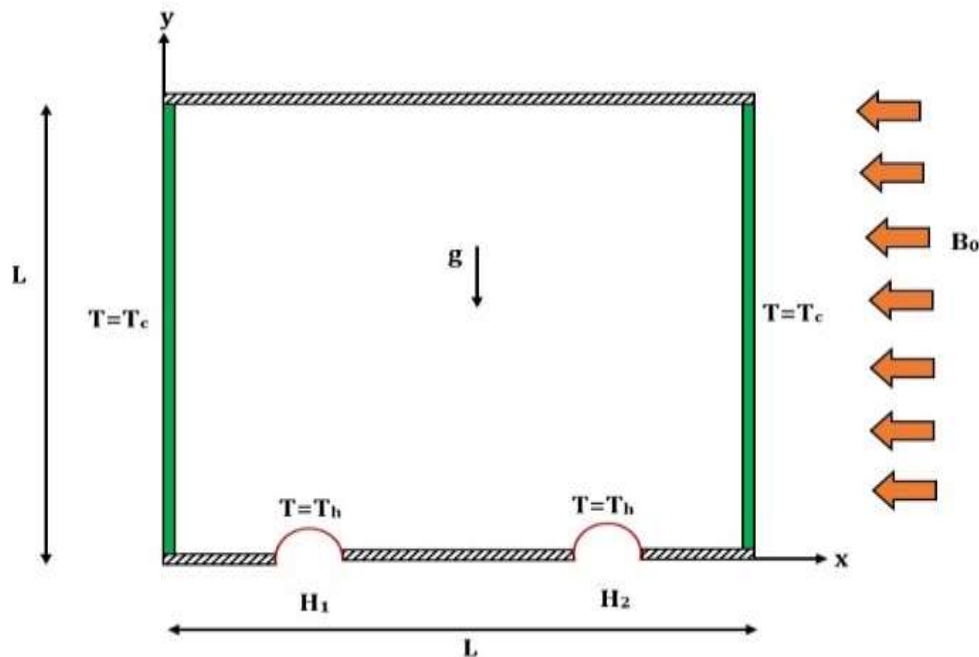
بررسی جامع جابه‌جایی ترکیبی نانوسیال در شکل‌های مختلفی از محفظه بسته توسط ایزدی و همکاران [۳۲] انجام گرفته است. هدف این پژوهش، بررسی مطالعاتی بوده که در این زمینه انجام گرفته است. این پژوهش به چهار بخش اصلی به نام‌های شکل‌های محفظه بسته مربعی (یا مستطیلی)، مثلثی، ذوزنقه‌ای و شکل‌های غیرمتداول تقسیم‌بندی می‌شود. همچنین اطلاعات مهم در هر مورد به صورت جداول مجزا ارائه شده‌اند. بیشتر مطالعات گزارش داده‌اند که با افزایش غلظت حجمی نانوسیال، عدد رینولدز و عدد ریچاردسون، انتقال گرما به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد.

هدف از پژوهش حاضر، بررسی عددی انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در یک محفظه بسته گرم‌شده از طریق دو هیتر نیمه‌مدور است. از فلیکس پی‌دی‌ای که از روش المان محدود استفاده می‌کند، برای شبیه‌سازی و حل مسئله استفاده شده است. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف بر انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی مانند فاصله هیترها از یکدیگر، عدد هارتمن و عدد رایلی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲. بیان مسئله و معادله‌های حاکم

محفظه مورد بررسی در این پژوهش مطابق شکل شماره ۱ مدل‌سازی می‌شود. محفظه بسته دو هیتر نیمه‌مدور در دیواره پایینی خود دارد. شعاع هر دو هیتر $0.5L$ و فاصله بین آن‌ها نیز $D=d/L$ است. محفظه بسته مربعی و با طول ارتفاع برابر با L است. سطح هیترهای نیمه‌مدور دما ثابت و برابر با Th و دمای

دیواره‌های عمودی نیز T_c بوده که از دمای T_h کمتر است. سایر دیواره‌های محفظه بسته عایق هستند.



شکل شماره ۱. شماتیک مسئله

معادله‌های بقای جرم، مومنتم و تعادل انرژی برای سیال تراکم‌ناپذیر در حالت پایا و دوبعدی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \beta \rho (T_h - T_c) - \sigma B_0^2 v \quad (3)$$

$$\rho c_p \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \rho c_p \frac{\partial (vT)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

معادله (۱) پیوستگی، معادلات (۲ و ۳) به ترتیب معادلات مومنتم در راستای x و y و معادله (۴) معادله انرژی هستند.

در معادلات بالا، x و y به ترتیب فواصلی هستند که در امتداد راستای افقی و عمودی قرار دارند، و u و

v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y هستند. T نشانگر دما، g نشانگر شتاب گرانش، μ لزجت دینامیکی، p فشار، T_c و T_h به ترتیب دمای دیواره گرم و سرد و ρ چگالی است. پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۳]:

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, U = \frac{uL}{\alpha}, V = \frac{vL}{\alpha}, P = \frac{(p + \rho gy)L^2}{\rho v^2} \quad (5)$$

که α و v به ترتیب لزجت سینماتیکی و پخش گرمایی هستند، L ارتفاع یا طول مشخصه، X و Y سرعت بی‌بعد در راستای افقی و عمودی، U و V مؤلفه‌های سرعت افقی و عمودی، θ دمای بی‌بعد، و P فشار بی‌بعد هستند.

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف‌شده در معادله (۵) و قراردادن در معادله‌های حاکم (۴-۱)، شکل بی‌بعد شده معادلات حاکم به ترتیب زیر به دست خواهد آمد:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (6)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + (Ra \text{Pr})\theta - (Ha^2 \text{Pr})V \quad (7)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (8)$$

Ha ، Ra و Pr به ترتیب اعداد هارتمن، رایلی و پرانتل هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Ha = B_0 L \sqrt{\sigma / \mu}, Ra = \frac{g \beta (T_h - T_c) L^3 \text{Pr}}{v^2}, Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (9)$$

عدد ناسلت روی هیترها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu = -\frac{1}{L_s} \int_0^{L_s} \frac{\partial \theta}{\partial Y} dX \quad (10)$$

با توجه به مسئله تعریف‌شده و شکل شماره ۱، شرایط مرزی برابر خواهد بود با:

$$(11)$$

$$U = 0, V = 0, \theta = 0$$

در دیواره‌های چپ و راست

$$U = 0, V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial N} = 0$$

در دیواره بالایی

$$U = 0, V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial N} = 0$$

در دیواره زیرین جز سطح هیترا

$$U = 0, V = 0, \theta = 1$$

روی سطح هیترا

که N فاصله بی بعد عمود بر X یا Y است.

