

Original Research

Semi-Analytical Solution of Unsteady Newtonian Fluid Flow and Heat Transfer between two Oscillation Plate under the Influence of a Magnetic Field

Mojtaba Masoumnezhad^{1*}, MohammadAli Kazemi², Nematollah Askari³,
MohammadHassan Taheri⁴, Mehdi Ghamati⁵

¹Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Shahid Chamran, Guilan Branch, Technical and Vocational University (TVU), Guilan, Iran.

²Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Shahid Mofateh, Hamedan Branch, Technical and Vocational University (TVU), Hamedan, Iran.

^{3,5}Faculty Member, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Imam Khomeini, Mazandaran Branch, Technical and Vocational University (TVU), Mazandaran, Iran.

⁴PhD. Department of Mechanical Engineering, Faculty of Imam Khomeini, Mazandaran Branch, Technical and Vocational University (TVU), Mazandaran, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 12.08.2020

Revised: 01.31.2021

Accepted: 02.23.2021

Keyword:

Heat transfer

Unsteady flow

Magnetic field

Oscillation plate

Semi-analytical collocation method

***Corresponding Author:**

Mojtaba Masoumnezhad

Email:

mmasoumnezhad@tvu.ac.ir

ABSTRACT

In the present study, the heat transfer of unsteady fluid flow between two oscillation plates under the influence of a magnetic field was investigated. The bottom plate was considered fixed and the upper plate could move closer or farther down to the bottom plate. The fluid flow was considered Newtonian, incompressible, two-dimensional, laminar, and unsteady. The governing equations including continuity, momentum and energy were in the form of partial differential equations (PDE); hence, they were transformed into ordinary differential equations (ODE) using similarity transformation. As an innovative method, the ODE governing equations were solved using a semi-analytical method named the Collocation Method (CM). For validity, a numerical 4th order Runge-Kutta method was used. The results revealed that by increasing the magnetic parameter, the horizontal velocity component decreased while the dimensionless temperature and heat transfer rate increased. An increase in the compression parameter led to a reduction of horizontal velocity component, dimensionless temperature, and heat transfer rate. Moreover, when Prandtl and Eckert numbers increased, the dimensionless temperature and heat transfer rate on the walls also increased.

حل نیمه تحلیلی انتقال حرارت جریان ناپایای سیال نیوتنی بین دو صفحه نوسانی تحت تاثیر میدان مغناطیسی

مجتبی معصوم نژاد^{۱*}، محمدعلی کاظمی^۲، نعمت‌اله عسکری^۳، محمدحسین طاهری^۴، مهدی قامتی^۵

- ۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، آموزشکده شهید چمران، دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان گیلان، ایران.
- ۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، آموزشکده شهید مفتح، دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان همدان، ایران.
- ۳- عضو هیئت علمی، گروه مهندسی مکانیک، آموزشکده امام خمینی (ره)، دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان مازندران، ایران.
- ۴- دکتری، گروه مهندسی مکانیک، آموزشکده امام خمینی (ره)، دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان مازندران، ایران.

چکیده

اطلاعات مقاله

در این تحقیق، انتقال حرارت جریان ناپایای سیال نیوتنی بین یک صفحه نوسانی و یک صفحه ثابت تحت تأثیر میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار گرفت. صفحه پایینی، ثابت در نظر گرفته شد و صفحه بالایی می‌تواند به صفحه پایین نزدیک یا دور شود. جریان دوبعدی، آرام و غیردائم بوده و سیال، تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شده است. در مطالعه حاضر، ابتدا معادلات پیوستگی، مومنوم و انرژی برای سیال نیوتنی ارائه شد و سپس برای جریان هیدرومغناطیس ناپایای سیال نیوتنی بین دو صفحه نوسانی، ساده‌سازی گردید. با توجه به این‌که معادلات حاکم، معادلات دیفرانسیل جزئی هستند با استفاده از تبدیل تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شدند. به‌عنوان یک نوآوری در این تحقیق معادلات حاکم با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی تلفیقی حل شدند. برای اعتبارسنجی از روش عددی رانچ کوتا مرتبه چهار استفاده شده است. نتایج نشان داد که با افزایش پارامتر مغناطیس، مؤلفه افقی سرعت در حل تشابهی کاهش، مقدار دمای بی‌بعد در یک نقطه خاص و نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها افزایش می‌یابد. با افزایش پارامتر فشردن، مؤلفه افقی سرعت، دمای بی‌بعد و نرخ انتقال حرارت در دیواره بالایی کاهش می‌یابد. با افزایش عدد پرانتل و اکرت، دمای بی‌بعد و نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها افزایش می‌یابد.

دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۱۸

بازنگری مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۱۲

پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۰۵

کلید واژگان:

انتقال حرارت
جریان ناپایا
میدان مغناطیسی یکنواخت
دو صفحه نوسانی
روش نیمه‌تحلیلی تلفیقی

*نویسنده مسئول: مجتبی معصوم نژاد

پست الکترونیکی:

mmasomnezhad@tvu.ac.ir

مقدمه

بسیاری از پدیده‌های طبیعی، ذاتاً غیردائم هستند و نمی‌توان اثر تغییرات نسبت به زمان را در آن‌ها نادیده گرفت. در مکانیک سیالات، اگر خواص و شاخص‌های جریان مانند سرعت، فشار، دما و غیره در یک نقطه خاص نسبت به زمان ثابت باشند (در هر نقطه با زمان تغییر نکند)، جریان در آن نقطه دائم، در غیر این صورت جریان غیردائم است. این تغییرات نسبت به زمان می‌تواند در اثر عوامل طبیعی یا موارد برنامه‌ریزی شده باشد.

از جمله موضوعات مورد توجه در تکنولوژی جدید که در انتقال حرارت دارای اهمیت بسیار است، مسئله انتقال حرارت در سیستم مگنتوهیدرودینامیک (MHD) می‌باشد. مگنتوهیدرودینامیک برهم‌کنش سیال و میدان مغناطیسی را توصیف می‌کند. میدان مغناطیسی به‌عنوان ابزاری بسیار قوی در جهت کنترل مشخصه‌های جریان، به‌خدمت گرفته می‌شود. به‌دلیل حضور نیروی حجمی ناشی از میدان الکترومغناطیسی می‌توان پروفیل سرعت و دمای سیال را کنترل کرد. بررسی این گونه جریان‌ها در داخل کانال به‌دلیل کاربردهایی که در صنایع مختلف دارد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از کاربردهای جریان‌های مگنتوهیدرودینامیک در صنایع شیمیایی و مکانیکی انتقال جرم در راکتورهای هسته‌ای، خشک‌کن‌ها، مطالعات پلاسما، خنک‌کاری راکتورهای هسته‌ای، رطوبت‌زدایی صنعتی، عایق‌کاری ساختمان‌ها، کنترل جریان‌های لایه مرزی در آیرودینامیک، ژنراتورها و پمپ‌های مگنتوهیدرودینامیک اشاره می‌گردد.

شینگو ایشیزاوا [۱] انتقال حرارت جریان غیردائم آرام سیال تراکم‌ناپذیر بین دو دیسک موازی با فاصله متغیر را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. او برای حل معادلات حاکم با دو استراتژی مختلف از روش‌های عددی و تحلیلی استفاده کرد و سپس تأثیر پارامترهای فیزیکی و هندسی مختلف را بر توزیع سرعت و توزیع دما به‌دست آورد.

یوچیدا و اوکی [۲] به بررسی جریان غیردائم سیال در لوله انقباضی یا انبساطی پرداختند. معادلات حاکم با استفاده از تبدیل تشابهی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل و سپس با روش تحلیلی حل شد. نتایج نشان داد که توزیع سرعت شعاعی دارای ماکزیمم مقدار بین محور و دیواره لوله است. همچنین در لوله انقباضی، فشار در دیواره از فشار در مرکز لوله بیشتر است در صورتی که در لوله انقباضی، نتیجه برعکس است.

مجدالانی و ژو [۳] جریان آرام تراکم‌ناپذیر داخل یک کانال متخلخل با دیواره‌های انبساطی یا انقباضی تراوا را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادلات ناویراستوکس حاکم را با استفاده از تبدیل تشابهی به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل و با استفاده از روش عددی حل کردند. نتایج نشان داد که در حالت تزریق جریان به داخل کانال از دیواره‌ها، با افزایش عدد رینولدز نسبت سرعت محوری به عمودی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش انبساط دیواره، تنش برشی در دیواره‌های کانال کاهش می‌یابد.

ابوالدهاب و ال‌عزیز [۴] انتقال حرارت جریان لایه مرزی جابه‌جایی طبیعی روی یک صفحه عمودی دما متغیر تحت تأثیر میدان مغناطیسی با در نظر گرفتن ترم اتلافی ویسکوز، گرمای ژولی و چشمه حرارتی را بررسی کردند. همچنین آن‌ها اثر هال و لغزش یون را در نظر گرفتند. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم توسط تبدیل تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و با استفاده از روش عددی حل شدند. نتایج نشان داد که با افزایش پارامتر مغناطیسی، مؤلفه سرعت بی‌بعد در طول صفحه کاهش، در عرض صفحه افزایش و دمای بی‌بعد افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد اکرت دمای بی‌بعد افزایش می‌یابد.

محمود و همکاران [۵] جریان و انتقال حرارت غیردائم سیال نیوتنی روی یک صفحه متخلخل داخل یک کانال نوسانی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از روش‌های تحلیلی استفاده کردند. نتایج نشان داد که با افزایش مکش از صفحه، ضریب اصطکاک پوسته‌ای و ضریب انتقال حرارت افزایش اما با افزایش تزریق به صفحه نتایج عکس حاصل می‌شود. همچنین با افزایش فشار کانال، ضریب انتقال حرارت افزایش اما ضریب اصطکاک پوسته‌ای کاهش می‌یابد.

حیات و عباس [۶] به تحلیل انتقال حرارت جریان سیال مرتبه دوم در کانالی با محیط متخلخل در حضور میدان مغناطیسی پرداختند. از روش هموتپی به منظور به دست آوردن میدان سرعت و دما استفاده کردند. نتایج بررسی شان نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر تخلخل و عدد هارتمن، میدان سرعت و دما کاهش می‌یابد.

شیخ الاسلامی و گنجی [۷] انتقال حرارت جریان نانو سیال آب- مس بین دو دیسک موازی نوسانی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از تبدیل تشابهی معادلات حاکم را به معادلات دیفرانسیل معمولی، تبدیل و سپس با روش تحلیلی حل کردند. نتایج نشان داد که در هنگام دور شدن دو صفحه، عدد ناسلت با کسر حجمی نانوذرات، عدد فشار و عدد اکرت، رابطه مستقیم دارد اما هنگامی که دو صفحه به هم نزدیک می‌شوند با عدد فشار، رابطه عکس دارد.

حاتمی و همکاران [۸] انتقال حرارت جریان آرام نانو سیال بین دو دیسک دوار و انقباضی نامتقارن را مورد بررسی قرار دادند. سیال پایه آب و نانو ذرات مس، نقره و اکسید آلومینیم به آن اضافه می‌شود. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از روش‌های عددی و تحلیلی استفاده کردند سپس تأثیر کسر حجمی نانوذرات، عدد رینولدز چرخشی، عدد رینولدز تزریق و نسبت انبساط را روی جریان و انتقال حرارت به دست آوردند. نتایج نشان داد که پروفیل دما در بین دو دیسک با افزایش تزریق تخت‌تر می‌شود اما با افزایش نسبت انبساط نتیجه عکس مشاهده می‌شود.

آدیکاری و سانبال [۹] انتقال حرارت جریان لایه مرزی سه بعدی سیال نیوتنی روی یک صفحه کشسان و تراوا تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت را بررسی کردند. صفحه در جهت محورهای x و y کشسان است و تحت شار حرارتی تعیین شده قرار دارد. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم توسط تبدیل تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و سپس با استفاده از روش عددی تفاضل محدود ضمنی حل می‌شوند. آن‌ها تأثیر پارامترهای فیزیکی مختلف را بر روی توزیع سرعت، توزیع دما، ضریب اصطکاک پوسته‌ای و دمای دیواره نشان دادند.

