

Vol. 11/ No. 43/Spring 2022

Hyperspectral Image Classification Using Low Rank Representation and Spectral-Spatial Information

Fatemeh Hajiani, PhD Student¹  | Naser Parhizgar, Assistant Professor²  | Ahmad Keshavarz, Associate Professor³ 

¹Department of Electrical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran, fateme_hajiani@yahoo.com

²Department of Electrical Engineering, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran, n.parhizgar47@gmail.com

³IoT and Signal Processing Research Group, ICT Research Institute, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, 7516913817 Bushehr, Iran, a.keshavarz@pgu.ac.ir

Correspondence

Naser Parhizgar, Assistant Professor of Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran.
Email: n.parhizgar47@gmail.com

Received: 17 December 2021

Revised: 16 January 2022

Accepted: 18 February 2022

Abstract

Classification of hyperspectral images is one of the most important processes on these images. Hyperspectral images are high dimensional, so classification of these images is difficult. Therefore, methods that extract low-dimensional subspace structures from the hyperspectral image are considered. The low-rank representation method can extract the low-dimensional subspace structure in the data. This method considers the global structure of the data. In this paper, to preserve the global and local structure in the data, sparse and low-rank representation feature extraction method based on spectral and spatial information is presented. The data structure is better revealed using this model, and the discrimination of the features is increased. In this model, each pixel is expressed by a linear combination of dictionary atoms. In addition, to solve the optimization problem, the alternating direction method of multipliers has been used. The simulation results show that the proposed model has better results than other methods. For Indian hyperspectral dataset, the proposed method has improved accuracy by more than 1.4% compared to the state of the art methods.

Keywords: Hyperspectral Image, Low-Rank Representation, Classification, Sparse Representation.

Highlights

- Extracting the Low-dimensional structure from data
- Sparse and Low-rank representation feature extraction based on the spectral and spatial information
- Preserving the global and local structure in the data
- Using dictionary learning to generate a suitable dictionary

Citation: F. Hajiani, N. Parhizgar, and A. Keshavarz, "Hyperspectral Image Classification Using Low-Rank Representation and Spectral-Spatial Information," *Journal of Communication Engineering (JCE)*, vol. 11, no. 43, pp. 27–38, 2022, (in Persian).

طبقه بندی تصاویر ابرطیفی با استفاده از نمایش رتبه پایین و اطلاعات طیفی - مکانی

فاطمه حاجیانی^۱ | ناصر پرهیزگار^{۲*} | احمد کشاورز^۳

چکیده:

طبقه بندی تصاویر ابرطیفی از مهم ترین پردازش هایی است که بر روی این تصاویر انجام می شود. تصاویر ابرطیفی دارای ابعاد بالایی هستند و این امر طبقه بندی این تصاویر را با مشکل مواجه کرده است. از این رو روش هایی که ساختار زیرفضا با بعد پایین را از تصویر ابرطیفی استخراج کنند مورد توجه قرار می گیرند. روش نمایش رتبه پایین می تواند ساختار زیرفضا با بعد پایین را که در داده ها وجود دارد استخراج کند. این روش ساختار سراسری داده ها را در نظر می گیرد. به منظور حفظ ساختار سراسری و محلی در داده ها در این مقاله روش استخراج ویژگی نمایش رتبه پایین و تنک بر مبنای اطلاعات طیفی و مکانی ارائه شده است. با اعمال این مدل ساختار داده بهتر آشکار می شود و قدرت تمایز ویژگی های آن افزایش می یابد. در این مدل هر پیکسل به صورت ترکیب خطی از مؤلفه های دیکشنری بیان می شود. به علاوه برای حل مسئله به صورت بهینه از روش جهتی متناوب مضارب استفاده شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که مدل پیشنهادی نتایج بهتری را نسبت به روش های دیگر به دست آورده است. به طوری که برای داده های ابرطیفی ایندیانا روش پیشنهادی توانسته دقتی بیش از ۱/۴٪ را نسبت به روش های جدید به دست آورد.

کلید واژه ها: تصویر ابرطیفی، نمایش رتبه پایین، طبقه بندی، نمایش تنک

^۱ گروه برق، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران،
 fateme_hajiani@yahoo.com

^۲ گروه برق، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران،
 n.parhizgar47@gmail.com

^۳ گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی سیستم های هوشمند
 و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس بوشهر،
 a.keshavarz@pgu.ac.ir

نویسنده مسئول

* ناصر پرهیزگار، استادیار، گروه برق، واحد شیراز، دانشگاه آزاد
 اسلامی، شیراز، ایران، n.parhizgar47@gmail.com

تاریخ دریافت: ۲۶ آذر ۱۴۰۰

تاریخ بازنگری: ۲۶ دی ۱۴۰۰

تاریخ پذیرش: ۲۹ بهمن ۱۴۰۰

۱- مقدمه

سنجنده های ابرطیفی نوع خاصی از سنجنده های طیف سنجی هستند که پهنای باند مورد نظر را به صدها باند باریک مجاور هم تقسیم می کنند. در دسترس قرار گرفتن سنجنده هایی با توان تفکیک طیفی بالا و تعداد باند زیاد، دستیابی به جزئیات بیشتر در مورد کلاس ها را امکان پذیر ساخته و باعث افزایش دقت و اعتبار طبقه بندی کننده ها شده است. با توجه به تعداد زیاد باندها کاربردهای بسیار زیادی برای تصاویر ابرطیفی وجود دارد [۱]. یکی از پردازش های مهمی که بر روی تصاویر ابرطیفی انجام می شود طبقه بندی این تصاویر است [۲-۳]. اگرچه اطلاعات طیفی غنی برای هر پیکسل کمک زیادی به طبقه بندی داده های ابرطیفی می کند، اما چالش های زیادی را در طبقه بندی این تصاویر به وجود می آورد. با توجه به صدها باند طیفی، داده های ابرطیفی دارای ابعاد بسیار بالایی هستند که منجر به پدیده هیوز می شود [۴]. برای رفع این مشکلات، تعداد زیادی از رویکردهای مبتنی بر ماشین بردار پشتیبان SVM^۱ وجود دارد که در طول سال های گذشته توسعه یافته است. ماشین بردار پشتیبان یک طبقه بندی کننده ی پرکاربرد در اکثر مسئله های طبقه بندی است و توانسته است موفقیت بسیاری را در طبقه بندی تصاویر ابرطیفی به دست آورد. SVM با هسته مرکب SVMCK^۲ برای ساخت چندین هسته مرکب پیشنهاد شده است که با ترکیب