همچنین فرضیه‌هایی که برای تعریف و حل مسئله در نظر گرفته شده، عبارت است از اینکه:

- سیال نیوتنی است؛
- سیال تراکم‌ناپذیر است؛
- جریان آرام و دوبعدی است؛
- خواص ترموفیزیکی، جز چگالی که وابسته به دماست، ثابت در نظر گرفته شده‌اند؛
- تقریب بوزینسک برای انتقال حرارت جابه‌جایی طبیعی در نظر گرفته شده است؛
- شرط عدم لغزش بر دیواره‌ها حاکم است؛
- از انتقال حرارت تشعشی صرف‌نظر شده است؛
- عدد پرانتل برای آب برابر با هفت در نظر گرفته شده است؛
- دیواره‌ها رسانای الکتریکی نیستند.

۳. روش حل

در این پژوهش، برای شبیه‌سازی و حل از نرم‌افزار فلکس پی‌دی‌ای (FlexPDE) استفاده شده است. نرم‌افزار فلکس ابزار قدرتمندی برای برقراری ارتباط بین مدل ریاضی، حل عددی و نتایج گرافیکی است. این نرم‌افزار توان تحلیل طیف وسیعی از مسائل مهندسی مانند تنش، واکنش‌های شیمیایی و مدل‌سازی ریاضی مسائل واقعی و کاربردی را داراست؛ از این رو در سال‌های اخیر، استفاده از این نرم‌افزار برای حل مسائل در حال گسترش است [۳۴-۳۸]. فلکس نرم‌افزار مدل‌سازی مبتنی بر روش المان محدود به صورت کدنویسی و حلگر عددی است. در شکل شماره ۲ مش‌بندی مسئله مورد حل در این پژوهش نشان داده شده است.

اساس این نرم‌افزار بر حل معادله‌های دیفرانسیلی مشتق جزئی به روش المان محدود است و در آن از مش‌بندی بی‌سازمان و مثلثی استفاده شده است. در واقع این نرم‌افزار حل مسائل مشتق جزئی را آسان‌تر می‌سازد. مراحل حل مسائل در این نرم‌افزار بدین شرح است:

- تحلیل اولیه معادله‌ها؛
- تشکیل مشتق‌ها، انتگرال‌ها و توابع روش اجزای محدود گالرکین؛
- ساختن ماتریس کوپل و حل آن؛

■ نمایش گرافیکی پاسخ.

از مزایای استفاده از نرم‌افزار فلکس می‌توان به متن - بازبودن و سادگی استفاده از آن اشاره کرد. این نرم‌افزار، توانایی حل معادله‌های پیچیده خطی و غیرخطی از نوع مشتق جزئی و معمولی را در سریع‌ترین زمان ممکن دارد. فلکس به‌طور خودکار فرایند تکرار نیوتن - رافسون اصلاح‌شده را در سیستم‌های غیرخطی اعمال می‌کند. از طرفی به واسطه متن - بازبودن آن، به‌راحتی به معادله‌های حاکم دسترسی وجود دارد و می‌توان تغییرات مورد نظر را بر این معادله‌ها یا بر ویژگی‌های ماده اعمال کرد. همچنین از دیگر ظرفیت‌های اصلی آن، حل معادله‌های پیچیده غیرخطی است که در مکانیک سیالات و انتقال حرارت به‌وفور وجود دارد.

بیشتر برنامه‌هایی که تاکنون با موضوع مشابه ارائه شده‌اند، معمولاً با استفاده از روش‌های پیچیده و طولانی به دنبال پاسخ مسئله بوده و اغلب از ارائه خروجی‌های گرافیکی فراتر از نمودار دوبعدی عاجز بوده‌اند. در نرم‌افزار فلکس، بسیار ساده‌تر از روش‌های پیشین می‌توان به پاسخ دست یافت؛ ضمن اینکه با ارائه خروجی‌های گرافیکی نظیر کانتور در کنار نمودارهای دوبعدی، درک بهتر فیزیک مسئله برای کاربر مهیا می‌شود. ترسیم هندسه، معادله‌های حاکم، شرایط مرزی و سایر پارامترها از طریق کدنویسی مخصوص این نرم‌افزار صورت می‌پذیرد.

در نرم‌افزار فلکس، هر کد از بخش‌های اصلی (الزامی) و بخش‌های فرعی (دلخواه) تشکیل شده است که در ادامه شرح داده می‌شوند.

۱-۳. بخش‌های اصلی

۱. متغیرها: باید تمامی متغیرهای مجهولی که در مسئله مورد بررسی و حل قرار می‌گیرند مانند سرعت، فشار و دما برای نرم‌افزار مشخص شود؛
۲. معادله‌ها: معادله‌های حاکم بر مسئله باید به‌طور دقیق برای نرم‌افزار معلوم شود. باید توجه داشت، فلکس به ازای هر متغیر تعریف‌شده، یک معادله حاکم می‌خواهد؛
۳. مرزها: هندسه مسئله و شرایط مرزی بر هر مرز در این بخش به کد داده می‌شود؛
۴. نمودارها: در این قسمت خروجی‌های حل به صورت نمودارهای دوبعدی، سه‌بعدی، کانتور و بُردار قابل‌رسم است؛
۵. مقادیر اولیه: اگر مسئله وابسته به زمان باشد، شرایط اولیه زمانی در این قسمت تعریف خواهد شد.