اسرینیواس و همکاران [۱۰] انتقال حرارت جریان هیدرومغناطیس سیال نیوتنی در یک لوله با دیواره انبساطی یا انقباضی تراوا را بررسی کردند. به طوری که دیواره لوله به طور یکنواخت نسبت به زمان دچار انبساط یا انقباض می‌شود. آن‌ها معادلات حاکم را با روش تبدیل تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نمودند و با استفاده از روش تحلیلی هموتپی حل کردند. نتایج نشان داد که به ازای نسبت انبساط ثابت دیواره، با افزایش مکش، سرعت محوری در نزدیک مرکز لوله افزایش می‌یابد. با افزایش پارامتر مغناطیس، سرعت محوری لوله کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد پرناتل، دمای بی‌بعد کاهش می‌یابد.

حاتمی و گنجی [۱۱] انتقال حرارت جریان نانو سیال بین دو دیسک موازی تراوای نوسانی تحت تأثیر میدان مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ابتدا معادلات حاکم را با روش تبدیل تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کردند و سپس با روش‌های عددی و تحلیلی حل نمودند. نتایج نشان داد که با افزایش پارامتر ترموفریسیس و پارامتر حرکت براونی، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد هارتمن دمای بی‌بعد کاهش می‌یابد. علاوه بر این، با افزایش پارامتر مکش یا تزریق، سرعت جریان افزایش می‌یابد.

حاتمی و همکاران [۱۲] انتقال حرارت جریان نانو سیال در یک کانال متخلخل نامتقارن با دیواره انبساطی یا انقباضی را بررسی کردند. صفحه پایین تحت شار حرارتی ثابت قرار دارد و صفحه بالایی توسط جریان سیال خنک می‌شود. سیال پایه آب و نانوذرات مس، نقره و اکسید آلومینیم به آن اضافه می‌شود. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از روش‌های تحلیلی استفاده کردند. نتایج نشان داد که با افزایش کسر حجمی نانوذرات و عدد رینولدز، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. همچنین برای دست‌یابی به بیشترین مقدار ناسلت، نانوذرات مس باید انتخاب شود.

قاسمی موخر و همکاران [۱۳] حل تحلیلی جریان توسعه یافته سیال غیرنیوتنی مرتبه چهار تحت تأثیر میدان مغناطیسی در کانال با در نظر گرفتن شرط لغزش را ارائه کردند. آن‌ها از روش کولوکیشن برای حل معادله مومنوم حاکم بر جریان استفاده کردند و نتیجه گرفتند که چنانچه پارامتر سیال غیرنیوتنی را افزایش دهند، پروفیل سرعت

تخت تر می‌شود. همچنین با افزایش پارامتر هارتمن، سرعت جریان افزایش و با کاهش ضریب لغزش، سرعت کاهش می‌یابد.

ویاس و اسریواستاوا [۱۴] انتقال حرارت جریان هیدرومغناطیس سیال نیوتنی درون یک کانال را مورد بررسی قرار دادند. دیواره بالایی کانال، متحرک و دیواره پایینی متخلخل است. دیواره‌های بالایی و پایینی تحت انتقال حرارت جابه‌جایی نامتقارن قرار دارند. معادلات حاکم با روش تحلیلی دقیق حل شدند. نتایج نشان داد که پروفیل دما در داخل کانال متقارن نیست و دما با افزایش عدد هارتمن و عدد برینکمن افزایش می‌یابد.

تازا گول و همکاران [۱۵] به بررسی جریان و انتقال حرارت ناپایدار سیال غیرنیوتنی مرتبه سوم بین دو صفحه عمودی با سرعت نوسانی پرداختند. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از روش تجزیه آدامین (ADM) استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که با افزایش عدد استاک، سرعت افزایش و با افزایش گرادیان فشار، سرعت کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد استاک، عدد پرانتل و عدد اکرت دما افزایش می‌یابد.

حیدری و همکاران [۱۶] به بررسی عددی تأثیر میدان مغناطیسی بر انتقال حرارت جریان جابه‌جایی اجباری نانو سیال در یک کانال پرداختند. آن‌ها از مدل تک‌فازی برای به‌دست آوردن معادلات حاکم استفاده کردند. نتایج به‌دست آمده نشان داد که حضور میدان مغناطیسی و اضافه کردن نانوذرات مس به سیال خالص می‌تواند تبادل حرارت بین دیواره و جریان سیال را به‌طور قابل توجهی افزایش دهد.

دوگنچی و همکاران [۱۷] جریان و انتقال حرارت هیدرومغناطیس نانوسیال بین دو صفحه موازی در حضور تابش حرارتی را بررسی کردند. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از روش تحلیلی تقریب دوان-راچ حل کردند. نتایج نشان داد که پروفیل دما و عدد ناسلت با افزایش پارامتر تابش، افزایش می‌یابند.

رئییسی و همکاران [۱۸] انتقال حرارت و انتقال جرم جریان دو بعدی غیردائم سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای حل معادلات حاکم از روش عددی رانج کوتا مرتبه چهار استفاده کردند و سپس تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل عدد فشار، عدد پرانتل، عدد اکرت، عدد اشمیت و پارامتر عکس‌العمل شیمیایی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که عدد ناسلت با عدد پرانتل و عدد اکرت رابطه مستقیم و با عدد فشار، رابطه عکس دارد. راجپوت و کومار [۱۹] تأثیر جذب حرارت بر جریان هیدرومغناطیس غیردائم روی یک صفحه تخت عمودی دما متغیر با در نظر گرفتن اثر هال مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش عددی و تحلیلی برای حل معادلات حاکم استفاده کردند. نتایج نشان داد که با گذشت زمان، دما افزایش می‌یابد. همچنین سرعت اولیه و ثانویه جریان با افزایش جذب حرارت و پارامتر زاویه فاز کاهش می‌یابد.

واجراولو و همکاران [۲۰] تأثیرات خواص متغیر سیال بر جریان و انتقال حرارت نانو سیال بین دو دیسک موازی نوسانی تراوا تحت تأثیر میدان مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از شرط مرزی لغزش روی صفحات برای سرعت و دما استفاده کردند. معادلات حاکم با استفاده از روش تبدیل تشابهی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و سپس با روش تحلیلی هموتپی بهینه حل شدند. نتایج نشان داد که با افزایش پارامتر لزجت سیال، سرعت در نزدیک دیواره‌ها افزایش می‌یابد. همچنین میدان دما و غلظت تابع افزایشی از ضریب هدایت گرمایی متغیر و پارامتر انتشار متغیر است.

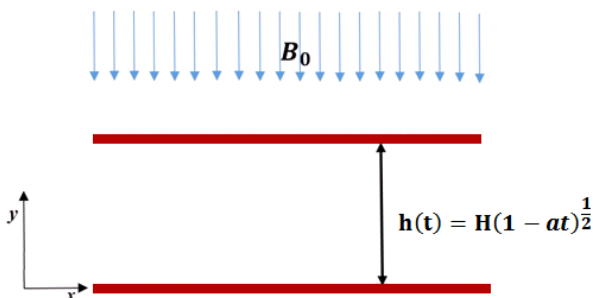
عسکری و طاهری [۲۱] به صورت عددی به بررسی رفتار گرمایی سیال در یک محفظه بسته و دارای هیت‌های دما ثابت مدور پرداخته‌اند. تأثیر میدان مغناطیسی نیز بر توزیع دمای این هیت‌ها در محفظه بسته ارزیابی شد. مشاهده گردید که با افزایش میدان مغناطیسی و عدد هارتمن، نیروی لورنتز افزایش می‌یابد و در نتیجه، نیروی شناوری کاهش می‌یابد، انتقال گرمای هدایتی غالب و توزیع دما متقارن تر خواهد شد.

عبدالستار و همکاران [۲۲] و پورمهران و همکاران [۲۳] در دو تحقیق مجزا به بررسی جریان هیدرودینامیکی (بدون میدان مغناطیسی) بر جریان سیال ناپایا بین دو صفحه، یک صفحه ثابت و دیگری نوسانی پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر

این دو تحقیق، همان معادلات متداول برای ناویر- استوکس و انرژی هستند، با این تفاوت که سیال در مرجع [۲۳] نانوسیال و در دیگر مرجع [۲۲]، سیال نیوتنی معمول است. هر دو تحقیق از روش‌های نیمه‌تحلیلی برای حل استفاده کرده‌اند، مرجع [۲۲] از روش پرتوربیشن و مرجع [۲۳] از روش‌های نیمه‌تحلیلی تلفیقی و تفاضل مربعات بره برده است. با توجه به تحقیقات پیشین انجام شده، حل مسئله جریان سیال بین دو صفحه نوسانی و ثابت بدون در نظر گرفتن میدان مغناطیسی انجام پذیرفته است [۲۲، ۲۳]، ولی تاکنون برای انتقال حرارت جریان ناپایای سیال نیوتنی بین دو صفحه نوسانی و ثابت تحت تأثیر میدان مغناطیسی، با حل معادله انرژی کامل و با روش نیمه‌تحلیلی تلفیقی ارائه نشده است. لذا می‌توان برای میدان سیال مورد بحث توزیع سرعت و توزیع دما را با توجه به شرایط مرزی به روش نیمه‌تحلیلی به دست آورد. در نتیجه هدف از این مطالعه به دست آوردن توزیع سرعت و توزیع دمای سیال با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی و بررسی تأثیر میدان مغناطیسی و نوسان صفحه بر توزیع سرعت، توزیع دما و نرخ انتقال حرارت است.

بیان مسئله

در این تحقیق، انتقال حرارت جریان ناپایای سیال نیوتنی بین دو صفحه نوسانی تحت تأثیر میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. جریان آرام، تراکم‌ناپذیر و ناپایا است و تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت در جهت عمود بر صفحات قرار دارد. صفحه پایینی ثابت و صفحه بالایی می‌تواند به صفحه پایین نزدیک یا دور شود؛ به طوری که با توجه در مدت زمان $t = \frac{1}{a}$ دو صفحه به هم می‌رسند و به‌ازای $a < 0$ دو صفحه از هم دور می‌شوند. معادلات حاکم با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی تلفیقی حل می‌شوند.



شکل ۱. شماتیکی از هندسه مسئله

معادلات حاکم

معادلات حاکم برای حل این مسئله شامل پیوستگی، تکانه و انرژی می‌شوند. معادله پیوستگی برای یک جریان دوبعدی به ترتیب زیر تعریف می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

با توجه به فرضیات مسئله، معادله تکانه به صورت زیر ساده می‌شود. با توجه به این که محیط جریان تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد، معادلات تکانه در راستای x دارای ترم اضافی می‌باشد که نیروی لورنتز نام دارد.

معادله تکانه در راستای x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 u}{\rho} \quad (2)$$

و معادله تکانه در راستای y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

در معادله (۲)، $\sigma B_0^2 u$ نیروی لورنتز است. به علاوه معادله انرژی با توجه به فرضیات مسئله، به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{k}{\rho c_p} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho c_p} \right) \left[2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right] + \frac{\sigma B_0^2 u^2}{\rho c_p} \quad (4)$$

از طرفی با توجه به معادله پیوستگی می‌توان معادله (۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{k}{\rho c_p} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho c_p} \right) \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\sigma B_0^2 u^2}{\rho c_p} \quad (5)$$

معادله (۵)، معادله انرژی حاکم بر جریان است.

شرایط مرزی

با توجه به شماییک مسئله و فرضیات بیان شده، شرایط مرزی سرعت و دمایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y = 0 : u = 0, v = 0, T = T_w \quad (6)$$

$$y = h(t) : u = 0, v = \frac{dh}{dt}, T \rightarrow T_h$$

که T_w دمای صفحه پایین و T_h دمای صفحه نوسانی بالا می‌باشد.