^۱ Support vector machine

^۲ SVM with composite kernel

اطلاعات طیفی و مکانی عملکرد طبقه‌بندی‌کننده را بهبود می‌بخشد [۵]. اخیراً روش‌های نمایش تنک^۳ به منظور طبقه‌بندی تصاویر ابرطیفی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۶]. این روش‌ها با در نظر گرفتن این نکته که پیکسل‌های متعلق به یک کلاس در یک زیرفضای با بعد پایین قرار دارند، تصویر را طبقه‌بندی می‌کنند. این زیرفضاها به وسیله داده‌های آموزش محاسبه می‌شوند و پیکسل‌های آزمون می‌توانند به وسیله ترکیبی از مؤلفه‌های دیکشنری نمایش داده شوند. در [۷] یک روش هموتوپ^۴ بر مبنای نمایش رتبه پایین پیشنهاد شده است که با تعداد کم نمونه آموزشی، تصویر ابرطیفی را طبقه‌بندی می‌کند. در برخی مقالات با استخراج اطلاعات مکانی ضرایب تنک را استخراج می‌شوند. در [۸] یک مدل تنک مشترک ارائه شده است که در آن، از همبستگی میان پیکسل‌های همسایه در به دست آوردن بردارهای ضرایب تنک استفاده شده است. مقاله [۹] با ارائه یک نمایش تنک هسته توانسته دقت بهتری را نسبت به الگوریتم‌های طبقه‌بندی بر مبنای نمایش تنک به دست آورد. نمایش تنک عملکرد مناسبی را در طبقه‌بندی دارد اما این روش فقط اطلاعات محلی داده‌ها را در نظر می‌گیرد [۱۰]. روش نمایش رتبه پایین^۵ LRR به عنوان یک روش کارآمد برای به دست آوردن ساختار با بعد پایین در داده ارائه شده است و توانسته موفقیت‌های بسیاری را در زمینه‌ی طبقه‌بندی تصاویر ابرطیفی به دست آورد [۱۱]. روش نمایش رتبه پایین همبستگی میان کل پیکسل‌ها را استخراج می‌کند و به عبارتی می‌تواند ساختار سراسری داده‌ها را در نظر بگیرد [۱۰]. با توجه به محدودیت‌های نمایش تنک در این مقاله یک طبقه‌بندی‌کننده نمایش رتبه پایین با محدودیت سازگاری طیفی و یادگیری دیکشنری پیشنهاد شده است. با در نظر گرفتن این نکته که در تصاویر ابرطیفی پیکسل‌های کلاس‌های مختلف از ترکیب چندین زیرفضا به وجود آمده است، در این روش نمایش رتبه پایین [۱۱] همبستگی همه‌ی پیکسل‌ها را در نظر می‌گیرد و همچنین با ترکیب مدل نمایش رتبه پایین و تنک ساختار سراسری و محلی داده‌ها به طور هم‌زمان حفظ می‌شود. علاوه بر این، با الهام از ایده‌ی به کارگیری اطلاعات محلی [۱۲]، یک قید سازگاری محلی توسط یک تطبیق‌گر محلی به مدل اعمال می‌شود که بر اساس آن، وزن‌های متفاوتی برای نمونه آزمون متناسب با شباهت آن به هر نمونه آموزشی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، می‌توان اطمینان حاصل کرد که پیکسل‌های ابرطیفی مشابه دارای بردارهای ضریب و ویژگی مشابه‌ای خواهند بود. هر پیکسل در تصویر به صورت ترکیب خطی از مؤلفه‌های دیکشنری بیان می‌شود، بنابراین انتخاب دیکشنری مناسب نقش مهمی در تعیین ضرایب ویژگی دارد. در این مقاله از یادگیری دیکشنری برای ایجاد دیکشنری مناسب استفاده می‌شود.

در این مقاله در بخش دوم به طور مختصر در مورد کارهای انجام‌شده بحث خواهد شد. روش پیشنهادی در بخش سوم به طور کامل شرح داده می‌شود. در بخش چهارم نتایج آزمایش و ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری این مقاله بیان می‌شود.

۲- مروری بر کارهای انجام‌شده

در این بخش نمایش رتبه پایین و یادگیری دیکشنری به طور مختصر بررسی خواهد شد.

۲-۱- نمایش رتبه پایین

نمایش رتبه پایین این موضوع را بیان می‌کند که هر داده به طور تقریبی از اجتماع چندین زیرفضای با بعد پایین تشکیل شده است. ماتریس داده‌های مشاهده $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^{d \times n}$ به صورت مجموعه‌ای از n نمونه از فضای d بعدی در نظر گرفته می‌شود. در صورتی که ماتریس مشاهده تحت تأثیر نویز E قرار گیرد، هدف مدل رتبه پایین جستجوی نمایش رتبه پایین $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و نویز تنک $E \in \mathbb{R}^{d \times n}$ بر مبنای دیکشنری D است. نمایش رتبه پایین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min_{Z, E} \|Z\|_* + \lambda \|E\|_1, \quad s.t. \quad Y = DZ + E \quad (1)$$

به طوری که $\| \cdot \|_*$ نرم هسته‌ای می‌باشد و برابر با مجموع مقادیر تکین است. $\| \cdot \|_1$ معیار تنک بودن را بیان می‌کند.

^۳ Sparse representation

^۴ Homotopy

^۵ Low-rank representation

۲-۲- یادگیری دیکشنری

با توجه به اینکه LRR تا حد زیادی ساختار سراسری داده‌ها را حفظ می‌کند، در برخی موارد نسبت به روش تنک برتری دارد. در هر دو روش نمایش رتبه پایین و نمایش تنک فرض می‌شود که می‌توان هر نمونه را به صورت ترکیب خطی از مؤلفه‌های یک دیکشنری توصیف نمود و انتخاب مناسب این دیکشنری بر عملکرد آن‌ها تأثیر بسزایی دارد. به طور کلی، روش‌های یادگیری دیکشنری را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: (۱) یادگیری دیکشنری بر اساس مدل ریاضی. از این دسته دیکشنری‌ها می‌توان به مدل موجک، فوریه، تبدیل کسینوسی گسسته و خمک و یا ترکیبی از این روش‌ها اشاره کرد [۱۳-۱۴]. (۲) ساخت دیکشنری بر مبنای به کارگیری نمونه‌های آموزشی. از مزایای این دسته می‌توان به تطابق بهتر آن با محتوای آموزش و به دست آوردن نتایج تجربی مناسب در بیشتر کاربردهای عملی اشاره کرد. از انواع این روش‌ها می‌توان جهت‌های بهینه^۶ MOD [۱۵]، K-SVD [۱۶] و غیره را نام برد. در [۱۷] یک روش یادگیری دیکشنری ارائه شده است. در این مقاله تصویر ابرطیفی را به گروه‌هایی از همسایگی تقسیم کرده و سپس پیکسل‌ها به صورت زیرفضای مشترک از همان گروه، مدل‌سازی شده است. در [۱۸] یک مدل نمایش رتبه پایین مشترک در هر گروه مکانی برای به دست آوردن دیکشنری مناسب اعمال شده است.