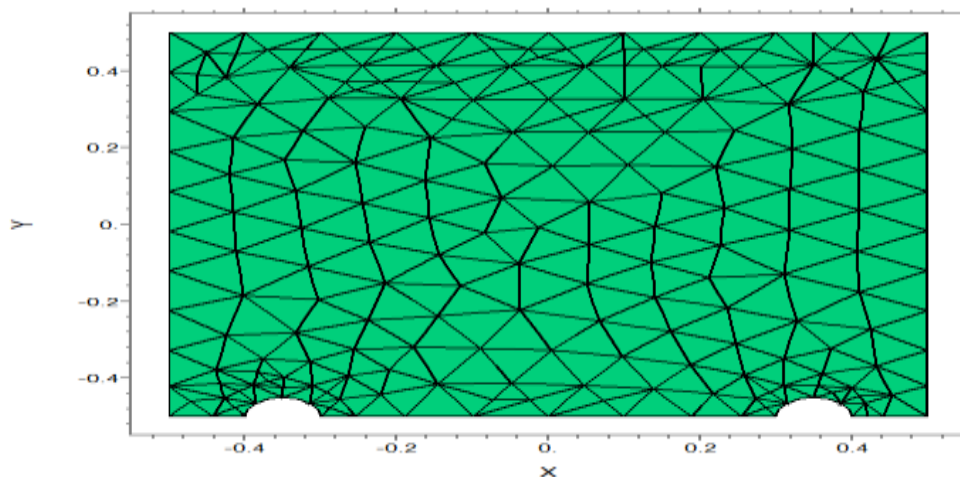
۲-۳. بخش‌های فرعی

۱. مختصات: در این نرم‌افزار پیش‌فرض، مختصات کارتزین دوبعدی است و بسته به نوع مسئله می‌توان آن را تغییر داد؛

۲. گزینه‌ها: در این قسمت می‌توان پیش‌فرض‌های نرم‌افزار را تغییر داد. برای مثال، پیش‌فرض خطایی که فلکس برای فرایند تکراری حل دارد ۰/۰۲ است که در این بخش می‌توان آن را تغییر داد؛
 ۳. تعاریف: با توجه به معادله‌های حاکم و شرایط مرزی ممکن است یک‌سری ضرایب ثابت یا روابطی وابسته به متغیرهای اصلی ظاهر شوند. این ضرایب و روابط را می‌توان در قسمت تعاریف کد وارد کرد تا کنترل و دسترسی به آن‌ها ساده بوده و به راحتی بتوان آن‌ها را تغییر داد؛
 برای توصیف ریاضی، المانی محدود با دو گره x_i و x_{i+1} در نظر گرفته می‌شود. مقادیر مرتبط با هر گره u_i و u_{i+1} تعیین می‌شود. با فرض اینکه تابع آزمایشی $u=c_1x+c_2$ باشد، خواهیم داشت:

$$u(x_i) = c_1x_i + c_2 = u_i \quad (13)$$

$$u(x_{i+1}) = c_1x_{i+1} + c_2 = u_{i+1} \quad (14)$$



شکل شماره ۲. مش بندی مسئله در نرم‌افزار فلکس

با حل هم‌زمان معادله‌های ۱۳ و ۱۴ خواهیم داشت:

$$c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (15)$$

$$c_2 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (16)$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۵ و ۱۶ در معادله (۱۳) و بازنویسی آن خواهیم داشت:

$$u = H_1(x)u_i + cH_2(x)u_{i+1} \quad (17)$$

که:

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i}, H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}, h_i(x) = x_{i+1} - x_i \quad (18)$$

۴. بحث و تحلیل نتایج

در این بخش، اثر پارامترهای مختلف شامل فاصله دو هیتر، عدد رایلی و عدد هارتمن بر توزیع دما مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین نموداری برای عدد ناسلت ارائه خواهد شد. ابتدا باید نتایج به دست آمده در این پژوهش مورد اعتبارسنجی قرار گیرد. برای کنترل همگرایی نتایج، استقلال از مش بندی مورد بررسی قرار گرفته است (جدول شماره ۱). ملاحظه می‌شود که از تعداد نتایج مستقل از مش بندی شده و این مقدار مش جهت بررسی مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین برای بررسی درستی نتایج، مقایسه نتایج به دست آمده در این تحقیق با نتایج مرجع [۳۹] مورد مقایسه قرار گرفت (جدول شماره ۲) که از دقت قابل قبولی برخوردار است.

جدول شماره ۱. نتایج استقلال از مش بندی (D=0.5, Ra=10⁸, Ha=2)

تعداد گره	تعداد سلول	Nu
۲۰۰	۹۰	۱۸/۰۷
۴۰۰	۱۸۰	۱۸/۱۸
۸۰۰	۳۸۰	۱۸/۲۳
۱۲۰۰	۶۵۰	۱۸/۲۳

جدول شماره ۲. مقایسه عدد ناسلت (Nu) به دست آمده روی دیواره سرد با مرجع (D=0.5, Ha=0)

Ra=10 ⁴		Ra=10 ⁶	
پژوهش حاضر	مرجع [۳۹]	پژوهش حاضر	مرجع [۳۹]
۲/۲۸	۲/۲۴	۸/۷۸	۸/۸۲

در شکل شماره ۲ کانتورهای هم‌دما برای یک عدد هارتمن (Ha=2) و عدد رایلی مشخص (Ra=10⁵) در فواصل مختلف دو هیتر از یکدیگر نمایش داده شده است. به طور کلی مشاهده می‌شود سیال گرم شده و از اطراف هر دو هیتر به سمت بالا جریان می‌یابد. همچنین توزیع خطوط هم‌دما تقریباً در همه فواصل هیتر به صورت متقارن توزیع می‌شود. خطوط هم‌دما نیز تقریباً نسبت به یکدیگر موازی هستند، زیرا انتقال گرمای هدایت بر انتقال حرارت غالب بوده و با توجه به شکل هیترها که نیمه‌دایره منطبق هستند، توزیع دما در صفحه میانی دو هیتر متقارن است.