حل تشابهی

با توجه به اینکه معادلات حاکم بر جریان، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند، می‌توان با استفاده از پارامتر تشابهی η و روش حل تشابهی، معادلات فوق را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. پارامترهای تشابهی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta = \frac{y}{h(t)} = \frac{y}{H\sqrt{1-at}}$$

$$f'(\eta) = \frac{u}{\left(\frac{ax}{2(1-at)}\right)} \Rightarrow u = \frac{ax}{2(1-at)} f'(\eta), \quad f(\eta) = \frac{v}{\left(\frac{aH}{2(1-at)}\right)} \Rightarrow v = \frac{aH}{2(1-at)} f(\eta) \quad (8)$$

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_h}{T_w - T_h}$$

با جای گذاری پارامترهای تشابهی در روابط (۴) و (۵) و انجام ساده سازی های جبری، معادله های تکانه و انرژی حاکم در حل تشابهی به صورت زیر به دست می آیند:

$$f^{iv} - S(\eta f''' + f f'' - f f''' + 3f'') - M f'' = 0 \quad (8)$$

$$\theta'' + Pr S(f\theta' - \eta\theta') + Pr Ec(f''^2 + 4\delta^2 f'^2 + M f'^2) = 0 \quad (9)$$

که در معادله (۸)، M پارامتر مغناطیس و S پارامتر فشردن و در معادله (۹)، Pr عدد پراکتل، Ec عدد اکرت و δ پارامتر ارتفاع هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$M = \frac{\sigma B_0^2 H^2 (1-at)}{\mu}, \quad S = \frac{aH^2}{2\nu},$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad Ec = \frac{1}{c_p (T_w - T_h)} \left(\frac{ax}{2(1-at)} \right)^2, \quad (10)$$

$$\delta = \frac{h(t)}{x} = \frac{2H\sqrt{(1-at)}}{x}$$

همچنین، شرایط مرزی نیز به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : f' = 0, f = 0, \theta = 1 \\ \eta = 1 & : f' = 0, f = 1, \theta = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

روش حل

کاربرد روش کولوکیشن در حل معادلات

برای حل تقریبی مسائل غیرخطی و خطی با ضرایب متغیر می‌توانیم از قوانین تابع آزمون^۱ استفاده کنیم. برای این کار تابع آزمون را به صورت تابعی از n ضریب نامشخص c_1, c_2, \dots, c_n یعنی $T.F = f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ در نظر می‌گیرند [۲۴، ۲۵]. شرایط انتخاب تابع آزمون به صورت زیر است:

تابع آزمون را به صورت برخی از توابع پایه مانند چندجمله‌ای‌ها، توابع مثلثاتی و ... می‌نویسند. تابع آزمون را طوری می‌نویسند که شرایط مرزی را برآورده کند. قرار دادن تابع آزمون به جای تابع اصلی، باقیمانده‌ای^۲ تحت عنوان باقیمانده‌ها ایجاد می‌کند که این باقیمانده به صورت تابعی از مقادیر ثابت و مقادیر متغیر خواهد بود و باید به سمت صفر برود. به طریقی باید ثابت‌های c_1 تا c_n را محاسبه کرد. روش‌هایی مثل گالرکین، تلفیقی و حداقل مربعات برای به دست آوردن این ثابت‌ها می‌توانند به کار روند.

روش کولوکیشن (تلفیقی)، روشی است که شامل n ضریب نامشخص است و موقعیت‌های مختلف بر اساس باقیمانده را می‌دهد. این روش بر اساس $0 < t < 1$ (متغیر) که در مساله تعریف شده، حدس زده می‌شود. در این روش هدف این است که c_1 تا c_n را پیدا کنیم تا باقیمانده را پیدا کنیم و از آنجا تابع آزمون را به دست آوریم و محاسبه تابع آزمون در حقیقت، ما را به محاسبه جواب می‌رساند.

حل معادله تکانه

برای حل معادله (۸) با استفاده از روش کولوکیشن، لازم است تابع آزمون که در شرایط مرزی رابطه را ارضا می‌کند حدس زده شود. البته باید توجه نمود که می‌توان بی‌شمار تابع آزمون حدس زد که شرایط مرزی را ارضا کند ولی ممکن است جواب نهایی هیچ‌کدام درست نباشد. لذا نیاز است هر تابع آزمون که حدس زده می‌شود در فرایند حل قرار گیرد و جواب نهایی کنترل گردیده تا اعتبار تابع حدس تصدیق شود. لذا تابع آزمون زیر برای حل معادله (۸) در نظر گرفته می‌شود.

$$f(\eta) = (2\eta - \eta^2)^2 + c_1(\eta - \eta^2)^2 + c_2(\eta - \eta^3)^2 + c_3(\eta - \eta^4)^2 + c_4(\eta - \eta^5)^2 \quad (12)$$

پاسخ تقریبی فوق، شرایط مرزی سرعت (۱۱) را ارضا می‌کند. از جایگذاری معادله (۱۲) در معادله دیفرانسیل (۸)، معادله باقی‌مانده ظاهر می‌شود.

برای یافتن ضرایب ثابت c_1 تا c_4 در فاصله $0 < \eta < 1$ ، این بازه را می‌توان به ۵ قسمت مساوی تقسیم کرد و معادله باقی‌مانده را برای نقاط داخلی بازه نوشت:

$$R_1\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \quad R_1\left(\frac{2}{5}\right) = 0, \quad R_1\left(\frac{3}{5}\right) = 0, \quad R_1\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad (13)$$

¹ Trail Function

² Residual

با استفاده از روابط (۱۳)، ۴ معادله و ۴ مجهول ایجاد می‌شود که با استفاده از نرم‌افزار میپیل ثابت‌های c_1, c_2, c_3, c_4 به‌ازای مقادیر مختلف M و S به‌دست می‌آید. با جای‌گذاری ثابت‌های c_1, c_2, c_3, c_4 در رابطه (۱۲)، $f(\eta)$ به‌دست خواهد آمد.

حل معادله انرژی

برای ساخت یک پاسخ تقریبی معادله (۹)، ابتدا $f(\eta)$ به‌دست آمده از معادله (۸) و مشتقات آن را در معادله (۹) جای‌گذاری و سپس تابع آزمون $\theta(\eta)$ را یک چند جمله‌ای برحسب η انتخاب می‌کنیم.

$$\theta(\eta) = (1-\eta) + b_1\eta(1-\eta) + b_2\eta(1-\eta^2) + b_3\eta(1-\eta^3) + b_4\eta(1-\eta^4) + b_5\eta(1-\eta^5) \quad (14)$$

پاسخ تقریبی فوق، شرایط مرزی حرارتی (۱۱) را برآورده کرده است. با جای‌گذاری معادله (۱۴) در معادله دیفرانسیل (۹) و به‌ازای پارامترهای دلخواه، معادله باقی‌مانده ظاهر می‌شود. برای یافتن ضرایب ثابت b_1 تا b_5 در فاصله $0 < \eta < 1$ ، این بازه را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و معادله باقی‌مانده را برای نقاط داخلی بازه می‌توان نوشت:

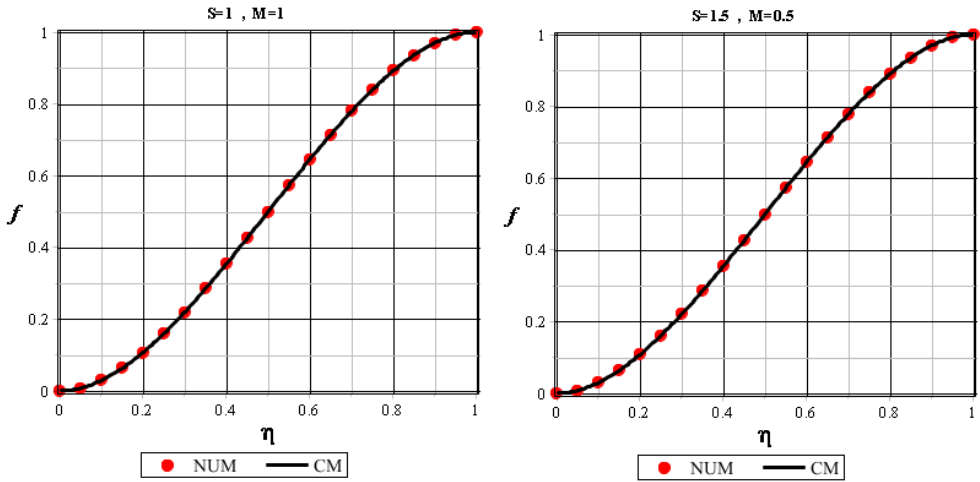
$$R_2\left(\frac{1}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{2}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{3}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{4}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{5}{6}\right) = 0 \quad (15)$$

با استفاده از روابط (۱۵)، پنج معادله و پنج مجهول ایجاد می‌شود که با استفاده از نرم‌افزار میپیل ثابت‌های b_0, b_1, \dots, b_5 به‌ازای مقادیر مختلف δ, Pr و Ec به‌دست می‌آید. با جای‌گذاری ثابت‌های b_0, b_1, \dots, b_5 در رابطه (۱۴)، توزیع دمای بی‌بعد $\theta(\eta)$ به‌دست می‌آید.

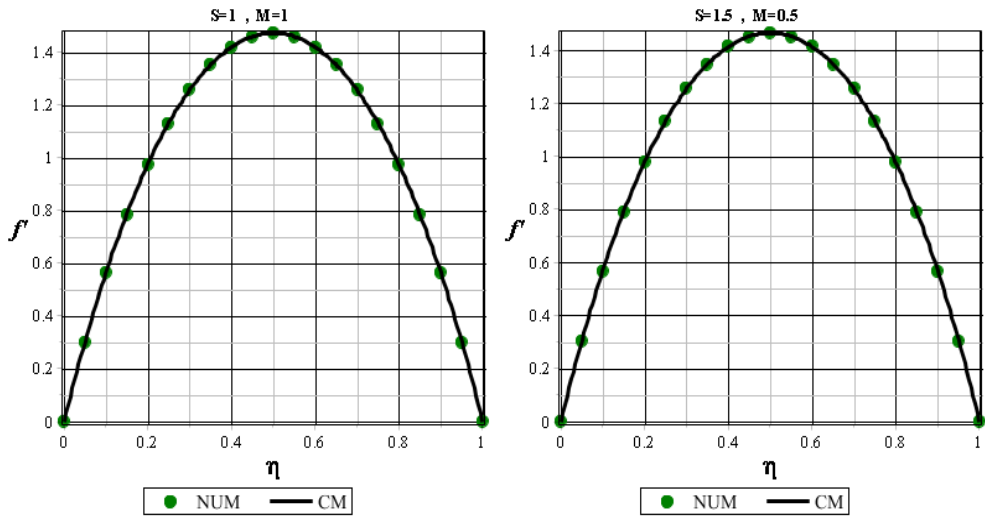
نتایج

اعتبارسنجی پاسخ‌ها

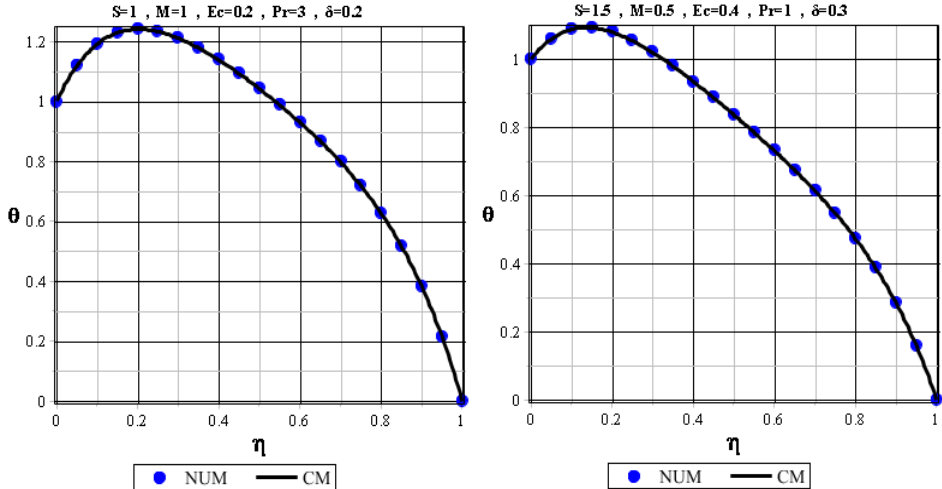
در مسئله حاضر، برای بررسی درستی و دقت پاسخ‌ها، نتایج حاصل از روش کولوکیشن را به‌ازای حالت‌های مختلف با نتایج حاصل از روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار که توسط نرم‌افزار میپیل به‌دست می‌آید مقایسه می‌کنیم. در ادامه به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر میدان سیال می‌پردازیم. شکل (۲) نتایج حاصل از روش کولوکیشن را با نتایج حاصل از روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار برای $f(\eta)$ به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر مغناطیس M و پارامتر فشردن S نشان می‌دهد.



