



تاریخ دریافت مقاله: ۹۰/۲/۲۲  
تاریخ پذیرش مقاله: ۹۱/۴/۱۹

## ویژگی‌های هندسی و ریاضی در ساختار چفد پنج او هفت تند در پوشش تاق آهنگ ایرانی

نیما ولی‌بیگ\* فاطمه مهدی‌زاده سراج\*\* فرهاد تهرانی\*\*\*

### چکیده

در گذر زمان، از چفدهای گوناگونی برای ساخت پوشش‌های تاق آهنگ ایرانی بهره جستند؛ یکی از متداول‌ترین این چفدها، چفد پنج او هفت است. شیوه کشیدن و پیاده‌سازی این چفد ریخت‌های گوناگونی را پدید آورده است که همگی به نام چفد پنج او هفت خوانده می‌شود. هر کدام از این چفدها ویژگی‌های هندسی و ریاضی گوناگونی دارند. یکی از مسائل مهمی که منجر به تألیف کتاب *مفتاح الحساب* توسط غیاث‌الدین جمشید کاشانی در قرن نهم هجری شد، محاسبه مصالح به کاررفته در تاق‌ها و گنبدها بود. روش‌های ارائه شده در این مقاله ادامه‌ای است بر روش‌های محاسبات فوق. با به دست آمدن طول کمان هر چفد می‌توان با توجه به شیوه آجرچینی آن و ارتفاع ملات مابین آنها با تناسبی ساده تعداد آجر (یا هر مصالح دیگری که تاق با آن اجرا شده است) را محاسبه کرد. هم‌چنین می‌توان از این محاسبات برای بارگذاری و سایر اندازه‌های مورد نیاز در آنالیز استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ازگ (azag) به‌ویژه سازه‌های سنتی بهره برد. این مقاله به شیوه‌های گوناگون کشیدن و آنالیز ریاضی و هندسی آنها پرداخته، فرم‌های پدیدآمده را باهم مقایسه کرده است. با بررسی‌های انجام‌شده، مشخص شد که نه تنها این چفدها که نام یکسان دارند از لحاظ بلندا و دیگر ویژگی‌های هندسی مانند مرکز سطح و جرم همانند نیستند، بلکه از لحاظ ریاضی (طول کمان، مساحت و...) نیز دارای ویژگی‌های متفاوتی هستند.

**کلیدواژه‌ها:** چفد، پنج او هفت، تاق آهنگ، آنالیز هندسی، آنالیز ریاضی

\* دانشجوی دکترا مرمت بنا و بافت تاریخی، دانشگاه هنر اصفهان (نویسنده مسئول).  
n.valibeig@au.ac.ir & nima876@yahoo.com

\*\* استادیار دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه علم و صنعت، تهران.  
\*\*\* دانشیار دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.

### مقدمه و طرح مسئله

در سرزمینی که در بیش‌تر بخش‌های آن چوب در دسترس نیست، معماران به ساخت سرپناه‌هایی روی آورده‌اند که هم پاسخگوی نیاز کاربردی فضا باشد و هم از ساخت مایه‌های بوم‌آورد (محلی) در آن بهره جسته باشند. از این‌رو، در پوشش‌های ازگاز کمان، چفد، تویزه و تاق تا گنبد و تاق‌نما از فرم‌های خمیده کمک گرفته‌اند. در میان چفدها، چفد پنج او هفت از پرکاربردترین آنها می‌باشد، این چفد به‌شيوه‌های گوناگونی ترسیم شده است که هم از جهت فرم و هم از جهت باربری توانایی‌های گوناگونی دارند. این مقاله با ترسیم دقیق آنها و مقایسه بخش‌های گوناگون این چفدها برای مهندسان سازه و افرادی که در مدل‌کردن بناهای تاریخی در برابر نیروها به‌ویژه زمین‌لرزه کار می‌کنند، سودمند خواهد بود و ازسوی دیگر، راه‌گشایی است برای معماران سنتی که با مقایسه نتایج حاصله شیوه صحیح را برگزینند. همچنین، این مقاله می‌تواند در انتخاب روش اجرایی صحیح و مسائل مربوط به متره، برآورد و حجم مصالح مورد نظر و تهیه صورت وضعیت کارا باشد. محاسبات ریاضی و هندسی مورد نظر از لحاظ پایداری تاق مورد نظر در برابر زمین‌لرزه و سایر نیروهای جانبی نیز می‌تواند راهگشا باشد.