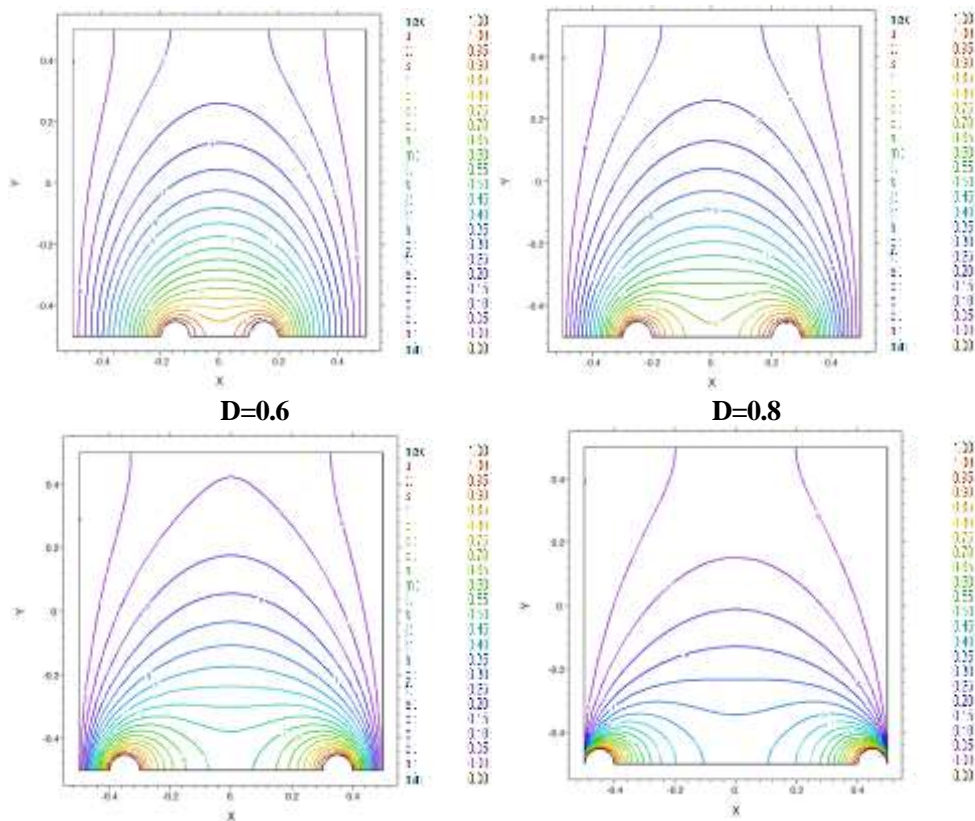
در شکل شماره ۳ کانتورهای هم‌دما برای یک عدد هارتمن (Ha=2) و عدد رایلی مشخص (Ra=10⁶) در فواصل مختلف دو هیتر از یکدیگر ترسیم شده است. در این حالت، اثر انتقال حرارت

جابه‌جایی طبیعی نسبت به انتقال حرارت هدایت بیشتر خواهد بود. دلیل این امر، افزایش مقدار عدد رایلی است. هر اندازه D بزرگ‌تر باشد، هر هیتز به‌عنوان هیتزی مستقل رفتار می‌کند و انتقال گرما به دیواره سرد عمودی کمتر خواهد بود؛ یعنی فاصله بین دو هیتز پارامتر مهمی در کنترل انتقال حرارت خواهد بود. این امر سبب می‌شود توزیع دما به شکل ستون عمودی شکل در مرکز محفظه ایجاد شود. برای $D=0.8$ ، توزیع دمای هیتز در نزدیکی دیواره پایینی تقریباً موازی محور x خواهد بود و سپس یک جریان انتقال گرمای عمودی، بخش میانی سطح بسته را دربرمی‌گیرد؛ به این دلیل که فاصله هیتزها از یکدیگر بسیار دور بوده و سبب می‌شود خطوط هم‌دما نزدیک دیواره‌های سرد، موازی با دیواره عمودی باشند.

در شکل شماره ۴ کانتورهای هم‌دما برای عدد هارتمن ($Ha=2$) و عدد رایلی مشخص ($Ra=10^7$) در فواصل مختلف دو هیتز از یکدیگر ترسیم شده است. در این حالت، توزیع عمودی و ستونی قابل توجهی بین دو هیتز مشاهده می‌شود، زیرا در این حالت، هر دو هیتز به صورت یک هیتز مستقل عمل می‌کنند. لایه مرزی گرمایی نزدیک دیواره عمودی برای اعداد رایلی بسیار بزرگ، بسیار نازک خواهد شد. همچنین با کمتر شدن فاصله D هیتزها، این لایه نیز نازک‌تر خواهد شد. در واقع در این حالت، جابه‌جایی آزاد کاملاً بر انتقال حرارت غالب خواهد شد.

D=0.2

D=0.4



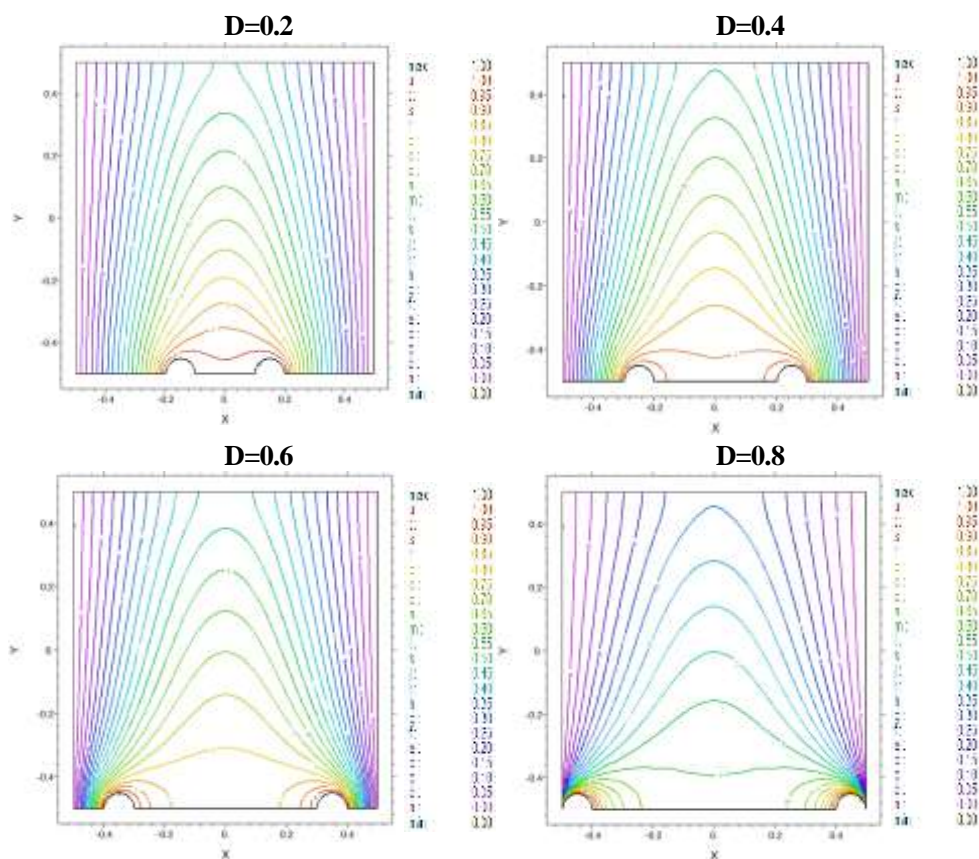
شکل شماره ۳. کانتورهای هم‌دما در $(Ha=2, Ra=10^5)$ برای فواصل مختلف D

عدد ناسلت روی هیترها محاسبه شده است. به دلیل تقارنی که در مسئله وجود دارد، این عدد برای هر دو هیتر تقریباً یکسان است. در شکل شماره ۵، تأثیر فاصله دو هیتر از یکدیگر و تغییر عدد رایلی بر عدد ناسلت ترسیم شده است. مشاهده می‌شود بالاترین مقدار برای $D=0.8$ است و با افزایش عدد رایلی، تقریباً مقدار عدد ناسلت ثابت می‌شود.