شکل ۲. مقایسه روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار روش کولوکیشن برای $f(\eta)$ به‌ازای مقادیر مختلف S و M

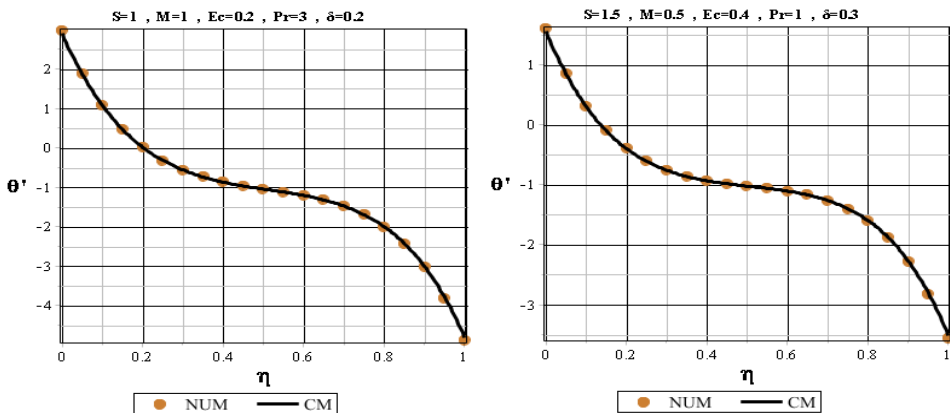


شکل ۳. مقایسه روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار روش کولوکیشن برای $f'(\eta)$ به‌ازای مقادیر مختلف S و M



شکل ۴. مقایسه روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار و روش کولوکیشن برای $\theta(\eta)$ به ازای مقادیر مختلف Ec و Pr, δ, S, M

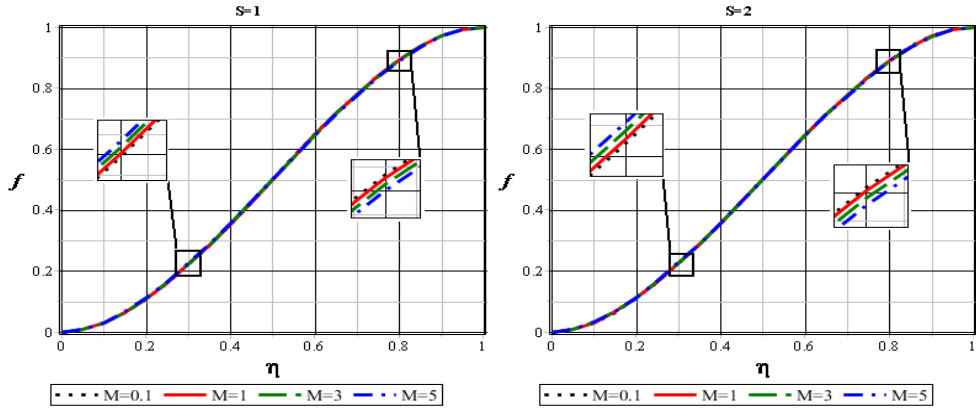
شکل (۳) نتایج حاصل از روش کولوکیشن را با نتایج حاصل از روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار برای $f'(\eta)$ به ازای مقادیر مختلف پارامتر مغناطیس M و پارامتر فشردن S نشان می‌دهد. شکل (۴) و شکل (۵) نتایج حاصل از روش کولوکیشن را با نتایج حاصل از روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار برای $\theta(\eta)$ و $\theta'(\eta)$ به ازای مقادیر مختلف Pr, δ, S, M و Ec نشان می‌دهد. از شکل‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که در این مسئله نتایج به دست آمده از روش کولوکیشن برای مقادیر مختلف پارامترهای مغناطیس، فشردن، پراتنل، اکرت و ارتفاع تطابق بسیار خوبی با حل عددی دارند. بنابراین با استفاده از روش کولوکیشن پروفیل‌های میدان سیال به ازای مقادیر مختلف پارامترهای مغناطیس، فشردن، پراتنل، ارتفاع و اکرت در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند.



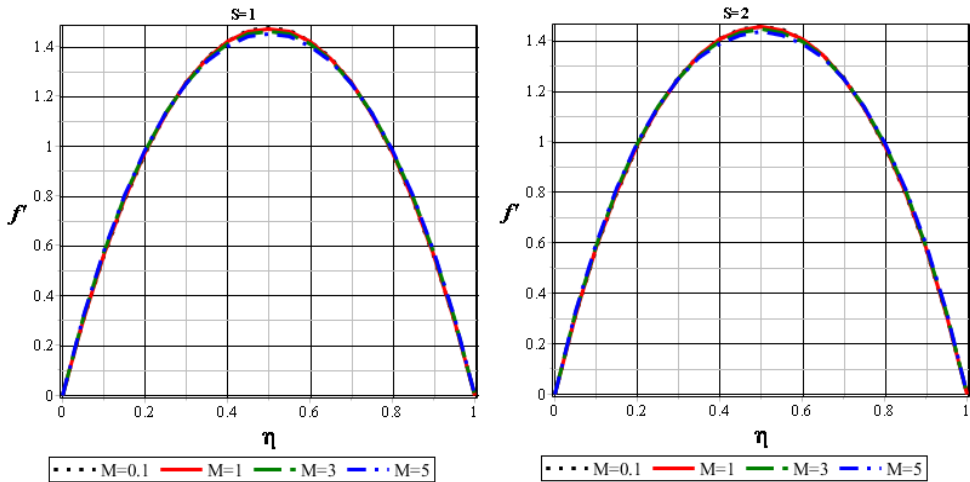
شکل ۵. مقایسه روش عددی رانج کوتاه مرتبه چهار و روش کولوکیشن برای $\theta'(\eta)$ به ازای مقادیر مختلف Ec و Pr, δ, S, M

بررسی تأثیر پارامترهای هندسی و فیزیکی مؤثر بر میدان سیال

شکل‌های ۶ و ۷ نشان‌دهنده تأثیر پارامتر مغناطیس M بر روی میدان سیال است. پارامتر مغناطیسی به صورت نسبت نیروی لورنتز به لزجت تعریف می‌شود. افزایش این پارامتر به منزله افزایش شدت میدان مغناطیسی و نیروی لورنتز است. نیروی لورنتز نیز ذاتی اتلافی دارد، یعنی همواره خلاف جهت جریان سیال اعمال و اثر می‌گذارد. با مقایسه مقدار f در یک نقطه خاص مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر مغناطیس و در نتیجه افزایش نیروی مقاوم در برابر حرکت لورنتز، مؤلفه عمودی سرعت در حل تشابهی f در نزدیکی صفحه نوسانی بالا کاهش و در نزدیکی صفحه ثابت پایین افزایش می‌یابد. با افزایش این پارامتر مؤلفه افقی سرعت در حل تشابهی f' تخت‌تر می‌شود و در واقع در اثر افزایش نیروی مقاوم در برابر حرکت لورنتز، مؤلفه افقی سرعت سیال کاهش می‌یابد.



شکل ۶. تأثیر پارامتر مغناطیس M بر تغییرات f به‌ازای مقدار ثابت S

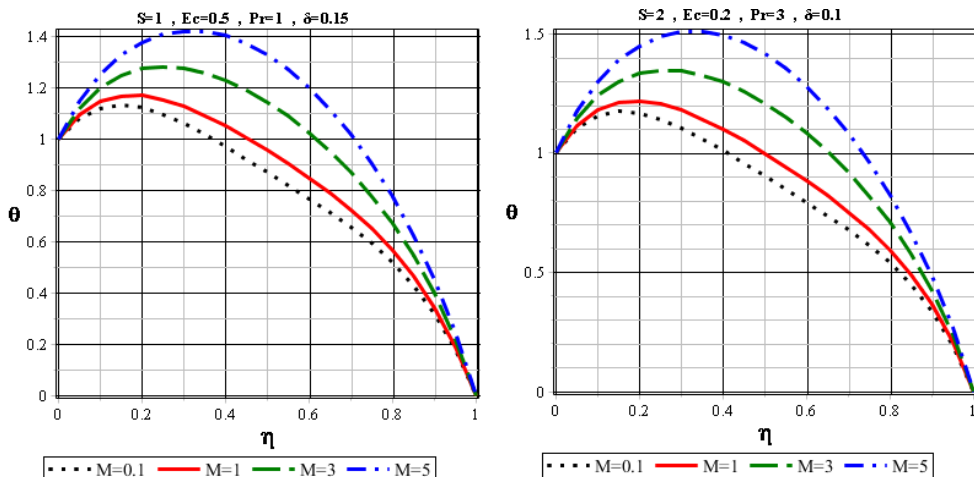


شکل ۷. تأثیر پارامتر مغناطیس M بر تغییرات f' به‌ازای مقدار ثابت S

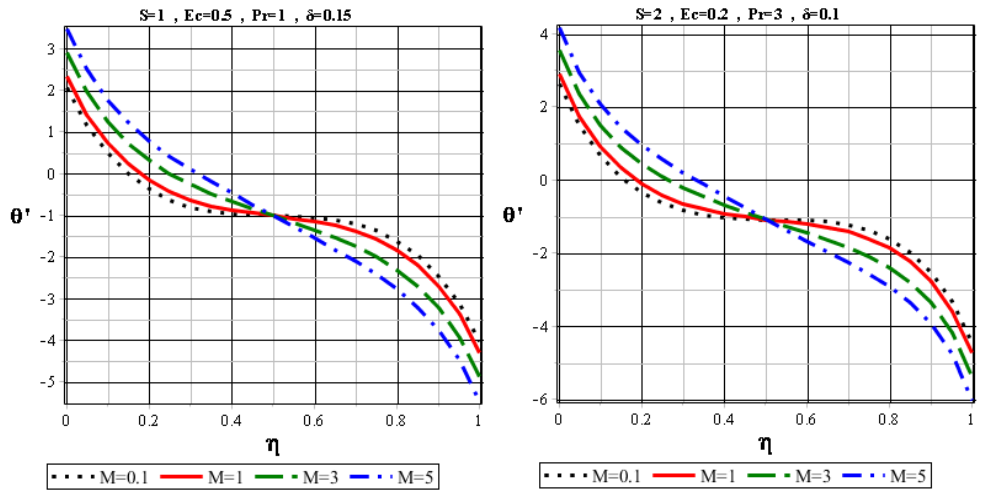
شکل‌های ۸ و ۹ نشان‌دهنده تأثیر پارامتر مغناطیس بر پروفیل دمای بی‌بعد θ و گرادیان دمای بی‌بعد θ' است، با توجه به این شکل‌ها دیده می‌شود که مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص با افزایش پارامتر مغناطیس، افزایش می‌یابد. این افزایش به دلیل به‌وجود آمدن جمله‌ای است که در معادله انرژی ظاهری می‌شود که به آن اتلاف ژولی می‌گویند. این اتلاف در واقع، اتلاف گرمایی است که ناشی از مقاومت در مسیر جریان الکتریکی و مغناطیسی است. با وجود این خاصیت، طبیعتاً دمای بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش این پارامتر، قدر مطلق گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره‌ها $|\theta'(0)|$ و $|\theta'(1)|$ افزایش و در نتیجه نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها افزایش می‌یابد.

شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان‌دهنده تأثیر پارامتر فشردن S بر میدان سیال است. افزایش این پارامتر به‌منزله افزایش فاصله دو صفحه و کم شدن تأثیر دیواره (لزجت سیال) بر سیال در حال عبور است. در نتیجه، با افزایش این پارامتر، در اثر افزایش فاصله بین دو صفحه مؤلفه عمودی سرعت در حل تشابهی f در نزدیکی صفحه نوسانی بالا کاهش و در نزدیکی صفحه ثابت پایین افزایش می‌یابد. با افزایش این پارامتر مؤلفه افقی سرعت در حل تشابهی f' تخت‌تر می‌شود و در واقع مؤلفه افقی سرعت سیال کاهش می‌یابد.

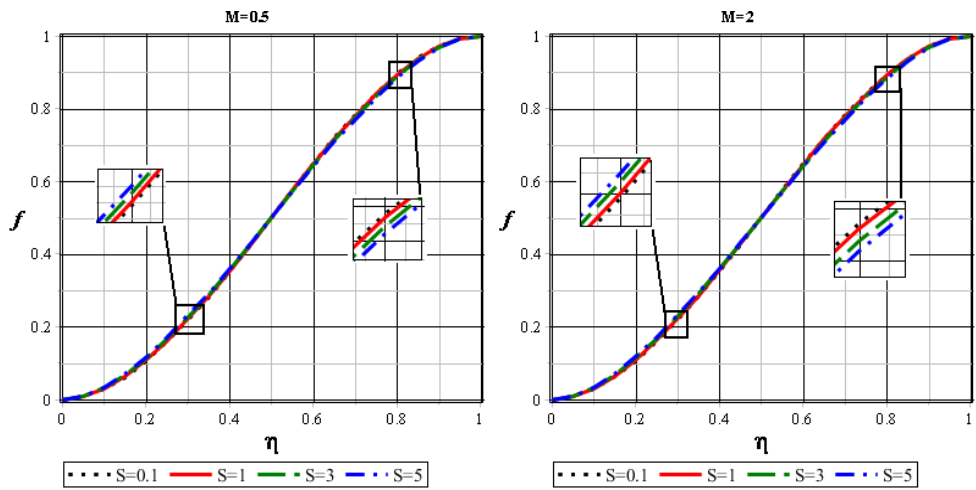
با توجه به شکل‌های ۴-۱۱ و ۴-۱۲ مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر فشردن که می‌تواند ناشی از کاهش لزجت سینماتیک سیال یا افزایش فاصله دو صفحه از یکدیگر باشد مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش این پارامتر در اثر کاهش تأثیر لزجت سینماتیک یا افزایش فاصله صفحه بالایی از صفحه ثابت پایینی، قدر مطلق گرادیان دمای بی‌بعد $|\theta'(1)|$ در دیواره بالایی کاهش یافته و در نتیجه نرخ انتقال حرارت سیال در این دیواره کاهش می‌یابد، اما در دیواره پایینی که ثابت است، گرادیان دمای بی‌بعد $|\theta'(0)|$ تقریباً ثابت باقی می‌ماند.



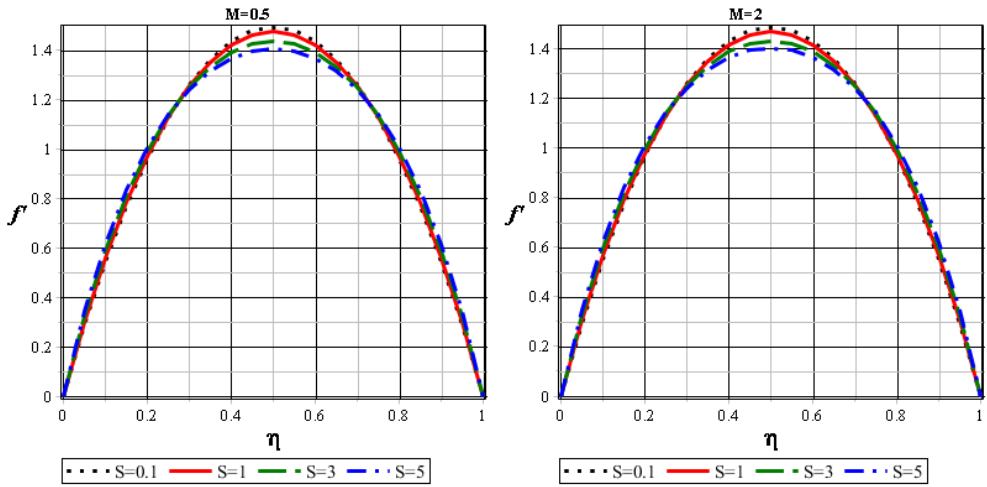
شکل ۸. تأثیر پارامتر مغناطیس M بر تغییرات θ به‌ازای مقدار ثابت S, δ, Pr, Ec



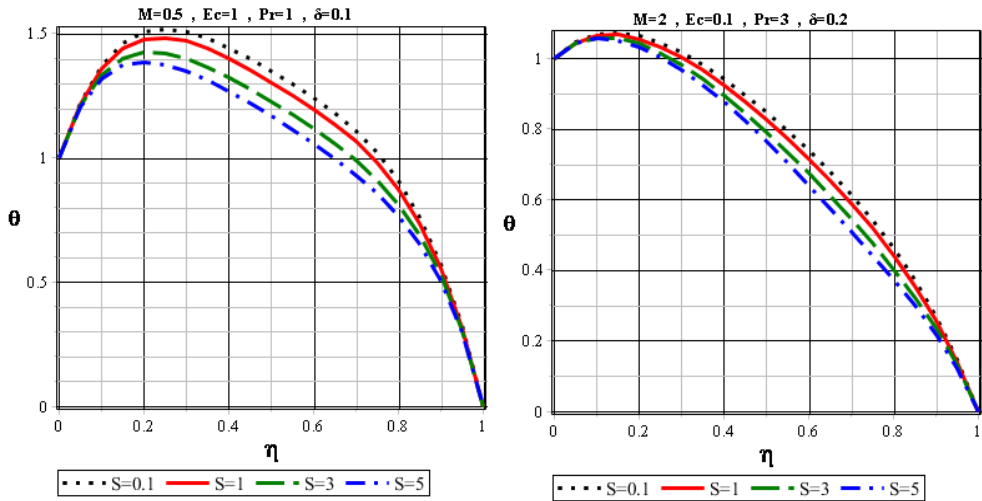
شکل ۹. تأثیر پارامتر مغناطیس M بر تغییرات θ' به ازای مقدار ثابت S, δ, Pr, Ec



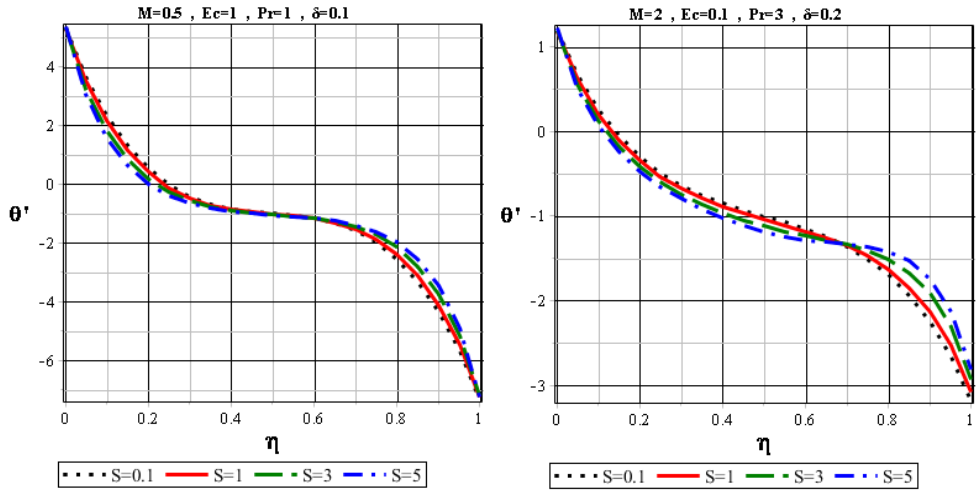
شکل ۱۰. تأثیر پارامتر فشردن S بر تغییرات f به ازای مقدار ثابت M



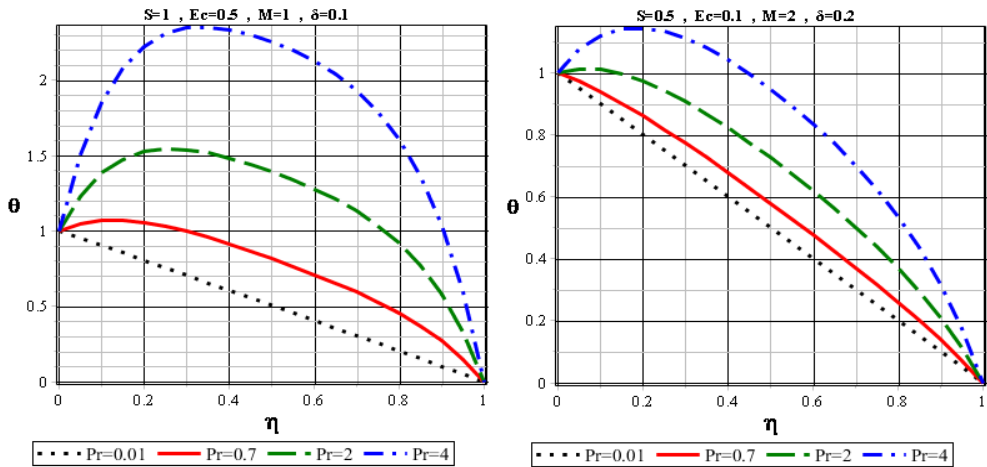
شکل ۱۱. تأثیر پارامتر فشردن S بر تغییرات f' به ازای مقدار ثابت M



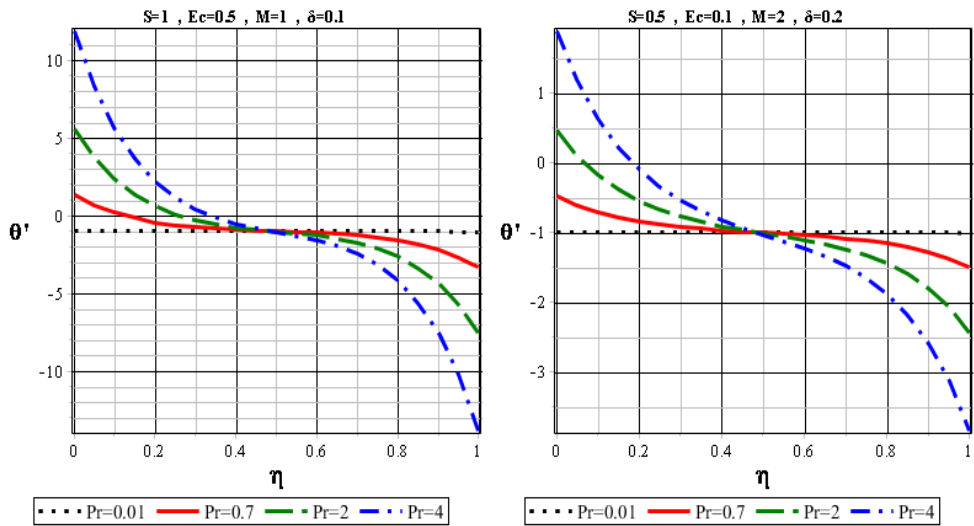
شکل ۱۲. تأثیر پارامتر فشردن S بر تغییرات θ به ازای مقدار ثابت M, δ, Pr, Ec