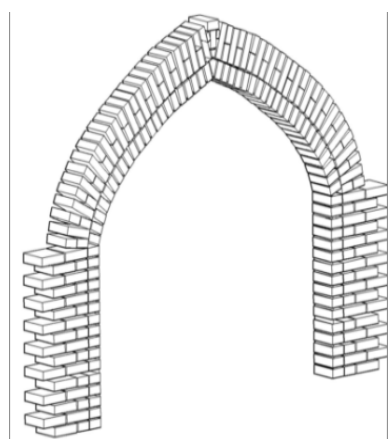
پژوهشگران پیشین که روی پوشش‌ها و چفدهای معماری ایرانی تحقیق کرده‌اند، کمتر به جنبه‌های هندسی آن پرداخته‌اند. آندره گدار در کتاب آثار ایران یک بخش را به‌طور کامل به تاق‌های ایرانی اختصاص داده (گدار، ۱۳۷۵)، وی در این بخش تاق‌ها را با توجه به تکنیک‌های ساخت بررسی کرده است. لیزا گلمبک و دونالد ویلبر نیز تاق‌ها و چفدها را بررسی کرده‌اند (گلمبک، ۱۳۷۴). متأسفانه بسیاری از چفدها در این کتاب اشتباه ترسیم

شده است. همچنین رولان بزنوال و آرتور آپهام پوپ نیز با دید تکنیکی و تاریخی به تاق‌ها و چفدهای ایرانی پرداخته‌اند. از پژوهشگران ایرانی نیز پیرنیا و معماریان در این زمینه پژوهش‌هایی انجام داده‌اند. آنها نیز بیش‌تر به جنبه‌های تکنیکی و تنها به‌شيوه ترسیم اشاره کرده‌اند. بررسی چفدها و تاق‌ها با دید محاسباتی و مقایسه اجزا و شکل چفدها با دید هندسی برای نخستین بار توسط نگارندگان انجام پذیرفته است.

### کمان، چفد، تویزه، تاق آهنگ

کمان یا قوس را می‌توان خمی دانست که بخشی از یک شکل هندسی مشخص است مانند بخشی از یک دایره، هذلولی یا هر منحنی شناخته‌شده هندسی؛ در صورتی که چفد را می‌توان آمیزه‌ای از چند کمان دانست (پیرنیا، ۱۳۷۸: ۴۵). کمان و چفد اثر قلمبر روی کاغذ، چوب یا گچ روی سطح زمین (نکیزکردن) است، پس دارای ضخامت نیست و به‌زبان ریاضی فقط دارای طول و عرض (x,y) هستند. اگر این چفد را روی زمین نکیز کنند و قالبی از گچ بسازند، به آن شابلون یا تویزه گچی یا لنگه گچی می‌گویند (تصویر ۱). از این شابلون می‌توان برای ساخت عنصر باربر معماری ایرانی کمک گرفت. کافی است دو ستون عمودی ساخته، این شابلون را روی آن در صفحه‌ای عمود بر سطح زمین واداشته (نصب کرده) و پیرامون آن تیری خمیده پدید آورده شود که این تیر خمیده را تویزه می‌نامند (تصویر ۲).

برای ساخت تاق آهنگ باید در آغاز دو دیوار موازی و عمود بر سطح زمین پدید آورد و سپس شابلون گچی را در آغاز آن نصب کرد. اگر به‌شکل فرضی در راستای پاکار دو دیوار شابلون کشیده شود، شکلی تقریباً نیم‌استوانه پدید



تصویر ۲. تویزه (ترسیم از نگارندگان)