اثر میدان مغناطیسی بر توزیع دما در شکل شماره ۶ ترسیم شده است. مشاهده می‌شود با افزایش عدد هارتمن، اندازه خطوط هم‌دما کوچک‌تر و نمودار توزیع آن پخ‌تر می‌شود. همچنین توزیع دما به صورت متقارن خواهد بود. افزایش عدد هارتمن بیانگر افزایش شدت میدان مغناطیسی است. میدان مغناطیسی سبب ایجاد نیروی مقاوم در جهت حرکت به نام نیروی لورنتس می‌شود. این نیرو خلاف جهت نیروی شناوری عمل می‌کند. در واقع میدان مغناطیسی نقش کنترل‌کننده جریان و توزیع دما را ایفا می‌کند. خطوط هم‌دما نشان می‌دهند با افزایش عدد هارتمن، مکانیزم انتقال حرارت هدایت بر محفظه حاکم خواهد بود.

در شکل شماره ۷ نیز اثر عدد هارتمن بر توزیع دما برای عدد رایلی 10^5 ترسیم شده است. در این

عدد رایلی نیز رفتار مشابهی با عدد رایلی کوچک تر قابل مشاهده است. همچنین با افزایش عدد هارتمن، نقش انتقال حرارت جابه جایی کمتر شده و انتقال حرارت هدایتی غالب می شود.



شکل شماره ۴. کانتورهای هم دما در $(Ha=2, Ra=10^6)$ برای فواصل مختلف D

۵. نتیجه گیری

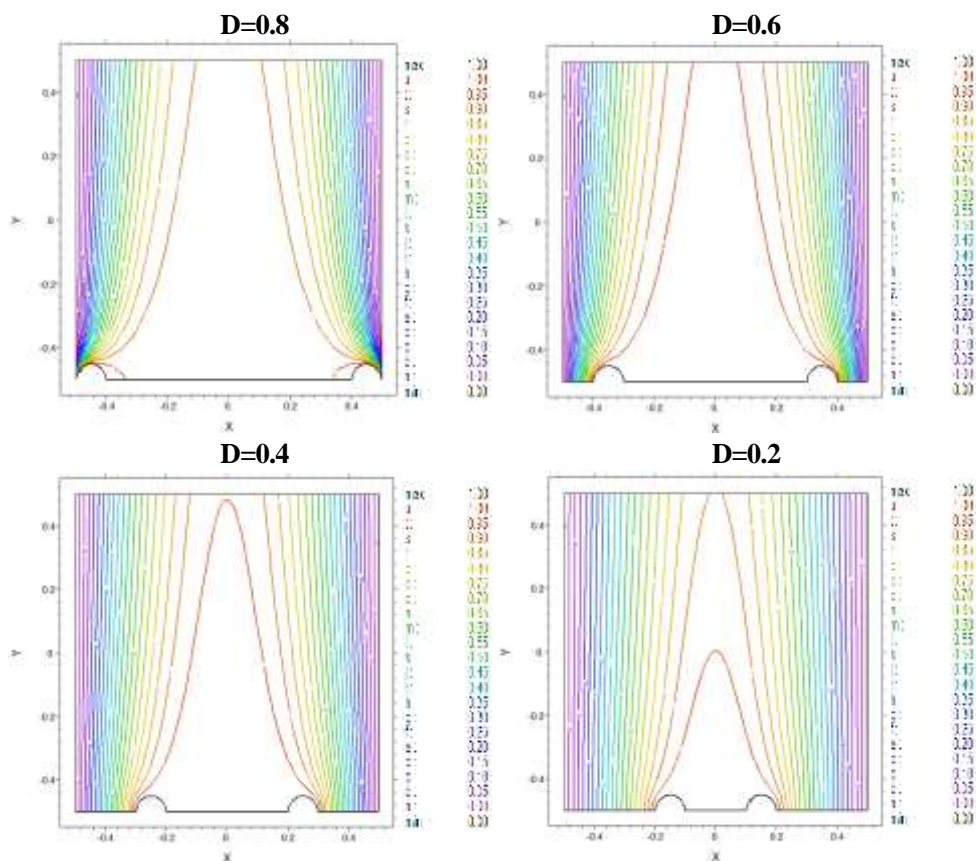
در این تحقیق، انتقال حرارت در یک محفظه بسته مربعی که دو هیتر نیمه مدور در دیواره پایینی آن قرار دارد، مورد بررسی قرار گرفته است. برای شبیه سازی و حل معادله های حاکم از نرم افزار فلکس پی دی ای استفاده شده است که بر پایه روش عددی المان استوار است. معادله های حاکم بر جریان با استفاده از پارامترهای بی بعد به شکل بی بعد شده تبدیل شدند و اثر هر یک از پارامترهای اثرگذار بر توزیع دما ترسیم و مورد بحث قرار گرفتند. نتایج کلی که از این پژوهش می توان دریافت بدین شرح است:

۱. توزیع دما رفتار مقارنی داشته و عدد ناسلت نیز به دلیل تقارن برای هر دو هیتر مشابه است؛
۲. با افزایش عدد هارتمن، میزان انتقال حرارت جابه جایی کاهش یافته و انتقال حرارت هدایتی