شکل ۱۳. تأثیر پارامتر فشردن S بر تغییرات θ' به ازای مقدار ثابت M, δ, Pr, Ec



شکل ۱۴. تأثیر عدد Pr بر تغییرات θ به ازای مقدار ثابت M, δ, S, Ec

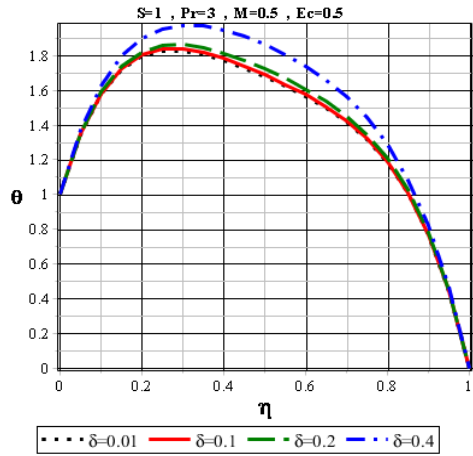
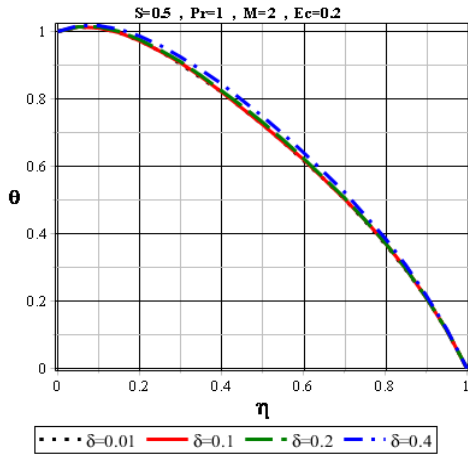


شکل ۱۵. تأثیر عدد Pr بر تغییرات θ' به‌ازای مقدار ثابت M, δ, S, Ec

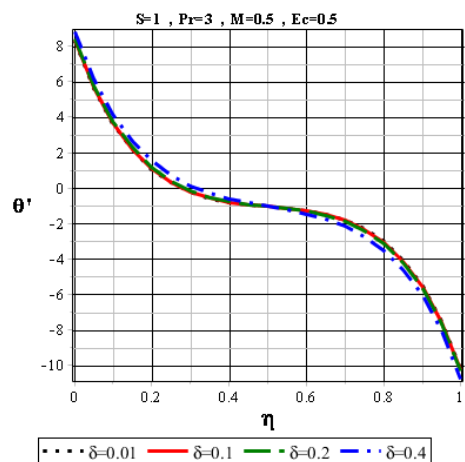
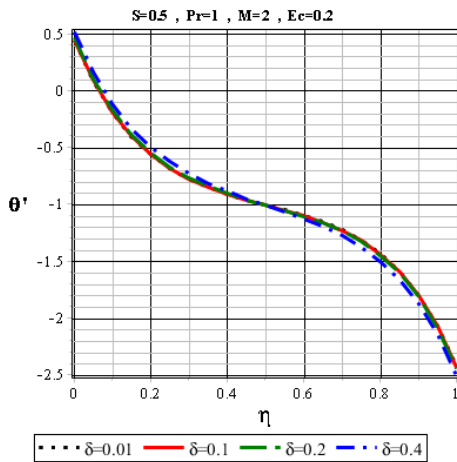
شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نشان‌دهنده تأثیر عدد پرانتل Pr بر میدان سیال است. عدد پرانتل نسبت پخش مومنتم به پخش گرمایی تعریف می‌شود. با مقایسه مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص مشاهده می‌شود که با افزایش عدد پرانتل که به مفهوم نفوذ بیشتر مومنتم و نفوذ کمتر گرماست، پخش حرارت ضعیف‌تر می‌شود و در نتیجه θ افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد پرانتل، قدر مطلق گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره‌ها $|\theta'(0)|$ و $|\theta'(1)|$ افزایش و در نتیجه طبق قانون فوریه نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها افزایش می‌یابد.

شکل‌های ۱۶ و ۱۷ نشان‌دهنده تأثیر پارامتر ارتفاع δ بر میدان سیال است. با مقایسه مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص مشاهده می‌شود که با افزایش δ ، دمای بی‌بعد افزایش می‌یابد؛ به‌طوری‌که این افزایش بیشتر در ناحیه میانی کانال مشاهده می‌شود. به همین دلیل تغییرات گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره‌ها تقریباً ناچیز است و تأثیری بر نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها ندارد.

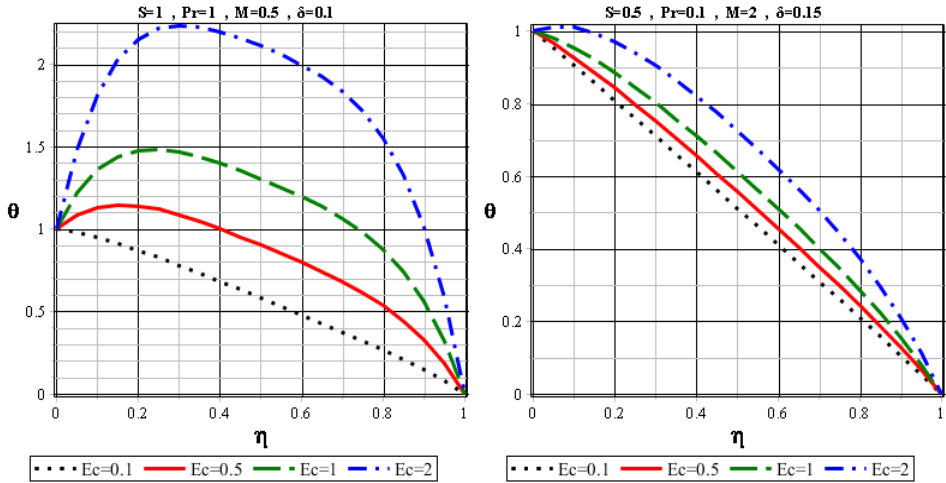
شکل‌های ۱۸ و ۱۹ نشان‌دهنده تأثیر عدد اکرت Ec بر میدان سیال است. عدد اکرت به صورت نسبت انرژی جنبشی جریان به آنتالپی لایه مرزی تعریف می‌گردد. این عدد در واقع بیانگر میزان اتلاف انتقال گرما در جریان سیال است.



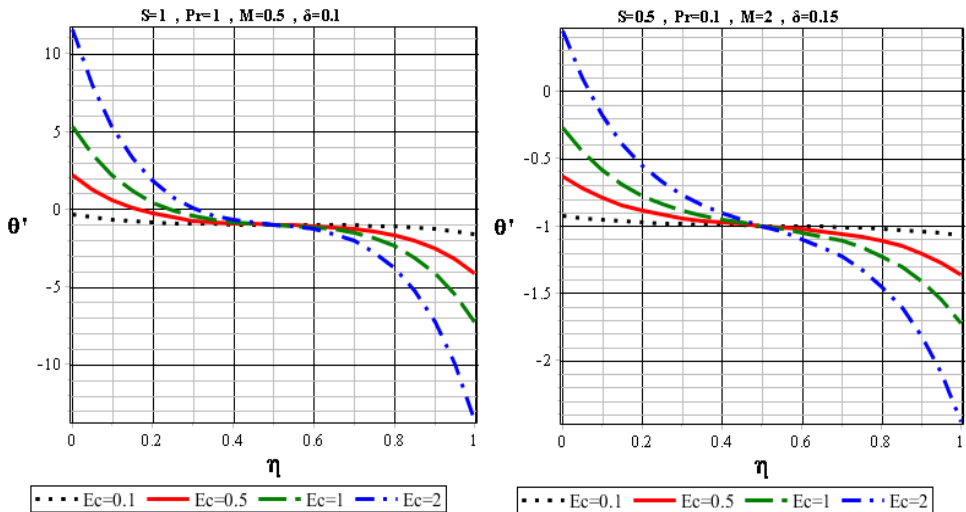
شکل ۱۶. تأثیر پارامتر ارتفاع δ بر تغییرات θ به ازای مقدار ثابت M, Pr, S, Ec



شکل ۱۷. تأثیر پارامتر ارتفاع δ بر تغییرات θ' به ازای مقدار ثابت M, Pr, S, Ec



شکل ۱۸. تأثیر پارامتر ارتفاع Ec بر تغییرات θ به ازای مقدار ثابت M, Pr, S, δ



شکل ۱۹. تأثیر پارامتر ارتفاع Ec بر تغییرات θ' به ازای مقدار ثابت M, Pr, S, δ

با مقایسه مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص مشاهده می‌شود که با افزایش عدد اکرت، میزان انرژی جنبشی سیال افزایش یافته که عامل برخورد بیشتر ذرات سیال به یکدیگر می‌شود، در نتیجه θ افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش این پارامتر، قدر مطلق گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره‌ها $|\theta'(0)|$ و $|\theta'(1)|$ افزایش و در نتیجه نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها افزایش می‌یابد.

نتیجه گیری

در این تحقیق، با به کارگیری روش تحلیلی کولوکیشن انتقال حرارت جریان آرام ناپایای سیال نیوتنی بین دو صفحه نوسانی تحت تأثیر میدان مغناطیسی یکنواخت مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به بررسی‌های انجام شده، نتایج زیر به دست آمده است:

۱- با افزایش پارامتر مغناطیس و در نتیجه افزایش نیروی مقاوم در برابر حرکت لورنتز، مؤلفه عمودی سرعت در حل تشابهی f در نزدیکی صفحه نوسانی بالا کاهش و در نزدیکی صفحه ثابت پایین افزایش می‌یابد. مؤلفه افقی سرعت در حل تشابهی f' کاهش و مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص در اثر افزایش اتلاف ژولی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش این پارامتر، قدر مطلق گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره‌ها $|\theta'(0)|$ و $|\theta'(1)|$ افزایش و در نتیجه نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها افزایش می‌یابد.

۲- با افزایش پارامتر فشردن، مؤلفه عمودی سرعت در حل تشابهی در نزدیکی صفحه نوسانی بالا کاهش و در نزدیکی صفحه ثابت پایین افزایش می‌یابد. با افزایش این پارامتر مؤلفه افقی سرعت در حل تشابهی تخت‌تر می‌شود و در واقع مؤلفه افقی سرعت سیال کاهش می‌یابد. با افزایش پارامتر فشردن، مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص کاهش، قدر مطلق گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره پایین $|\theta'(0)|$ تقریباً ثابت اما در دیواره بالایی $|\theta'(1)|$ کاهش و در نتیجه نرخ انتقال حرارت در این دیواره کاهش می‌یابد.

۳- با مقایسه مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص مشاهده می‌شود که با افزایش عدد پراتل و عدد اکرت، θ افزایش می‌یابد. همچنین قدر مطلق گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره‌ها $|\theta'(0)|$ و $|\theta'(1)|$ افزایش و در نتیجه نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها افزایش می‌یابد.

با مقایسه مقدار دمای بی‌بعد θ در یک نقطه خاص مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر ارتفاع δ ، دمای بی‌بعد افزایش می‌یابد؛ به طوری که این افزایش بیشتر در ناحیه میانی کانال مشاهده می‌شود. به همین دلیل، تغییرات گرادیان دمای بی‌بعد در دیواره‌ها تقریباً ناچیز است و تأثیری بر نرخ انتقال حرارت سیال در دیواره‌ها ندارد.