۳- روش پیشنهادی

۳-۱- مدل پیشنهادی

تصویر ابرطیفی با مجموعه‌ای از m نمونه آزمون از فضای d بعدی و c کلاس به صورت $X=[x_1, x_2, \dots, x_n] \in R^{d \times m}$ در نظر گرفته می‌شود. برای نمایش مکانی پیکسل‌های تصویر در این مقاله از الحاق ممان اول و دوم پیکسل‌های اطراف هر پیکسل $Y=[y_1, y_2, \dots, y_m]$ استفاده می‌شود. در نمایش رتبه پایین، نمونه آزمون با استفاده از ترکیب خطی مؤلفه‌های دیکشنری به صورت $Y=DZ$ تعریف می‌شود. در این رابطه Z ماتریس ویژگی‌ها است و ساختار سراسری داده را حفظ می‌کند [۱۱]. با در نظر گرفتن هم‌زمان تنک و رتبه پایین بودن، می‌توان مدلی به فرم زیر تعریف کرد:

$$\min_{Z, E} \|Z\|_* + \beta \|Z\|_1 + \lambda \|E\|_1 \quad (2)$$

$$s. t \quad Y = DZ + E, \quad Z \geq 0$$

در ای مقاله یک قید سازگاری طیفی به همراه یادگیری دیکشنری به مدل اضافه شده و رابطه (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\min_{Z, E, D} \|C \odot Z\|_* + \beta \|C \odot Z\|_1 + \lambda \|E\|_1 \quad (3)$$

$$s. t \quad Y = DZ + E$$

به طوری که C تطبیق گر محلی و \odot ضرب المان به المان می‌باشد. زمانی که نمونه‌های آزمون مشابه نمونه‌های آموزشی باشد، C مقدار کوچکی خواهد داشت در غیر این صورت مقدار بزرگی دارد. قید طیفی C در رابطه (۳) به منظور تضمین تولید ویژگی‌های مشابه با نمونه‌های آزمون اضافه شده است. ماتریس ضرایب ویژگی Z دارای ساختاری تنک، رتبه پایین است و مهم‌تر از این موارد، با انتخاب مناسب C ، Z دارای ساختار بلوکی است. C رابطه‌ی بین نمونه‌های آموزشی و آزمون را نشان می‌دهد و با استفاده از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$C_{ij} = 1 - \left(1 - \left(\frac{\text{dist}(y_i, x_j)}{a} \right)^2 \right)^2 \quad (4)$$

به طوری که $a = \max_{v_i} \{\text{dist}(y_i, x_i)\}$ و $\text{dist}(y_i, x_i)$ بر فاصله اقلیدسی بین x_i و y_i دلالت دارد. هدف این رابطه ایجاد ویژگی‌هایی با ساختار بلوکی است. استفاده از قید سازگاری طیفی باعث ایجاد ویژگی‌هایی با تمایز بالا شده است.

^۶ Method of optimal directions

۳-۲- بهینه‌سازی

برای حل رابطه (۳) روش جهتی متناوب استفاده شده است [۱۹]. در این روش، پارامترها به صورت تکراری به روزرسانی می‌شوند. با تعریف دو متغیر کمکی \mathbf{J} و \mathbf{W} تابع هدف (۳) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{E}, \mathbf{D}} \|\mathbf{C} \odot \mathbf{J}\|_* + \beta \|\mathbf{C} \odot \mathbf{W}\|_1 + \lambda \|\mathbf{E}\|_1 \quad (5)$$

$$s.t \quad \mathbf{Y} = \mathbf{DZ} + \mathbf{E}, \mathbf{Z} = \mathbf{J}, \mathbf{Z} = \mathbf{W}$$

تابع لاگرانژ رابطه ۵ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$L(\mathbf{J}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{D}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3) \quad (6)$$

$$= \|\mathbf{C} \odot \mathbf{J}\|_* + \beta \|\mathbf{C} \odot \mathbf{W}\|_1 + \lambda \|\mathbf{E}\|_1 + \langle \mathbf{D}_1, \mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{D}_2, \mathbf{Z} - \mathbf{J} \rangle$$

$$+ \langle \mathbf{D}_3, \mathbf{Z} - \mathbf{W} \rangle + \frac{\mu}{2} (\|\mathbf{Y} - \mathbf{DZ} - \mathbf{E}\|_F^2 + \|\mathbf{Z} - \mathbf{J}\|_F^2 + \|\mathbf{Z} - \mathbf{W}\|_F^2)$$

\mathbf{D}_1 ، \mathbf{D}_2 و \mathbf{D}_3 ضرایب لاگرانژ و μ پارامتر جریمه است. روش جهتی متناوب به صورت تکراری متغیرها را به روزرسانی می‌کند. هر متغیر با ثابت در نظر گرفتن بقیه متغیرها محاسبه می‌شود. به روزرسانی متغیرها به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\mathbf{J}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{J}} \|\mathbf{C} \odot \mathbf{J}\|_* + \frac{\mu}{2} \left\| \mathbf{J} - \left(\mathbf{Z}^k + \frac{\mathbf{D}_2^k}{\mu_k} \right) \right\|_F^2 = \Theta_{\frac{1}{\mu_k}} \left(\mathbf{Z}^k + \frac{\mathbf{D}_2^k}{\mu_k} \right) \quad (7)$$

به طوری که $\Theta_{\tau}(\mathbf{O}) = \mathbf{U} \mathbf{S}_{\tau}(\Sigma) \mathbf{V}^T$ بیانگر آستانه مقدار تکین و Σ ماتریس قطری شامل مقادیر تکین است. با توجه به متغیر \mathbf{C} حل این مسئله مشکل است و برای حل آن از روشی که در [۲۰] ارائه شده است، استفاده می‌شود.

لم ۱: در صورتی که $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ باشد رابطه‌ی زیر برقرار خواهد بود:

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \quad (8)$$

و به طور تقریبی می‌توان رتبه ماتریس را با استفاده از نرم $\|\cdot\|_*$ این رابطه به دست آورد.

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \approx \|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\|_* = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \quad (9)$$

$\|\mathbf{C} \odot \mathbf{J}\|_*$ در (۳) جایگزینی برای تابع رتبه‌ی $(\mathbf{C} \odot \mathbf{J})$ است و می‌توان آن را با توجه به رابطه ۹ به صورت زیر بیان کرد:

$$\|\mathbf{C} \odot \mathbf{J}\|_* \approx \|(\mathbf{C} \odot \mathbf{J})^T (\mathbf{C} \odot \mathbf{J})\|_* = \text{tr}((\mathbf{C} \odot \mathbf{J})^T (\mathbf{C} \odot \mathbf{J})) \quad (10)$$

با در نظر گرفتن این روابط \mathbf{J} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{J}^{k+1} = (\mu \mathbf{Z}^k + \mathbf{D}_2^k) \oslash (2(\mathbf{C} \odot \mathbf{C}) + \mu \mathbf{1}) \quad (11)$$

به طوری که \oslash بیانگر تقسیم المان به المان و $\mathbf{1}$ ، یک ماتریس تمام یک است.