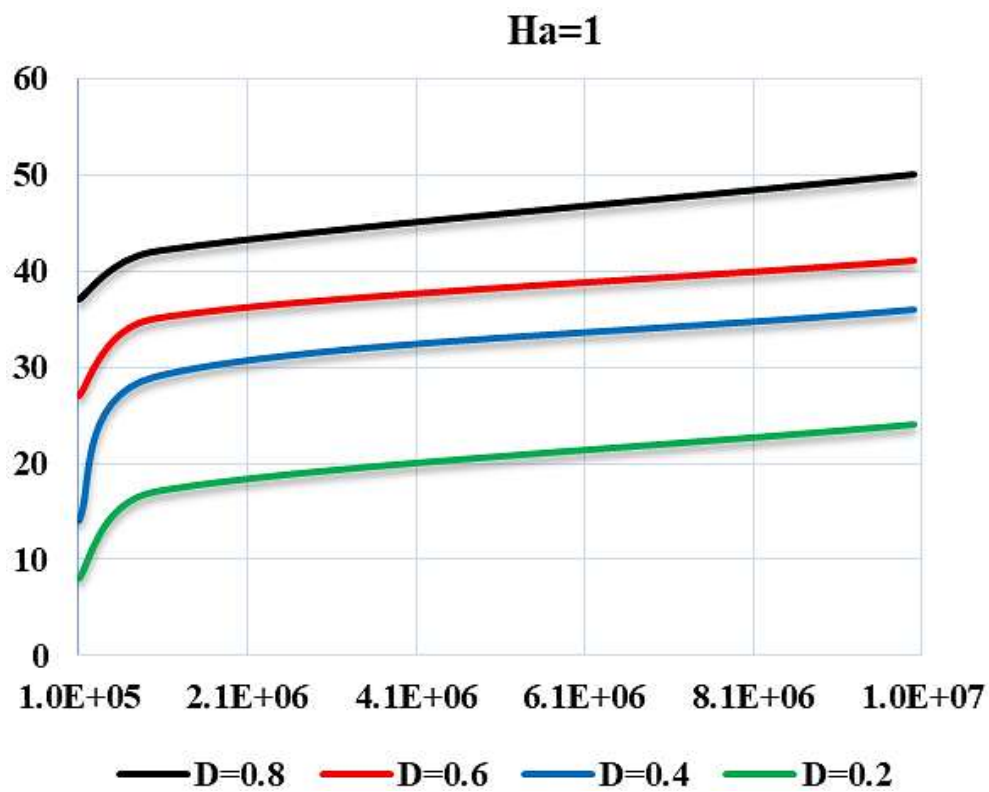
غالب می‌شود؛

۳. فاصله دو هیتر از یکدیگر نقش مهمی در توزیع دما و انتقال حرارت دارد؛ به طوری که هر چه فاصله هیترها کمتر شود، انتقال حرارت جابه‌جایی تنها محدود به بخش عمودی و ستونی شکل در مرکز محفظه خواهد شد و انتقال حرارت هدایتی بر دیواره‌ها غالب خواهد بود؛

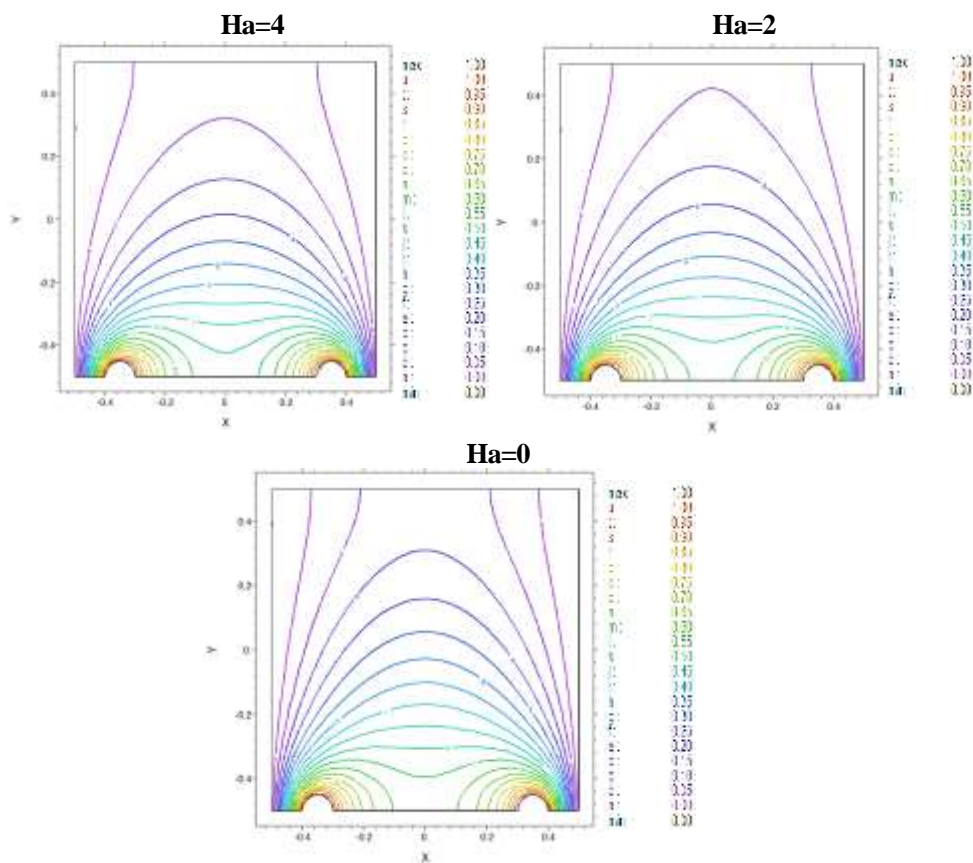
۴. با افزایش عدد رایلی، انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد بر انتقال حرارت هدایت غالب خواهد بود؛ به طوری که با افزایش عدد رایلی، انتقال حرارت جابه‌جایی به طور کامل بر محفظه بسته غالب خواهد شد.