Reference

1. Ishizawa S., (1996). "The unsteady laminar flow between two parallel discs with arbitrarily varying gap width". Bulletin of JSME, 9(35), 533-550.
2. Uchida S, & Aoki H. (1977). "Unsteady flows in a semi-infinite contracting or expanding pipe". Journal of Fluid Mechanics, 82(2), 371-387.
3. Majdalani J., & Zhou C. (2003). "Moderate-to-large injection and suction driven channel flows with expanding or contracting walls". ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Applied Mathematics and Mechanics, 83(3), 181-196.
4. Abo-Eldahab E.M., & El Aziz M.A. (2005). "Viscous dissipation and Joule heating effects on MHD-free convection from a vertical plate with power-law variation in surface temperature in the presence of Hall and ion-slip currents". Applied Mathematical Modelling, 29(6), 579-595.

5. Mahmood M., Asghar S., & Hossain M. (2007). "Squeezed flow and heat transfer over a porous surface for viscous fluid". *Heat and mass Transfer*, 44(2), 165-173.
6. Hayat T., & Abbas Z. (2008). "Heat transfer analysis on the MHD flow of a second grade fluid in a channel with porous medium". *Chaos, Solitons & Fractals*, 38(2), 556-567.
7. Sheikholeslami M., & Ganji D. (2013). "Heat transfer of Cu-water nanofluid flow between parallel plates". *Powder Technology*, 235, 873-879.
8. Hatami M., & Sheikholeslami M., & Ganji D. (2014). "Laminar flow and heat transfer of nanofluid between contracting and rotating disks by least square method". *Powder Technology*, 253, 769-779.
9. Adhikari A., & Sanyal D. (2013). "Heat transfer on MHD viscous flow over a stretching sheet with prescribed heat flux". *Bull Int Math Virtual Inst.*, 3, 335-347.
10. Srinivas S., Reddy A.S., Ramamohan T., & Shukla A.K. (2014). "Influence of heat transfer on MHD flow in a pipe with expanding or contracting permeable wall". *Ain Shams Engineering Journal*. 5(3), 817-830.
11. Hatami M., & Ganji D. (2014). "Heat transfer and nanofluid flow in suction and blowing process between parallel disks in presence of variable magnetic field". *Journal of Molecular Liquids*, 190, 159-168.
12. Hatami M., Sheikholeslami M., & Ganji D. (2014). "Nanofluid flow and heat transfer in an asymmetric porous channel with expanding or contracting wall". *Journal of Molecular Liquids*, 195, 230-239.
13. Moakher P.G., Abbasi M., & Khaki M. (2015). "New analytical solution of MHD fluid flow of fourth grade fluid through the channel with slip condition via collocation method". *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2(3).
14. Vyas P., & Srivastava N. (2015). "Entropy analysis of generalized MHD Couette flow inside a composite duct with asymmetric convective cooling". *Arabian Journal for Science and Engineering*, 40(2), 603-614.
15. Gul T., Rehman I., Islam S., Khan M.A., Ullah W., & Shah Z. (2015). "Unsteady third order fluid flow with heat transfer between two vertical oscillating plates". *J Appl Environ Biol Sci*. 5(4), 72-79.
16. Heidary H., Hosseini R., Pirmohammadi M., & Kermani M. (2015). "Numerical study of magnetic field effect on nano-fluid forced convection in a channel". *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 374, 11-17.
17. Dogonchi A., Divsalar K., & Ganji D. (2016). "Flow and heat transfer of MHD nanofluid between parallel plates in the presence of thermal radiation". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 310, 58-76.
18. Raissi P., Shamlooei M., Sepasgozar S.E., & Ayani M. (2016). "Numerical investigation of two-dimensional and axisymmetric unsteady flow between parallel plates". *Propulsion and Power Research*, 5(4), 318-325.
19. Rajput U., & Kumar G. (2017). "Effect of Heat Absorption on MHD Flow Over a Plate with Variable Wall Temperature". *Journal of Applied Science and Engineering*, 20(3), 277-282.

20. Vajravelu K., Prasad K., Ng C.O., & Vaidya H. (2017). "MHD squeeze flow and heat transfer of a nanofluid between parallel disks with variable fluid properties and transpiration". *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*, 12(1), 1-9.
21. Askari N. & Taheri M. H. (2020), "Numerical Investigation of a MHD Natural Convection Heat Transfer Flow in a Square Enclosure with Two Heaters on the Bottom Wall," *karafan scientific semi-annual*, 17, 101-121.
22. Al-Saif A.-S.& Harfash A. (2019), "Perturbation-Iteration Algorithm for Solving Heat and Mass Transfer in the Unsteady Squeezing Flow between Parallel Plates," *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 5, 804-815.
23. Pourmehran O., Rahimi-Gorji M., Gorji-Bandpy M., & Ganji D. (2015), "Analytical investigation of squeezing unsteady nanofluid flow between parallel plates by LSM and CM," *Alexandria Engineering Journal*, 54(1), 17-26.
24. Sahebi S.A.R., Pourziaei H., Feizi A.R., Taheri M.H., Rostamiyan Y., & Ganji D. (2015). "Numerical analysis of natural convection for non-Newtonian fluid conveying nanoparticles between two vertical parallel plates". *The European Physical Journal Plus*, 130 (12), 230-238.
25. Rahimi-Gorji M., Pourmehran O., Gorji-Bandpy M., & Ganji D. (2015). "An analytical investigation on unsteady motion of vertically falling spherical particles in non-Newtonian fluid by Collocation Method". *Ain Shams Engineering Journal*, 6(2), 531-540.

پیوست الف. استخراج معادله تکانه

به طور خلاصه معادلات حاکم بر جریان به صورت زیر هستند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{الف-۱})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2 u}{\rho} \quad (\text{الف-۲})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{الف-۳})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{k}{\rho c_p} \right) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho c_p} \right) \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\sigma B_0^2 u^2}{\rho c_p} \quad (\text{الف-۴})$$

با توجه به اینکه معادلات حاکم بر جریان معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند، می توان با استفاده از پارامتر تشابهی η و روش حل تشابهی، معادلات فوق را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نمود. با استفاده از معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow dv = -\frac{\partial u}{\partial x} dy \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^y -\frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \quad \text{و} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{H\sqrt{1-at}} \Rightarrow dy = H\sqrt{1-at} d\eta \quad (\text{الف-۵})$$

$$\Rightarrow v = \int_0^y -\frac{\partial u}{\partial x} dy = -\int_0^\eta \frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) (H\sqrt{1-at}) d\eta \Rightarrow v = -\frac{aH}{2\sqrt{1-at}} f(\eta)$$

برای از بین بردن گرادیان فشار در معادلات تکانه، از معادلات نسبت به y و x مشتق می گیریم و تفاضل این دو معادله را به دست می آوریم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{الف-۶})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \nu \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (\text{الف-۷})$$

تفاضل معادله (الف-۶) از معادله (الف-۷) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \\ \nu \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{الف-۸})$$

همچنین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{a^2 x}{2(1-at)^2} f'(\eta) + \frac{a^2 x \eta}{4(1-at)^2} f''(\eta) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \eta} \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{ax}{2(1-at)} f''(\eta) \right) \frac{1}{H\sqrt{1-at}} = \frac{ax}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ax}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{ax}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \right) \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{ax}{2H^2(1-at)^2} f'''(\eta) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{a^2 H}{4(1-at)^{\frac{3}{2}}} f(\eta) + \frac{ya^2}{4(1-at)^2} f'(\eta) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{a}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a^2 x}{2(1-at)^2} f'(\eta) + \frac{a^2 x \eta}{4(1-at)^2} f''(\eta) \right) = \frac{3a^2 x}{4H(1-at)^{\frac{5}{2}}} f''(\eta) + \frac{a^2 x \eta}{4H(1-at)^{\frac{5}{2}}} f'''(\eta) \end{aligned} \quad (\text{الف-۹})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{a^2 H}{4(1-at)^{\frac{3}{2}}} f(\eta) + \frac{ya^2}{4(1-at)^2} f'(\eta) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{a}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ax}{2H^2(1-at)^2} f'''(\eta) \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{ax}{2H^2(1-at)^2} f'''(\eta) \right) \times \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{ax}{2H^3(1-at)^{\frac{5}{2}}} f^{iv}(\eta)$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{a}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \right) = 0$$

با جای‌گذاری روابط فوق در معادله (الف-۸):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3a^2 x}{4H(1-at)^{\frac{5}{2}}} f''(\eta) + \frac{a^2 x \eta}{4H(1-at)^{\frac{5}{2}}} f'''(\eta) \right) + \left(\frac{ax}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) - \frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) \right) + \\ & \left(\frac{ax}{2(1-at)} f'(\eta) - \frac{a}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \right) + \left(-\frac{a}{2(1-at)} f'(\eta) - \frac{ax}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \right) + \quad (الف-۱۰) \\ & \left(-\frac{aH}{2\sqrt{1-at}} f(\eta) - \frac{ax}{2H^2(1-at)^2} f'''(\eta) \right) = v \left(\frac{ax}{2H^3(1-at)^{\frac{5}{2}}} f^{iv}(\eta) - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{ax}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f''(\eta) \right) \end{aligned}$$

با ساده‌سازی رابطه فوق و تقسیم طرفین رابطه بر $\frac{2H^3(1-at)^{\frac{5}{2}}}{\nu ax}$ می‌توان نوشت:

$$f^{iv} - \frac{3aH^2}{2\nu} f'' + \frac{aH^2}{2\nu} (-\eta f''' - ff'' + ff''') - \frac{\sigma B_0^2 H^2 (1-at)}{\mu} f'' = 0 \quad (الف-۱۱)$$

و در نتیجه معادله مومنتوم حاکم در حل تشابهی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f^{iv} - S(\eta f''' + ff'' - ff''' + 3f'') - Mf'' = 0 \quad (\text{الف-۱۲})$$

پیوست ب. استخراج معادله انرژی

دمای بی بعد را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

(ب-۱)

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{y}{H\sqrt{1-at}}, \quad \theta(\eta) = \frac{T-T_h}{T_w-T_h} \\ \Rightarrow T &= (T_w - T_h)\theta(\eta) + T_h \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial [(T_w - T_h)\theta(\eta) + T_h]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{(T_w - T_h)\eta a}{2(1-at)} \theta' \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial [(T_w - T_h)\theta(\eta) + T_h]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial [(T_w - T_h)\theta(\eta) + T_h]}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(T_w - T_h)}{H\sqrt{1-at}} \theta' \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{(T_w - T_h)}{H\sqrt{1-at}} \theta' \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{(T_w - T_h)}{H^2(1-at)} \theta'' \end{aligned}$$

با جای گذاری روابط فوق در معادله (الف-۱) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{(T_w - T_h)\eta a}{2(1-at)} \theta' - \frac{aH}{2\sqrt{1-at}} f \frac{(T_w - T_h)}{H\sqrt{1-at}} \theta' &= \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{(T_w - T_h)}{H^2(1-at)} \theta'' \right] + \quad (\text{ب-۲}) \\ \frac{\mu}{\rho c_p} \left[\frac{4a^2}{4(1-at)^2} f'^2 + \left(\frac{ax}{2H(1-at)^{\frac{3}{2}}} f'' \right)^2 \right] &+ \frac{\sigma B_0^2}{\rho c_p} \left(\frac{ax}{2(1-at)} f' \right)^2 \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر $\frac{k}{\rho c_p} \frac{(T_w - T_h)}{H^2(1-at)}$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{a\rho c_p H^2}{2k} [\eta\theta' - f\theta'] &= \theta'' + \frac{\mu a^2 H^2}{k(T_w - T_h)(1-at)} f'^2 + \frac{\mu a^2 x^2}{4k(T_w - T_h)(1-at)^2} f''^2 + \quad (\text{ب-۳}) \\ \frac{\sigma B_0^2 H^2 a^2 x^2}{4k(T_w - T_h)(1-at)} &f'^2 \end{aligned}$$

پارامترهای بی بعد زیر را می توان تعریف نمود.