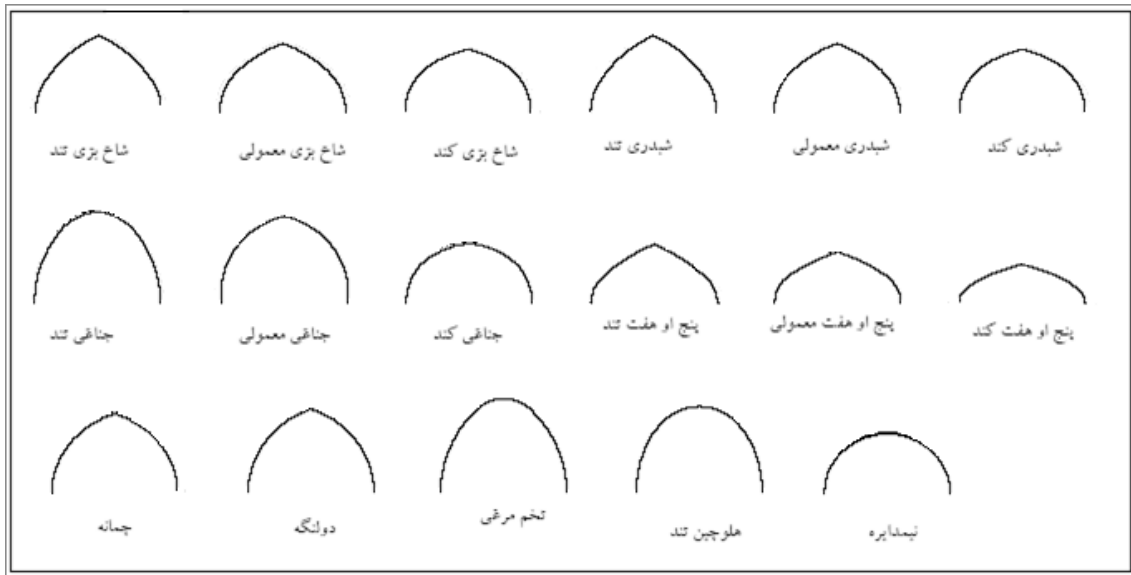
تصویر ۱. شابلون یا تویزه گچی، آرشیو میراث اصفهان



### انواع چفدهای معماری و اجزای آن

ساده‌ترین کمان را در معماری می‌توان کمان نیم‌دایره دانست که معماران سنتی به آن چفد پردالی می‌گویند، آن را بسیار ناپایدار می‌دانند و از آن در ساخت تویزه یا تاق‌آهنگ استفاده نمی‌کنند. بخش‌های گوناگون چفد در دیدگاه معماران دارای اجزا و نام‌های گوناگونی است که به‌هرکدام از آنها پرداخته خواهد شد (تصویر ۳ و ۴).  
با توجه به آنچه در جدول ۱ آمده است، می‌توان چفدها را از جنبه‌های گوناگونی مانند کیفیت تحمل وزن،

می‌آید که به آن «تاق‌آهنگ»، «کوره‌پوش» یا «لوله‌ای» می‌گویند. این کار در معماری با شیوه‌های گوناگون ساخت و چیدمان آجر، سنگ و ... پدید می‌آید. برای ساخت تاق‌آهنگ روش‌های گوناگون دیگری نیز وجود دارد؛ یکی از مهم‌ترین روش‌ها برای ساخت تاق‌آهنگ کمک‌گرفتن از دیوار پشت‌بند است، در این روش دیگر نیازی به قالب نیست. روش استفاده از قالب باربر هم از روش‌های دیگر ساخت تاق‌آهنگ است (بحث در شیوه‌های ساخت و هندسه عملی نیاز به مقاله‌ای جداگانه دارد).



تصویر ۳. گونه‌هایی از چفدهای به‌کاررفته در معماری ایرانی، (تهیه و ترسیم از نگارندگان)

افراز (بلندا) = CD	کلاله = PD	تیزه (فراز) = D	ACD = ۹۰°	
		ایوارگاه = (P پیرامون)	ACP = ۶۷/۵°	
دهانه = AB	شانه = MP	میان شانه = (N پیرامون)	ACN = ۴۵°	
		شکرگاه = (M پیرامون)	ACM = ۲۲/۵°	
خیز = CD/AB	بالنج (وارون) = AM	پاکار (فروود) = A		
		میان دهانه = C		

تصویر ۴. بخش‌های گوناگون چفد، (مأخذ: نگارندگان)

جدول ۱. دسته‌بندی چفدها از دیدگاه‌های گوناگون (مأخذ: نگارندگان)

از دیدگاه ریخت‌شناسی	از دیدگاه خیز	از دیدگاه تیزه	از دیدگاه باربری
۱. شبدری	۱. تند	۱. مازهای (ببیز)	۱. باربر
۲. سه‌بخشی	۲. تیز	۲. تیزهدار (چناقی)	۲. غیر باربر
۳. پنج او هفت	۳. کند	۳. کللیل (آمیزه مازهای و تیزهدار)	
۴. ...	۴. گفته	۴. شکنجی	



تصویر ۶. تویزه با چفد تیزه‌دار (جناغی)، (نگارندگان)



تصویر ۵. تاقنما با چفد مازه‌ای (بیز)، (نگارندگان)



تصویر ۸. تویزه با چفد شکنجی (نگارندگان)



تصویر ۷. تویزه با چفد کللی (نگارندگان)



تصویر ۹. اجرای شانه یا هویه (نگارندگان)



تصویر ۱۰. اجرای چانه یا لغاز (نگارندگان)

چگونگی تیزه، میزان خیز و همچنین از منظر ریخت و فرم دسته‌بندی نمود.