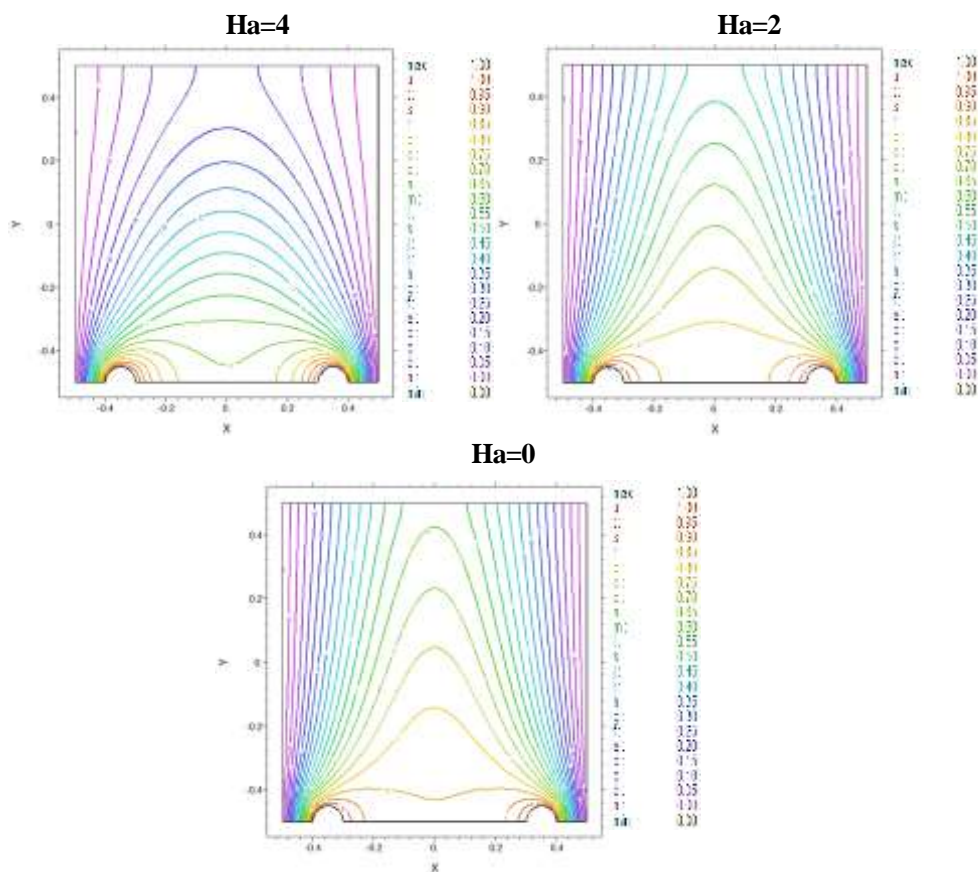
شکل شماره ۵. کانتورهای هم‌دما در $(Ha=2, Ra=10^7)$ برای فواصل مختلف D



شکل شماره ۶. اثر فاصله دو هیتر و عدد رایلی بر عدد ناسلت



شکل شماره ۷. کانتورهای هم‌دما در $(D=0.6, Ra=10^4)$ برای اعداد هارتمن مختلف



شکل شماره ۸ کانتورهای هم‌دما در $(D=0.6, Ra=10^6)$ برای اعداد هارتمن مختلف

۶. فهرست علائم

فشار (kgm-1s-2)	ρ	میدان مغناطیسی (T)	B_0
فشار بی‌بعد	P	فاصله بی‌بعد دو هیتر از یکدیگر	D
عدد پرانتل	Pr	شتاب گرانش (ms-2)	g
عدد رایلی	Ra	عدد هارتمن	Ha
دما (K)	T	طول مشخصه (m)	L
		عدد ناسلت	Nu
علائم یونانی			
دمای بی‌بعد	θ	لزجت دینامیکی (kgm-1s-1)	μ
هدایت الکتریکی (Ω-1. m-1)	σ	چگالی (kgm-3)	ρ
زیرنویس‌ها			
دمای گرم	h	دمای سرد	C

منابع

۱. فعال همدانی، ن.؛ شمشادی، ر. (۲۰۱۸)، «سنتر سبز نانو اکسید روی با ریخت‌های گوناگون به کمک امواج فراصوت»، *دوفصلنامه علمی کارافن*، ۱۵ (۴۴)، صص ۳۷-۴۸.
۲. حیاتی، الف.؛ خداداد، س. (۲۰۱۸)، «وابستگی ثابت دی‌الکتریک نانوکامپوزیت LaNiOCO با دمای بازپخت»، *دوفصلنامه علمی کارافن*، ۱۵ (۴۴)، صص ۵۷-۶۶.
۳. افصحی، م.؛ چراغی سپهوند، ط. (۲۰۱۸)، «پیشینه دمایی: روشی ساده و ارزان برای تعیین خواص حرارتی مواد تغییر فاز دهنده»، *دوفصلنامه علمی کارافن*، ۱۵ (۴۴)، صص ۲۶-۱۳.
4. Bejan, A. (2013), *Convection heat transfer*, John wiley & sons.
5. Chiang, H.; Kleinstreuer, C. (1991), "Analysis of passive cooling in a vertical finite channel using a falling liquid film and buoyancy-induced gas-vapor flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34 (9), 2339-2349. doi: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(91\)90059-N](https://doi.org/10.1016/0017-9310(91)90059-N).
6. Payvar, P. (1991), "Laminar heat transfer in the oil groove of a wet clutch", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34 (7), pp. 1791-1798. doi: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(91\)90154-7](https://doi.org/10.1016/0017-9310(91)90154-7).
7. Haese, PM.; Teubner, MD. (2002), "Heat exchange in an attic space", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45 (25), pp. 4925-4936. doi: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(02\)00208-9](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00208-9).
8. Joudi, KA.; Hussein, IA.; Farhan, AA. (2004), "Computational model for a prism shaped storage solar collector with a right triangular cross section", *Energy Conversion and Management*, 45 (3), pp. 391-409. doi: [https://doi.org/10.1016/S0196-8904\(03\)00153-5](https://doi.org/10.1016/S0196-8904(03)00153-5).
9. Mistry, H.; Ganapathi, S.; Dey, S.; Bishnoi, P.; Castillo, JL. (2006), "Modeling of transient natural convection heat transfer in electric ovens", *Applied Thermal Engineering* 26 (17), pp. 2448-2456. doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2006.02.007>.
10. Dayem, AMA. (2006), "Experimental and numerical performance of a multi-effect condensation-evaporation solar water distillation system", *Energy*, 31 (14), pp. 2710-2727.
11. Wang, S.; Faghri, A.; Bergman, TL. (2010), "A comprehensive numerical model for melting with natural convection", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53 (9), pp. 1986-2000. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.12.057>.
12. Kalaiselvan, S.; Veerappan, M.; Arul Aaron, A.; Iniyan, S. (2008), "Experimental and analytical investigation of solidification and melting characteristics of PCMs inside cylindrical encapsulation", *International Journal of Thermal Sciences*, 47 (7), pp. 858-874. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2007.07.003>.
13. Altintas, A.; Ozkol, I. (2015), "Magnetohydrodynamic Flow of Liquid-Metal in Circular Pipes for Externally Heated and Non-Heated Cases", *Journal of Applied Fluid Mechanics* 8 (3), pp. 507-514.
14. Miao, X.; Timmel, K.; Lucas, D.; Ren, Z.; Eckert, S.; Gerbeth, G. (2012), "Effect of an Electromagnetic Brake on the Turbulent Melt Flow in a Continuous-Casting Mold", *Metallurgical and Materials Transactions, B* 43 (4), pp. 954-972. doi: 10.1007/s11663-012-9672-0.