روابط \mathbf{W} ، \mathbf{Z} و \mathbf{E} به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{W}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{W}} \frac{\beta}{\mu_k} \|\mathbf{C} \odot \mathbf{W}\|_1 + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{W} - \left(\mathbf{Z}^k + \frac{\mathbf{D}_3^k}{\mu_k} \right) \right\|_F^2 = S_{\frac{\beta}{\mu_k}} \left(\mathbf{Z}^k + \frac{\mathbf{D}_3^k}{\mu_k} \right) \quad (12)$$

$$\mathbf{Z}^{k+1} = (\mathbf{D} \mathbf{D}^T + 2\mathbf{I})^{-1} \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{E}^k) + \mathbf{J}^{k+1} + \mathbf{W}^{k+1} + \frac{\mathbf{D}^T \mathbf{D}_1^k - \mathbf{D}_2^k - \mathbf{D}_3^k}{\mu_k} \right) \quad (13)$$

$$\mathbf{E}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{E}} \frac{\lambda}{\mu_k} \|\mathbf{E}\|_1 + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{E} - \left(\mathbf{Y} - \mathbf{DZ}^{k+1} + \frac{\mathbf{D}_1^k}{\mu_k} \right) \right\|_F^2 = S_{\frac{\lambda}{\mu}} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{DZ}^{k+1} + \frac{\mathbf{D}_1^k}{\mu_k} \right) \quad (14)$$

$\mathbf{T}_{ij} = (\beta/\mu) \mathbf{c}_{ij}$ به طوری که عملگر آستانه نرم است $\mathbf{S}_{\tau}(x) = \text{sgn}(x) \max(|x| - \tau, 0)$ است.

برای دیکشنری اولیه از نمونه‌های آموزشی استفاده می‌شود و با ثابت نگه‌داشتن دیگر متغیرها، \mathbf{D} به صورت زیر به روزرسانی می‌شود:

$$\mathbf{D}^U = \underset{\mathbf{D}}{\operatorname{argmin}} \frac{\mu_k}{2} \left\| \mathbf{Y} - \mathbf{D}^k \mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{E}^{k+1} + \frac{\mathbf{D}_1^k}{\mu_k} \right\|_F^2 = \frac{1}{\mu_k} \left(\mathbf{D}_1^k + \mu_k (\mathbf{Y} - \mathbf{E}) \right) \mathbf{Z}^T (\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T)^{-1} \quad (15)$$

در نهایت دیکشنری به استفاده از رابطه‌ی زیر به روز می‌شود:

$$\mathbf{D}^{k+1} = \sigma \mathbf{D}^k + (1 - \sigma) \mathbf{D}^U \quad (16)$$

در این رابطه پارامتر σ برای کنترل مراحل به روزرسانی در نظر گرفته شده است. جدول ۱ الگوریتم روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

جدول ۱: حل مدل پیشنهادی با استفاده از الگوریتم روش جهت متناوب

الگوریتم ۱: حل مدل پیشنهادی با استفاده از الگوریتم روش جهت متناوب

ورودی: نمونه آموزشی، نمونه‌های آزمون، ماتریس \mathbf{C} و پارامترهای λ و β
 مقادیر اولیه: $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_3 = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{W}_0 = \mathbf{J}_0 = \mathbf{0}$ ، $\mu = 10^{-2}$ ، $\mu_{\max} = 10^6$ ، $\varepsilon = 10^{-5}$ ، $\rho = 1.1$ و $\max_{\text{iter}} = 100$
 مراحل زیر تا برقراری شرایط همگرایی یا $\max_{\text{iter}} \leq i$ تکرار شود.

محاسبه روابط \mathbf{J}^{k+1} ، \mathbf{W}^{k+1} ، \mathbf{Z}^{k+1} و \mathbf{E}^{k+1} بر اساس روابط (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) و (۱۶)

ضرایب لاگرانژ \mathbf{D}_1 ، \mathbf{D}_2 و \mathbf{D}_3 با استفاده از رابطه‌های زیر به روزرسانی شود:

$$\mathbf{D}_1^{k+1} = \mathbf{D}_1^k + \mu_k (\mathbf{Y} - \mathbf{D}\mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{E}^{k+1})$$

$$\mathbf{D}_2^{k+1} = \mathbf{D}_2^k + \mu_k (\mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{J}^{k+1})$$

$$\mathbf{D}_3^{k+1} = \mathbf{D}_3^k + \mu_k (\mathbf{Z}^{k+1} - \mathbf{W}^{k+1})$$

پایان

با استفاده از رابطه زیر پارامتر μ به روزرسانی شود.

$$\mu^{k+1} = \min(\mu_{\max}, \rho \mu^k)$$

شرایط همگرایی:

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{D}\mathbf{Z} - \mathbf{E}\|_{\infty} < \varepsilon, \quad \|\mathbf{Z} - \mathbf{J}\|_{\infty} < \varepsilon, \quad \|\mathbf{Z} - \mathbf{W}\|_{\infty} < \varepsilon$$

به روزرسانی:

$$k = k + 1$$

پایان

۴- طبقه‌بندی کننده نظارتی

در این تحقیق ویژگی‌های استخراج شده با استفاده از روش طبقه‌بندی کننده ماشین بردار پشتیبان به صورت نظارتی طبقه‌بندی می‌شوند. ماشین بردار پشتیبان یک طبقه‌بندی غیر آماری دودویی است. این روش نمونه‌هایی که در مرز کلاس‌ها قرار دارند را به دست می‌آورد و با استفاده از آن مرز تصمیم‌گیری بهینه را مشخص می‌کند [۲۱].

۵- نتایج آزمایش

در این بخش عملکرد روش پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. پس از معرفی داده‌های ابرطیفی مورد استفاده در این مقاله، نتایج روش پیشنهادی با نتایج تعدادی از الگوریتم‌های طبقه‌بندی دیگر مقایسه می‌شود. به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی نتایج کار با طبقه‌بندی کننده ماشین بردار پشتیبان که یکی از طبقه‌بندی کننده‌های موفق در تصاویر ابرطیفی است، مقایسه می‌شود [۲۲]. از دیگر طبقه‌بندی کننده‌ها می‌توان به ماشین بردار پشتیبان با کرنل ترکیبی SVMCK^y اشاره کرد [۵]. در [۲۳]

^y SVM with composite kernel

روش طبقه‌بندی‌کننده نمایش تنک وابسته به کلاس cdSRC^۸ ارائه شده است. در [۲۴] روش طبقه‌بندی‌کننده نمایش تنک مشترک مقاوم JRSRC^۹ پیشنهاد شده که پیکسل‌های موجود در یک منطقه همسایگی در اطراف پیکسل آزمایش به‌طور هم‌زمان به‌صورت تنک با استفاده از ترکیب خطی از تعدادی نمونه‌ی آموزشی نمایش داده می‌شوند. در [۱۸] یک مدل نمایش رتبه پایین مشترک^{۱۰} LGIDL ارائه شده است. در مقاله [۲۵] نیز برای هر بردار داده، LRR^{۱۱} به دنبال نمایش کمترین رتبه از میان مجموعه‌ای از نمونه داده به‌طور مشترک است.