چفد مازه‌ای چفدی است که در بخش بالایی (فراز) آن پیوستگی وجود دارد مانند چفدی که تاق‌ایوان کسری را می‌سازد و چفد تیزه‌دار چفدی است که در بالای آن ناپیوستگی یا تیزی وجود دارد مانند چفد ایوان ورودی مسجد جامع یزد و چفد کللی آمیزه‌ای از چفدهای مازه‌ای و تیزه‌دار است. چفدهای شکنجی هم چفدهایی هستند که با چین‌وشکنج‌های گوناگون یعنی با فرم‌های محدب، مقعر و ترکیب آنها ساخته می‌شوند (تصویر ۵ تا ۸).

در برخی موارد در ساخت چفد اندکی پیش‌می‌نشستند که به این پیش‌نشستگی چانه یا لغاز و اگر فرم کمان‌مانند داشته باشد، به آن گیلویی می‌گفتند. برخی موارد هم به‌ویژه در زمان ساسانیان به‌دلیل این که قالب را روی لبه پاکار می‌گذاشتند، پس از ساخت تاق و برداشتن قالب، تاق با پس‌نشستگی مشخص می‌شد که به این پس‌نشستگی، شانه یا هویه (هویه خود به‌معنای شانه است) می‌گفتند (تصویر ۹ و ۱۰).



به کاررفته در ساختمان است. از این رو افرادی همچون کاشانی به محاسبات مربوط به تاق‌ها و گنبد‌ها پرداخته و ترسیم‌ها آنها را نیز ذکر نموده‌اند. این مقاله در ادامه بر آن است تا با شیوه‌های نوین و به‌ویژه با روش‌های ریاضی به محاسبه انواع شیوه‌های ترسیم این چفد پر کاربرد معماری ایرانی بپردازد و آنها را با یکدیگر مقایسه کند. البته رویکرد ریاضی‌دانان به معماری و هنرهای وابسته منحصر به جمشید کاشانی نیست و افراد دیگری همچون ابوالوفاء بوزجانی نیز به مسائل گوناگونی در این باب پرداخته‌اند (البوزجانی، ۱۳۶۹). اما باید به یک نکته کلیدی دیگر هم اشاره کرد، پس از برداشت بسیاری از چفدها این نتیجه آشکار خواهد شد که اندازه‌های چفد برداشت‌شده دقیقاً با آنچه روی کاغذ در ابعاد متناظر می‌توان کشید کمی تفاوت دارد. البته این تفاوت بسیار اندک است و به‌عنوان مثال برای یک چفد در دهانه پنج متری، در حدود سه یا چهار سانتی‌متر می‌باشد. دلیل این عدم انطباق را می‌توان به روش‌های برداشت، دقت ابزار برداشت، سختی برداشت در ارتفاع و همچنین نشست اندک تاق در طول زمان تحت تأثیر بارها یا کشیدن آندود در زیر چفدها دانست که شکل دقیق چفد را پنهان کرده است. اما سازه‌های سنتی ایرانی در پیاده‌سازی هندسه نظری نیز از دقت بالایی برخوردارند. در پیاده‌سازی اندازه‌ها در مواردی کاهش یا افزایش لازم است. این کاهش و افزایش برای مرتب‌کردن اجزای معماری صورت می‌پذیرد تا برای نمونه بتوان یک طرح مشخص را در ابعاد ویژه‌ای که کمی با اندازه‌های طرح تفاوت دارد، اجرا کرد (البته منظور تفاوت اندک در اندازه‌هاست). معماران به این عمل «کست‌افزود» می‌گویند (فرشته‌نژاد، ۱۳۸۹: ۲۷۰). در ادامه، شیوه‌های ترسیم چفدها با دقت زیاد و با استفاده از نرم‌افزار اتوکد آمده است. لازم به یادآوری است که دو نمونه از چفدها کاملاً بر همدیگر منطبق و از لحاظ ترسیم هم یکسان هستند، به طوری که در جدول آمده است (جدول ۲).