15. Al-Hababbeh, OM.; Al-Saqa, M.; Safi, M.; Abo Khater, T. (2016), "Review of magnetohydrodynamic pump applications", *Alexandria Engineering Journal*, 55 (2), pp. 1347-1358. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aej.2016.03.001>.
16. Das, C.; Wang, G.; Payne, F. (2013), "Some practical applications of magnetohydrodynamic pumping", *Sensors and Actuators A: Physical*, 201: 43-48. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sna.2013.06.023>.
17. Javadzadegan, A.; Moshfegh, A.; Afrouzi, HH.; Omid, M. (2018), "Magnetohydrodynamic blood flow in patients with coronary artery disease. Computer Methods and Programs in Biomedicine", 163: 111-122. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2018.06.007>.
18. Rashidi, S.; Esfahani, JA.; Maskaniyan, M. (2017), "Applications of magnetohydrodynamics in biological systems-a review on the numerical studies", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 439: 358-372. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.05.014>.
19. Hatami, M.; Hatami, J.; Ganji, DD. (2014), "Computer simulation of MHD blood conveying gold nanoparticles as a third grade non-Newtonian nanofluid in a hollow porous vessel", *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 113 (2), pp. 632-641. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2013.11.001>.
20. Aydin, O.; Ünal, A.; Ayhan, T. (1999), "Natural convection in rectangular enclosures heated from one side and cooled from the ceiling", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42 (13), pp. 2345-2355. doi: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00319-6](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00319-6).
21. Sarris, IE.; Lekakis, I.; Vlachos, NS. (2002), "Natural Convection in a 2d Enclosure with Sinusoidal Upper Wall Temperature", *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications* 42 (5), pp. 513-530. doi: 10.1080/10407780290059675.
22. Basak, T.; Roy, S.; Balakrishnan, AR. (2006), "Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49 (23), pp. 4525-4535. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.05.015>.
23. Varol, Y.; Oztop, HF.; Koca, A.; Ozgen, F. (2009), "Natural convection and fluid flow in inclined enclosure with a corner heater", *Applied Thermal Engineering*, 29 (2), pp. 340-350. doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2008.02.033>.
24. Saravanan, S.; Sivaraj, C.; (2014), "Surface radiation effect on convection in a closed enclosure driven by a discrete heater", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 53: 34-38. doi: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.02.002>.
25. Kaluri, RS.; Basak, T. (2010), "Analysis of distributed thermal management policy for energy-efficient processing of materials by natural convection", *Energy*, 35 (12), pp. 5093-5107. doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2010.08.006>.
26. Lima, TP.; Ganzarolli, MM. (2016), "A heatline approach on the analysis of the heat transfer enhancement in a square enclosure with an internal conducting solid body", *International Journal of Thermal Sciences*, 105: 45-56. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2016.02.012>.
27. Al-Weheibi, SM.; Rahman, MM.; Alam, MS.; Vajravelu, K. (2017), "Numerical simulation of natural convection heat transfer in a trapezoidal enclosure filled with nanoparticles", *International Journal of Mechanical Sciences*, 131-132, pp. 599-612. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.08.005>.
28. Quintino A, Ricci E, Habib E, Corcione M. (2017), Buoyancy-driven convection of nanofluids in inclined enclosures. *Chemical Engineering Research and Design* 122: 63-76. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2017.04.007>.

29. Mahalakshmi, T.; Nithyadevi, N, F.; Oztop, H.; Abu-Hamdeh, N. (2018), "Natural convective heat transfer of Ag-water nanofluid flow inside enclosure with center heater and bottom heat source", *Chinese Journal of Physics*, 56 (4), pp. 1497-1507. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2018.06.006>.
30. Ma, Y.; Shahsavari, A.; Moradi, I.; Rostami, S.; Moradikazerouni, A.; Yarmand, H.; Zulkifli NWBM. (2019), "Using finite volume method for simulating the natural convective heat transfer of nano-fluid flow inside an inclined enclosure with conductive walls in the presence of a constant temperature heat source", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 123035. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123035>.
31. Dutta, S.; Goswami, N.; Biswas, AK.; Pati, S. (2019), "Numerical investigation of magnetohydrodynamic natural convection heat transfer and entropy generation in a rhombic enclosure filled with Cu-water nanofluid", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 136: 777-798. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.03.024>.
32. Izadi, S.; Armaghani, T.; Ghasemiasl, R.; Chamkha, AJ.; Molana, M. (2019), "A comprehensive review on mixed convection of nanofluids in various shapes of enclosures", *Powder Technology*, 343: 880-907. doi: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.11.006>.
33. Öztop, HF.; Rahman, MM.; Ahsan, A.; Hasanuzzaman, M.; Saidur, R.; Al-Salem, K.; Rahim NA. (2012), "MHD natural convection in an enclosure from two semi-circular heaters on the bottom wall", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55 (7), pp. 1844-1854, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.11.037>.
34. Javanmard, M.; Taheri, MH.; Ebrahimi, SM. (2018), "Heat transfer of third-grade fluid flow in a pipe under an externally applied magnetic field with convection on wall", *Applied Rheology*, 28 (5) .
35. Javanmard, M.; Taheri, MH.; Abbasi, M.; Ebrahimi, SM. (2018), "Heat transfer analysis of hydromagnetic water-graphene oxide nanofluid flow in the channel with asymmetric forced convection on walls", *Chemical Engineering Research and Design*, 136: 816-824. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2018.06.041>.
36. Hatami, M.; Jing, D. (2017), "Optimization of wavy direct absorber solar collector (WDASC), using Al₂O₃-water nanofluid and RSM analysis", *Applied Thermal Engineering*, 121: 1040-1050. doi: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.04.137>.
37. Hatami, M. (2017), "Numerical study of nanofluids natural convection in a rectangular cavity including heated fins", *Journal of Molecular Liquids*, 233: 1-8. doi: <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2017.02.112>.
38. Ebrahimi, SM.; Javanmard, M.; Taheri, MH.; Barimani, M. (2017), "Heat transfer of fourth-grade fluid flow in the plane duct under an externally applied magnetic field with convection on walls", *International Journal of Mechanical Sciences*, 128-129: 564-571. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.05.012>.
39. Kahveci, K. (2007), *Natural convection in a partitioned vertical enclosure heated with a uniform heat flux*.