۵-۱- داده‌های ابرطیفی

تصویر ایندیانا سال ۱۹۹۲ توسط سنجنده‌ی AVIRIS از یک منطقه کشاورزی- جنگلی در شمال شرقی ایالات ایندیانا گرفته شده است. این تصویر دارای ۲۲۰ باند طیفی با پهنای باند ۱۰ نانومتر که محدوده‌ی طول موج ۰,۴ تا ۲,۵ میکرومتر را پوشش می‌دهد و شامل ۱۴۵*۱۴۵ پیکسل با دقت مکانی ۲۰ متر بر پیکسل و دقت رادومتریک ۸ بیت است. در آزمایش‌ها ۲۰ باند نویزی آن حذف می‌شود. این تصویر دارای ۱۶ کلاس است. یکی دیگر از تصاویر ابرطیفی، تصویر دانشگاه پائوآ است. این تصویر در سال ۲۰۰۲ از محوطه‌ی دانشگاهی پائوآ در شمال ایتالیا جمع‌آوری شده است. این تصویر دارای ۳۴۰*۶۱۰ پیکسل با ۱۱۵ باند که بازه‌ی طول موج ۰,۴۳μm تا ۰,۸۳μm را پوشش می‌دهد. دقت مکانی آن نیز ۱,۳ متر بر پیکسل است. ۱۲ باند نویزی آن حذف شده و ۱۰۳ باند حفظ می‌شود. ۹ کلاس برای دادگان پائوآ در نظر گرفته شده است [۲۶]. جدول (۲) پوشش سطح و تعداد نمونه‌های استفاده شده در آزمون را نشان می‌دهد.

جدول ۲: پوشش سطح و تعداد نمونه‌های استفاده‌شده در آزمایش

ایندیانا		دانشگاه پائوآ	
کلاس	نوع پوشش زمین	تعداد نمونه‌ها	نوع پوشش زمین
۱	یونجه	۴۶	آسفالت
۲	ذرت سالم	۱۴۲۸	چمن
۳	ذرت آفت‌زده	۸۳۰	شن و ماسه
۴	ذرت در ابتدای رشد	۲۳۷	درخت
۵	چمن- مرتع	۴۸۳	ورقه‌های فلزی رنگ‌شده
۶	چمن- درخت	۷۳۰	خاک
۷	چمن- مرتع- درو شده	۲۸	قیر
۸	دسته‌های یونجه	۴۷۸	آجر
۹	جو	۲۰	سایه
۱۰	سویا سالم	۹۷۲	
۱۱	سویا آفت‌زده	۲۴۵۵	
۱۲	سویا در ابتدای رشد	۵۹۳	
۱۳	گندم	۲۰۵	
۱۴	چوب	۱۲۶۵	
۱۵	ساختمان - سبزه - درخت - ماشین	۳۸۶	
۱۶	برنج سنگ فولاد	۹۳	

^۸ Class-dependent sparse representation classifier

^۹ Joint robust sparse representation classifier

^{۱۰} Low rank group inspired dictionary learning

^{۱۱} Low rank representation

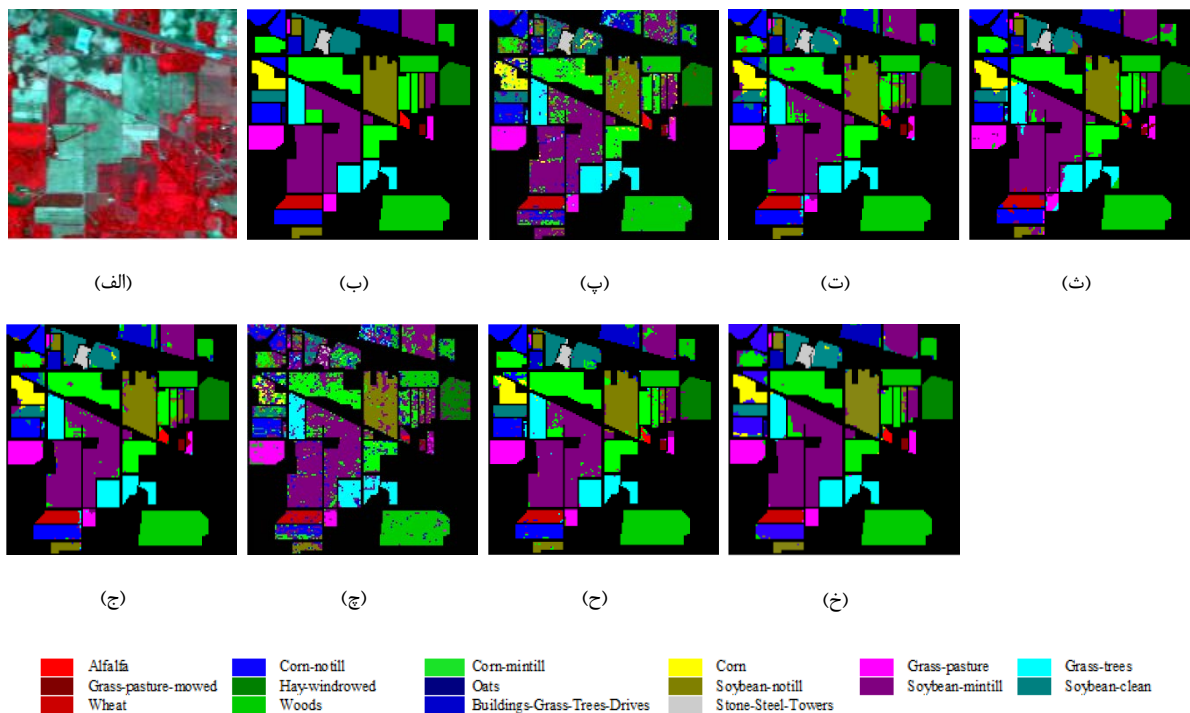
۵-۲- بررسی عملکرد روش پیشنهادی

داده ایندیانا:

۱۰٪ از نمونه‌ها به صورت تصادفی به عنوان نمونه آموزشی در نظر گرفته شده است و ۹۰٪ باقیمانده به عنوان نمونه‌های آزمون استفاده می‌شوند. روش‌های متفاوت طبقه‌بندی با استفاده از سه معیار دقت کل OA، دقت میانگین AA و ضریب کاپا K مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. جدول ۳ دقت طبقه‌بندی ویژگی‌های استخراج شده پیشنهادی و روش‌های گفته شده در بخش قبل را نشان می‌دهد. روش‌های طبقه‌بندی SVM و LRR به دلیل اینکه که فقط از اطلاعات طیفی استفاده می‌کنند دقت پایین تری را نسبت به روش‌های دیگر به دست آورده‌اند. در کنار این موضوع روش LRR با توجه به اینکه فقط ساختار سراسری داده‌ها را در نظر می‌گیرد نمی‌تواند نتایج مناسبی را به دست آورد. روش‌های دیگر طبقه‌بندی به دلیل استفاده‌ی هم‌زمان از اطلاعات طیفی و مکانی نتایج قابل توجهی را به دست آورده‌اند. بر اساس نتایج جدول ۳ مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی در کلاس‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶ توانسته بهترین نتایج را به دست آورد. روش پیشنهادی مقدار OA، AA و ضریب K بالاتری را نسبت به روش‌های طبقه‌بندی دیگر ارائه داده است. روش پیشنهادی به دلیل در نظر گرفتن ساختار سراسری و محلی داده‌ها و تعریف یک قید سازگاری محلی و در نظر گرفتن اطلاعات مکانی توانسته نتایج مناسبی را به دست آورد. علاوه استفاده از یادگیری دیکشنری در روش پیشنهادی باعث ایجاد داده‌های با تمایز بالا شده است. روش پیشنهادی نسبت به روشی که فقط از نمایش رتبه پایین استفاده می‌کند، ۲۵،۴۵٪ تفاوت در دقت دارد. روش پیشنهادی در کلاس‌های با تعداد نمونه‌های پایین نتایج قابل توجهی را به دست آورده است. در کلاس ۹ دقت به دست آمده ۸۹،۴۳٪ است که بیش از ۳۹،۴۳٪ در مقایسه با روش‌های دیگر تفاوت دارد. شکل ۱ تصویر مرجع، تصویر رنگ‌شده و نقشه‌ی طبقه‌بندی را برای روش‌های طبقه‌بندی نشان می‌دهد.