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}, \quad \text{Ec} = \frac{1}{c_p(T_w - T_h)} \left(\frac{ax}{2(1-at)} \right)^2, \quad \delta = \frac{h(t)}{x} = \frac{2H\sqrt{(1-at)}}{x} \quad (\text{ب-۴})$$

که Ec عدد پرانتل، Pr عدد پراکت و δ پارامتر ارتفاع است.

جای گذاری روابط (ب-۴) در معادله (ب-۳):

$$\theta'' + Pr S (f \theta' - \eta \theta') + Pr Ec (f'^2 + 4\delta^2 f'^2 + M f'^2) = 0 \quad (\text{ب-۵})$$

پیوست ج. حل معادله تکانه با روش کولوکیشن

تابع آزمون زیر برای حل معادله تکانه در نظر گرفته می شود.

$$f(\eta) = (2\eta - \eta^2)^2 + c_1(\eta - \eta^2)^2 + c_2(\eta - \eta^3)^2 + c_3(\eta - \eta^4)^2 + c_4(\eta - \eta^5)^2 \quad (\text{ج-۱})$$

پاسخ تقریبی فوق، شرایط مرزی سرعت را برآورده می کند. از جای گذاری معادله (ج-۱) در معادله دیفرانسیل (الف-۹)، معادله باقی مانده ظاهر می شود.

(ج-۳)

$$\begin{aligned} R_1(\eta) = & 24 - 8Sc_1(c_2 + c_3 + c_4)\eta + 8Sc_1c_2\eta^3 + 144Sc_1c_2\eta^5 - 20Sc_1c_3\eta^4 - 96Sc_1c_4\eta^5 + \dots \\ & + 112Sc_1c_3\eta^6 + 40Sc_1c_3\eta^9 - 8Sc_2c_3\eta - 20Sc_2c_3\eta^4 + 208Sc_2c_3\eta^7 + 16Sc_2c_3\eta^3 - 224Sc_2c_3\eta^6 + \dots \\ & - 450Sc_2\eta^4 + 232Sc_3\eta^3 - 392Sc_3\eta^6 - 232Sc_1\eta^3 + 288Sc_2\eta^5 + 832Sc_3\eta^7 + 180Sc_1\eta^4 - 504Sc_3\eta^8 + \dots \\ & + 16Sc_2^2\eta^3 - 48Sc_2^2\eta^5 + 96Sc_2^2\eta^7 - 60Sc_2^2\eta^9 - 4Sc_3^2\eta - 20Sc_3^2\eta^4 + 48Sc_3^2\eta^7 + 88Sc_3^2\eta^{10} + \dots \\ & + 40Mc_3\eta^3 - 56Mc_3\eta^6 - 240c_3\eta - 24S\eta^5 - 6Sc_3 + 120S\eta^4 - 6Sc_2 - 224S\eta^3 - 6Sc_1 + 132S\eta^2 + \dots \\ & - 12M\eta^2 - 2Mc_1 - 2Mc_2 - 2Mc_3 + 360c_2\eta^2 + 1680c_3\eta^4 - 48c_2 + 24c_1 - 8M - 24S = 0 \end{aligned}$$

برای یافتن ضرایب ثابت c_1 تا c_4 در فاصله $0 < \eta < 1$ ، این بازه را به ۵ قسمت مساوی تقسیم نموده و معادله باقی مانده را برای نقاط داخلی بازه می نویسیم:

$$R_1\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \quad R_1\left(\frac{2}{5}\right) = 0, \quad R_1\left(\frac{3}{5}\right) = 0, \quad R_1\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad (\text{ج-۴})$$

با استفاده از روابط (ج-۵)، معادله ۴ و مجهول ایجاد می شود که با استفاده از نرم افزار میپل ثابت های c_1, c_2, c_3, c_4 به ازای مقادیر مختلف M و S به دست می آید. با جای گذاری ثابت های c_1, c_2, c_3, c_4 در رابطه (ج-۱)، $f(\eta)$ به دست خواهد آمد.

برای $S=1.5$ ، $M=0.5$ و $\delta=0.3$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} RI_1 := & -2.249844326c_2c_3 - 2.234158940c_2c_4 - 2.491063675c_3c_4 - 1.136271360c_1c_3 \\ & - 1.083801600c_1c_2 - 1.099950981c_1c_4 + 1.26848000 - 1.247065021c_3^2 \\ & - 1.029242880c_2^2 - 1.245864960c_4^2 - 0.2995200000c_1^2 - 44.42247135c_4 \\ & - 59.39751424c_3 - 42.93468160c_2 + 22.42496000c_1 = 0 \end{aligned}$$

$$RI_2 := 21.45536000 - 4.021855027c_2c_3 - 4.207513928c_2c_4 - 6.672605677c_3c_4 \\ - 1.083248640c_1c_3 - 0.786124800c_1c_2 - 0.9501194650c_1c_4 - 3.037321426c_3^2 \\ - 1.388943360c_2^2 - 3.764505906c_4^2 - 0.080640000c_1^2 - 102.1878141c_4 \\ - 54.09925632c_3 + 14.65771520c_2 + 29.10272000c_1 = 0$$

$$RI_3 := 37.07264000 - 4.575087821c_2c_3 - 7.061656044c_2c_4 - 14.46161818c_3c_4 \\ - 1.089515520c_1c_3 - 0.195379200c_1c_2 - 1.884464087c_1c_4 - 4.893726936c_3^2 \\ - 0.890634240c_2^2 - 10.61050966c_4^2 + 0.080640000c_1^2 - 1.934242000c_4 \\ + 96.4918016c_3 + 98.1367808c_2 + 29.42528000c_1 = 0$$

$$RI_4 := 44.77952000 + 5.07419197c_2c_3 + 3.67299033c_2c_4 + 2.75130338c_3c_4 \\ + 1.928601600c_1c_3 + 1.535385600c_1c_2 + 1.4545089c_1c_4 + 2.948988807c_3^2 \\ + 2.014433280c_2^2 - 1.694333737c_4^2 + 0.299520000c_1^2 + 904.6960590c_4 \\ + 520.1613363c_3 + 189.8022656c_2 + 23.62304000c_1 = 0$$

در نتیجه ضرایب برابر مقادیر زیر خواهد بود:

$$\{c_1 = -0.4710891548, c_2 = -0.3280984128, c_3 = 0.09280371392, c_4 = -0.02209865150\}$$

و تابع آزمون نیز خواهد شد:

$$f := (2\eta - \eta^2)^2 - 0.4710891548(\eta - \eta^2)^2 - 0.3280984128(\eta - \eta^3)^2 \\ + 0.09280371393(\eta - \eta^4)^2 - 0.02209865151(\eta - \eta^5)^2$$

پیوست د. حل معادله انرژی با روش کولوکیشن

تابع آزمون $\theta(\eta)$ را یک چند جمله‌ای برحسب η انتخاب می‌کنیم.

$$\theta(\eta) = (1-\eta) + b_1\eta(1-\eta) + b_2\eta(1-\eta^2) + b_3\eta(1-\eta^3) + b_4\eta(1-\eta^4) + b_5\eta(1-\eta^5) \quad (۱-د)$$

پاسخ تقریبی فوق، شرایط مرزی حرارتی را برآورده کرده است. با جای‌گذاری معادله (۱-د) در معادله دیفرانسیل (الف-۱) و به‌ازای پارامترهای دلخواه $S = M = 1$ معادله باقی‌مانده به‌صورت زیر ظاهر می‌شود.

(۲-د)

$$R_2(\eta) = -290.523375Pr Ec\delta^2\eta^2 + 481.086460Pr Ec\delta^2\eta^4 - 437.360409Pr Ec\delta^2\eta^3 + \\ 165.3254771Pr Ec\delta^2\eta^2 + 35.1431896Pr Ec\delta^2\eta^6 - 8.6510427Pr Ec\delta^2\eta^8 + \\ 15.6928149Pr Ec\delta^2\eta^{10} + 70.1351055Pr Ec\delta^2\eta^7 - 31.2285785Pr Ec\delta^2\eta^9 - \\ 11.1499947Pr Ec\delta^2\eta^{12} + 8.1164101Pr Ec\delta^2\eta^{11} + 3.1102521Pr Ec\delta^2\eta^{14} - \\ 0.766286Pr Ec\delta^2\eta^{16} + 0.957858Pr Ec\delta^2\eta^{13} + 0.112119Pr Ec\delta^2\eta^{18} - Pr b_2\eta + \\ 0.932465Pr b_3\eta^4 - 2.834577Pr b_3\eta^3 - 2.834577Pr b_4\eta^3 - 9.263525Pr b_1\eta^3 + \\ 0.93246Pr b_4\eta^4 - 13.00092Pr b_3\eta^5 + 3.21447Pr b_4\eta^2 - 8.71095Pr b_2\eta^4 + \dots +$$

$$20.53356 \text{Pr} Ec \eta^9 + 33.51213 \text{Pr} Ec \eta^{12} + 10.64982 \text{Pr} Ec \eta^{11} - 11.29144 \text{Pr} Ec \eta^{14} + \\ 2.078856 \text{Pr} Ec \eta^{16} + 0.239464 \text{Pr} Ec \eta^{13} + 0.028029 \text{Pr} Ec \eta^{18} - 2b_1 = 0$$

برای یافتن ضرایب ثابت b_1 تا b_5 در فاصله $0 < \eta < 1$ ، این بازه را به ۶ قسمت مساوی تقسیم نموده و معادله باقی مانده را برای نقاط داخلی بازه می نویسیم:

$$R_2\left(\frac{1}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{2}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{3}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{4}{6}\right) = 0, \quad R_2\left(\frac{5}{6}\right) = 0 \quad (3-د)$$

با استفاده از روابط (۳-د)، پنج معادله و پنج مجهول ایجاد می شود که با استفاده از نرم افزار میپل ثابت های b_0, b_1, \dots, b_5 به ازای مقادیر مختلف δ ، Pr و Ec به دست می آید. با جایگذاری ثابت های b_0, b_1, \dots, b_5 در رابطه (د-۱)، توزیع دمای بی بعد $\theta(\eta)$ به دست می آید.
برای $S=1.5$ ، $M=0.5$ و $\delta=0.3$ ، $\text{Pr}=1$ ، $Ec=0.3$ خواهیم داشت:

$$R_{2_1} := -0.1566399064 b_5 - 0.2256720210 b_4 - 0.4644541954 b_3 - 1.122461937 b_2 \\ - 2.089063227 b_1 + 6.335420001 = 0$$

$$R_{2_2} := 1.958625683 - 0.4721817242 b_5 - 0.8386858409 b_4 - 1.422257174 b_3 \\ - 2.069592571 b_2 - 2.034796286 b_1 = 0$$

$$R_{2_3} := 0.7384031906 - 1.875212504 b_5 - 2.500179812 b_4 - 3.000130772 b_3 \\ - 3.000065386 b_2 - 2.000000001 b_1 = 0$$

$$R_{2_4} := 1.750067773 - 5.904113412 b_5 - 5.924642838 b_4 - 5.352579671 b_3 - 4.034643404 b_2 \\ - 2.034643405 b_1 = 0$$

$$R_{2_5} := -14.65567404 b_5 - 11.76215553 b_4 - 8.508560673 b_3 - 5.144377454 b_2 \\ - 2.088847662 b_1 + 6.042156422 = 0$$

در نتیجه ضرایب برابر مقادیر زیر خواهد بود:

$$\{b_1 = 8.206126366, b_2 = -14.54497953, b_3 = 15.68816760, b_4 = -10.22800861, b_5 \\ = 3.448860512\}$$

و تابع آزمون نیز خواهد شد:

$$\theta := 1 - \eta + 8.206126366 \eta (1 - \eta) - 14.54497953 \eta (-\eta^2 + 1) + 15.68816760 \eta (-\eta^3 \\ + 1) - 10.22800861 \eta (-\eta^4 + 1) + 3.448860512 \eta (-\eta^5 + 1)$$