جدول ۳: دقت طبقه‌بندی (٪) روش‌های مختلف طبقه‌بندی برای تصویر ایندیانا

روش پیشنهادی	LGIDL	LRR	JRSRC	edSRC	SVMCK	SVM	کلاس
۹۰	۶۳/۴۱	۱۹/۱۵	۵۸/۵۴	۸۵/۳۷	۷۰/۷۳	۸۷/۸۰	۱
۹۳/۴۵	۹۶/۲۶	۶۳/۰۴	۹۲/۶۸	۹۱/۰۵	۸۸/۱۷	۷۸/۲۹	۲
۹۵/۴۰	۹۱/۹۷	۵۶/۳۶	۹۵/۱۸	۹۱/۱۶	۸۸/۳۵	۶۴/۶۶	۳
۹۵/۶۳	۸۷/۳۲	۲۱/۱۳	۹۲/۹۶	۹۴/۸۴	۹۱/۰۸	۷۷/۴۶	۴
۹۵/۵۴	۹۰/۸۰	۷۵/۱۷	۸۸/۵۱	۹۲/۱۸	۸۸/۷۴	۹۱/۷۲	۵
۹۸/۱۴	۹۹/۰۹	۸۶/۱۵	۸۷/۲۱	۹۹/۳۹	۹۷/۷۲	۹۷/۴۱	۶
۹۶/۶۵	۸۴/۰۱	۴۷/۹۷	۷۲/۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۶۴/۰۲	۷
۹۹/۱۲	۹۶/۹۸	۷۹/۵۳	۹۹/۰۷	۱۰۰	۹۸/۱۴	۹۸/۱۴	۸
۸۹/۴۳	۳۸/۸۹	۱۱/۱۱	۳۳/۳۳	۵۰/۰۰	۳۸/۸۹	۳۳/۳۳	۹
۹۲/۸۳	۹۰/۱۷	۷۲/۱۱	۸۴/۹۱	۸۹/۸۳	۸۸/۳۳	۷۰/۱۵	۱۰
۹۶/۵۹	۹۵/۷۴	۸۳/۸۸	۹۷/۵۶	۹۵/۹۷	۹۶/۰۶	۸۳/۵۲	۱۱
۹۴/۷۴	۹۰/۲۶	۳۷/۴۵	۸۲/۰۲	۸۵/۳۹	۸۱/۸۴	۶۶/۸۸	۱۲
۹۸/۲۰	۹۴/۰۲	۸۰/۴۳	۸۸/۰۴	۹۴/۵۷	۹۰/۷۶	۹۵/۶۵	۱۳
۹۸/۴۶	۹۹/۲۱	۹۰/۸۶	۹۵/۶۹	۹۸/۹۵	۹۸/۸۶	۹۴/۸۲	۱۴
۹۶/۹۹	۹۴/۲۴	۲۴/۵۰	۹۵/۱۰	۸۲/۴۲	۸۱/۲۷	۵۹/۳۷	۱۵
۹۵/۲۳	۸۹/۲۹	۱۷/۸۶	۸۰/۹۵	۹۴/۰۵	۸۹/۳۹	۹۴/۰۵	۱۶
۹۵/۹۲	۹۴/۵۲	۷۰/۴۷	۹۲/۳۶	۹۳/۶۱	۹۱/۹۳	۸۱/۶۷	OA
۹۵/۴۰	۸۷/۶۰	۵۴/۱۹	۸۳/۹۹	۹۰/۳۲	۸۶/۷۶	۷۸/۶۰	AA
۹۵/۴۷	۹۳/۷۴	۶۵/۴۵	۹۱/۲۴	۹۲/۷۰	۹۰/۷۶	۷۹/۰۲	K



شکل ۱: تصویر ایندیانا، الف) تصویر سه باند رنگی، ب) تصویر مرجع، پ) SVM، ت) SVMCK، ث) JRSRC، ج) cdSRC، چ) LRR، ح) LGIDL، خ) روش پیشنهادی

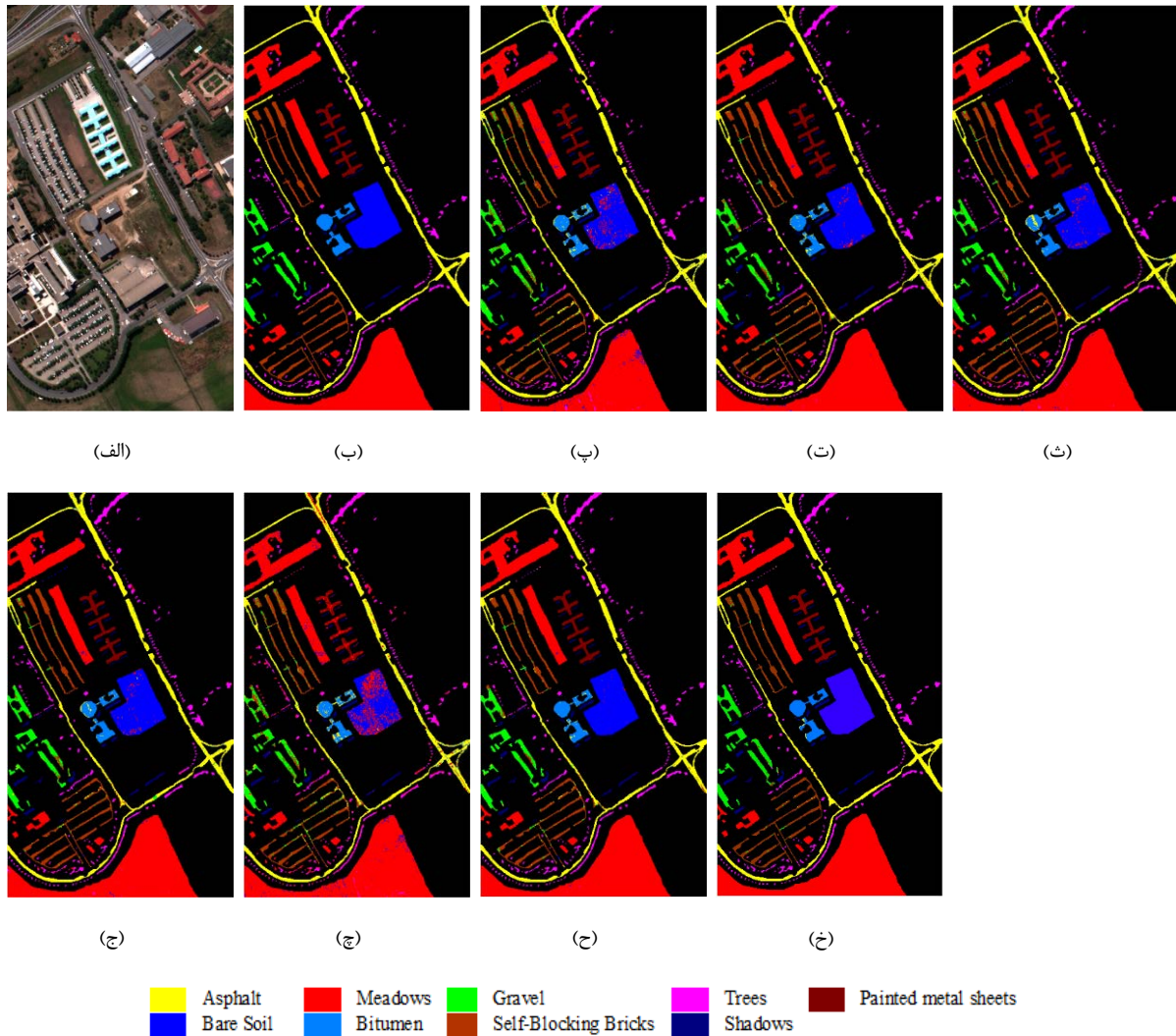
داده‌ی دانشگاه پابوآ:

۵٪ از نمونه‌ها به صورت تصادفی به عنوان نمونه آموزشی در نظر گرفته شده است و ۹۵٪ باقیمانده به عنوان نمونه‌های آزمون استفاده می‌شوند. برای این داده نیز، روش‌های طبقه‌بندی با استفاده از سه معیار دقت کل، دقت میانگین و ضریب کاپا مقایسه قرار شده‌اند. جدول ۴ دقت طبقه‌بندی ویژگی‌های استخراج‌شده پیشنهادی و روش‌های بیان‌شده در بخش قبل را نشان می‌دهد. بر اساس نتایج جدول ۴ روش LGIDL توانسته در کلاس سوم و چهارم نسبت به روش پیشنهادی دقت بالاتری را به دست آورد. روش cdSRC در کلاس نهم نتیجه بهتری را نسبت به روش‌های طبقه‌بندی دیگر به دست آورده است.

جدول ۴: دقت طبقه‌بندی (٪) روش‌های مختلف طبقه‌بندی برای تصویر دانشگاه پابوآ

کلاس	SVM	SVMCK	cdSRC	JRSRC	LRR	LGIDL	روش پیشنهادی
۱	۹۴/۱۱	۹۶/۰۲	۹۶/۵۷	۹۵/۶۲	۸۸/۴۶	۹۶/۸۱	۹۹/۰۳
۲	۹۶/۹۴	۹۹/۶۳	۹۹/۴۴	۹۹/۲۶	۹۷/۰۶	۹۹/۷۹	۹۹/۹۸
۳	۸۱/۴۴	۸۲/۴۰	۸۹/۲۷	۸۸/۸۲	۷۲/۶۷	۸۹/۲۲	۸۷/۸۱
۴	۹۴/۳۷	۹۷/۳۲	۹۳/۲۷	۹۱/۶۹	۷۴/۴۱	۹۸/۱۸	۹۷/۳۵
۵	۹۹/۳۰	۹۷/۰۳	۹۹/۹۲	۹۹/۸۴	۶۸/۴۷	۱۰۰	۱۰۰
۶	۸۶/۷۳	۹۵/۶۳	۹۶/۱۹	۹۴/۹۱	۶۷/۵۴	۹۹/۳۵	۹۹/۳۹
۷	۸۶/۳۰	۸۹/۴۷	۹۲/۶۴	۸۷/۸۹	۸۰/۳۶	۹۴/۷۰	۹۹/۴۵
۸	۸۴/۰۲	۹۱/۱۴	۹۴/۰۸	۹۲/۶۸	۸۲/۶۸	۹۲/۱۷	۹۷/۲۵
۹	۹۹/۸۹	۹۸/۰۰	۹۹/۸۹	۹۹/۵۹	۹۴/۵۶	۹۸/۸۹	۹۹/۲۲
OA	۹۳/۰۵	۹۵/۸۶	۹۷/۰۲	۹۶/۲۴	۸۶/۷۳	۹۷/۸۱	۹۸/۷۱
AA	۹۱/۴۶	۹۴/۰۷	۹۵/۷۰	۹۴/۴۷	۸۰/۶۹	۹۶/۵۷	۹۷/۷۲
κ	۹۰/۷۸	۹۵/۲۴	۹۶/۰۵	۹۴/۹۹	۸۱/۸۶	۹۷/۱۰	۹۸/۲۹

در کلاس‌های دیگر روش پیشنهادی توانسته دقت بالاتری را به دست آورد. از طرفی روش پیشنهادی OA، AA و ضریب κ بالاتری را نسبت به روش‌های طبقه‌بندی دیگر ارائه داده است. روش پیشنهادی در داده دانشگاه پاویا به دلیل در نظر گرفتن ساختار سراسری و محلی داده‌ها، تعریف قید سازگاری محلی، یادگیری دیکشنری و در نظر گرفتن اطلاعات مکانی، توانسته داده‌های با تمایز بالا و مناسب طبقه‌بندی‌کننده را ارائه دهد. روش پیشنهادی نسبت به روشی که فقط از روش نمایش رتبه پایین استفاده می‌کند ۱۱٫۹۸٪ تفاوت در دقت دارد. شکل ۱ تصویر مرجع، تصویر رنگ‌شده و نقشه‌ی طبقه‌بندی را برای روش‌های طبقه‌بندی نشان می‌دهد.



شکل ۲: تصویر دانشگاه پاویا، الف) تصویر سه باند رنگی، ب) تصویر مرجع، پ) SVM، ت) SVMCK، ث) JRSRC، ج) cdSRC، چ) LRR، ح) LGIDL، خ) روش پیشنهادی

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک طبقه‌بندی‌کننده نمایش رتبه پایین با محدودیت سازگاری طیفی و یادگیری دیکشنری پیشنهاد شده است. با ترکیب مدل نمایش رتبه پایین و نمایش تنک ساختار سراسری و محلی داده‌ها با استفاده از این مدل حفظ می‌شود. علاوه بر این با در نظر گرفتن قید سازگاری محلی در مدل توسط یک تطبیق‌گر محلی، وزنهایی متفاوتی برای نمونه‌های آزمون متناسب با شباهت آن به هر نمونه آموزشی تعریف شده است و این امر باعث افزایش شباهت بردارهای ویژگی پیکسل‌های ابرطیفی مشابه

شده است. ترکیب اطلاعات طیفی و مکانی در این مقاله باعث بهبود عملکرد طبقه‌بندی‌کننده شده است. با توجه به اینکه در این مدل هر پیکسل به صورت ترکیب خطی از مؤلفه‌های دیکشنری بیان می‌شود، انتخاب دیکشنری مناسب نقش مهمی در تعیین ضرایب ویژگی دارد. در این مقاله با الهام از یادگیری دیکشنری، ویژگی‌هایی با تمایز بالا و مناسب برای طبقه‌بندی‌کننده استخراج شده است. روش پیشنهادی بر روی دو مجموعه داده ابرطیفی پیاده‌سازی شده و نتایج آزمایش نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نتایج بهتری را نسبت به روش‌های دیگر در این زمینه ارائه داده است. به طوری که برای داده‌های ابرطیفی ایندیانا و دانشگاه پائویا روش پیشنهادی توانسته به ترتیب دقتی بیش از ۱,۴٪ و ۰,۹٪ را نسبت به روش‌های جدید به دست آورد.

مراجع

- [1] F. A. Kruse, J. W. Boardman, and J. F. Huntington, "Comparison of airborne hyperspectral data and EO-1 Hyperion for mineral mapping," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 41, no. 6, pp. 1388-1400, 2003, doi: 10.1109/tgrs.2003.812908.
- [2] N. C. Shirazi, R. Hamzehyan, and A. Masoomi, "The Comparison of Classification Algorithms for Remote Sensing Images," *Journal of Communication Engineering.*, vol. 5, no. 17, pp. 31-38, 2015 (in persian).
- [3] M. Hamed, F. Hajjani, "A method for segmenting remote sensing images using the Watershed algorithm and Fuzzy C-Means clustering," *Journal of Communication Engineering.*, vol. 10, no. 37, pp. 65-72, 2020 (in persian).
- [4] G. Hughes, "On the mean accuracy of statistical pattern recognizers," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 14, no. 1, pp. 55-63, 1968, doi: 10.1109/TIT.1968.1054102.
- [5] G. Camps-Valls, L. Gomez-Chova, J. Muñoz-Marí, J. Vila-Francés, and J. Calpe-Maravilla, "Composite kernels for hyperspectral image classification", *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 3, no. 1, pp. 93-97, 2006, doi: 10.1109/LGRS.2005.857031
- [6] Y. Chen, N. M. Nasrabadi, and T. D. Tran, "Hyperspectral image classification via kernel sparse representation," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 51, no. 1, pp. 217-23, 2013, doi: 10.1109/TGRS.2012.2201730.
- [7] Q. S. Ul Haq, L. Tao, F. Sun, and S. Yang, "A fast and robust sparse approach for hyperspectral data classification using a few labeled samples," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 50, no. 6, pp. 2287-2302, 2012, doi: 10.1109/TGRS.2011.2172617.
- [8] A. Rakotomamonjy, "Surveying and comparing simultaneous sparse approximation (or group-lasso) algorithms," *Signal Process.*, vol. 91, no. 7, pp. 1505-1526, 2011, doi: 10.1016/j.sigpro.2011.01.012.
- [9] Y. Chen, N. M. Nasrabadi, and T. D. Tran, "Hyperspectral image classification via kernel sparse representation," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote sensing*, vol. 51, no. 1, pp. 217-231, 2013, doi: 10.1109/TGRS.2012.2201730.
- [10] L. Pan, H.-C. Li, H. Meng, W. Li, Q. Du, and W. J. Emery, "Hyperspectral image classification via low-rank and sparse representation with spectral consistency constraint," *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 14, no. 11, pp. 2117-2121, 2017, doi: 10.1109/LGRS.2017.2753401.
- [11] G. Liu, Z. Lin, S. Yan, J. Sun, Y. Yu, and Y. Ma, "Robust recovery of subspace structures by low-rank representation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 35, no. 1, pp. 171-184, 2013, doi: 10.1109/TPAMI.2012.88.
- [12] S. G. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415, 1993, doi: 10.1109/78.258082.
- [13] R. Gribonval, "Fast matching pursuit with a multiscale dictionary of Gaussian chirps," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 5, pp. 994-1001, 2001, doi: 10.1109/78.917803.
- [14] S. Fischer, G. Cristóbal, and R. Redondo, "Sparse overcomplete Gabor wavelet representation based on local competitions," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 15, no. 2, pp. 265-272, 2006, doi: 10.1109/TIP.2005.860614.
- [15] K. Engan, S. O. Aase, and J. H. Husoy, "Method of optimal directions for frame design," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings. ICASSP99 (Cat. No. 99CH36258)*, 1999, pp. 2443-2446, doi: 10.1109/ICASSP.1999.760624.
- [16] M. Aharon, M. Elad, and A. Bruckstein, "K-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 11, pp. 4311-4322, 2006, doi: 10.1109/TSP.2006.881199.
- [17] A. Soltani-Farani, H. R. Rabiee, and S. A. Hosseini, "Spatial-aware dictionary learning for hyperspectral image classification," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 53, no. 1, pp. 527-541, 2015, doi: 10.1109/TGRS.2014.2325067.

- [18] Z. He, L. Liu, R. Deng, and Y. Shen, "Low-rank group inspired dictionary learning for hyperspectral image classification," *Signal Process.*, vol. 120, pp. 209-221, 2016. doi: 10.1016/j.sigpro.2015.09.004.
- [19] M. V. Afonso, J. M. Bioucas-Dias, and M. A. Figueiredo, "An augmented Lagrangian approach to the constrained optimization formulation of imaging inverse problems," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 20, no. 3, pp. 681-695, 2011. doi: 10.1109/TIP.2010.2076294.
- [20] L. Mirsky, *An introduction to linear algebra*: Courier Corporation, 2012.
- [21] C.-C. Chang and C.-J. Lin, "LIBSVM: A library for support vector machines", *ACM Trans. Intell. Syst. Technol.*, vol. 2, pp. 1-27, 2011.
- [22] Y. Xiao, H. Wang, and W. Xu, "Parameter selection of Gaussian kernel for one-class SVM," *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 45, no. 5, pp. 941-953, 2015, doi: 10.1109/TCYB.2014.2340433.
- [23] M. Cui and S. Prasad, "Class-dependent sparse representation classifier for robust hyperspectral image classification," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 53, no. 5, pp. 2683-2695, 2015, doi: 10.1109/TGRS.2014.2363582.
- [24] C. Li, Y. Ma, X. Mei, C. Liu, and J. Ma, "Hyperspectral image classification with robust sparse representation," *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 13, no. 5, pp. 641-645, 2016, doi: 10.1109/LGRS.2016.2532380.
- [25] G. Liu, Z. Lin, and Y. Yu, "Robust subspace segmentation by low-rank representation," in Proceedings of the 27th International Conference on International Conference on Machine Learning, 2010, pp. 663-670.
- [26] M. Graña, M. A. Veganzons, and B. Ayerdi, "Hyperspectral remote sensing scenes," ed. Accessed Jun 1, 2018 . http://www.ehu.es/ccwintco/index.php?title=Hyperspectral_Remote_Sensing_Scenes, 2018.