### مقایسه هندسی و ریاضی شیوه‌های گوناگون چفد پنج‌او هفت تند

در ادامه بررسی این چفدها، با استفاده از شیوه ترسیم آنها محاسبات دقیق ریاضی آنها صورت پذیرفت. نخستین گام برای محاسبات مورد نظر، به‌دست‌آوردن فرمول ریاضی

### تحلیل چفد پنج‌او هفت در معماری ایرانی

یکی از چفدها که در بناهای بسیاری از دوران کهن دیده می‌شود، چفد پنج‌او هفت است. کهن‌ترین نمونه‌های یافت‌شده از این چفد را می‌توان در هفت‌تپه و چغازنبیل دید (پیرنیا، ۱۳۷۳: ۹).

چفد پنج‌او هفت تند را می‌توان در بناهای تاریخی از ادوار گوناگون مشاهده کرد.

نمونه‌های کهن چفد پنج‌او هفت را در زیرزمین‌های زیگورات چغازنبیل متعلق به ۱۵۰۰ پیش از میلاد می‌توان دید. در دوران اسلامی نیز نمونه‌های بسیاری از کاربرد این چفد را می‌توان دید. از این چفد در تویزه‌های برابر بسیاری استفاده می‌شود. در کاربندی‌ها نیز چفد مورد استفاده چفد پنج‌او هفت است. در مساجد معاصر نیز اکثر تویزه‌های برابر را با چفد پنج‌او هفت می‌سازند.

همواره نسبت‌های ریاضی بسیار مشخصی بین اجزای مختلف یک چفد برقرار است. در اینجا به نسبت‌های چفد پنج‌او هفت پرداخته خواهد شد. برای روشن‌تر شدن موضوع، شیوه‌های ترسیم این چفد در ادامه خواهد آمد.

### شیوه‌های ترسیم چفد پنج‌او هفت و هندسه نظری و عملی

همان‌گونه که در جدول ۱ آمده است، بسیاری از چفدها از دیدگاه خیز خود به چند دسته تقسیم می‌شوند. چفد پنج‌او هفت نیز با توجه به خیز آن به سه دسته تقسیم می‌شود؛ تند، کند و کفته (این چفد گونه تیز ندارد). اینجا به گونه‌های چفد پنج‌او هفت تند پرداخته می‌شود که باربرتر از دو گونه دیگر بوده و در بسیاری از تاق‌های آهنگ و تویزه‌ها به کار می‌روند. سپس ویژگی‌های هندسی و ریاضی آن بررسی می‌شود.

پس از بازبینی بسیاری از متون کهن و صحبت با استادکاران معماری سنتی در نقاط مختلف ایران، هفت شیوه ترسیم چفد پنج‌او هفت به‌دست آمد که سه شیوه آن متداول‌تر است. جالب آنجاست که یکی از مهم‌ترین منابع ریاضی که به معماری پرداخته است، رساله «تاق و ازگ» از غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضی‌دان نامی است که دو روش برای ترسیم چفد پنج‌او هفت تند آورده است (کاشانی، ۱۳۶۶: ۶۱). دغدغه بسیاری از معماران و کارفرمایان روش محاسبه حجم مصالح

جدول ۲. شیوه‌های گوناگون ترسیم چغد پنج او هفت تند با استفاده از نرم‌افزار اتوکد، (ترسیم از نگارندگان)

روش ۱. (بیرنیا، ۱۳۷۳: ۱۷)	روش ۲. روش بیضی (بیرنیا، ۱۳۷۳: ۱۸)	روش ۳. (بیرنیا، ۱۳۷۳: ۲۰)
روش ۴. (کاشانی، ۶۶۳۱: ۶۳)	روش ۵. (کاشانی، ۶۶۳۱: ۶۱) و (زمرشیدی، ۳۷۳۱: ۲۰۸)	روش ۶. (زمرشیدی، ۱۳۷۳: ۲۰۴)

گذرنده از تیزه و حجم حاصل از دوران حول همین محور هم محاسبه شده است (جداول ۳ و ۴ و ۵).

این محاسبات نیز برای اندازه‌گیری تعداد آجر به‌کاررفته در پوسته و محاسبات وزنی متناظر برای برآورد مصالح و همچنین محاسبات سازه‌ای بسیار کاراست. لازم به ذکر است که برخی از این محاسبات دغدغه استادانی چون کاشانی هم بوده است که با ریاضیات هندی و شستگانی انجام پذیرفته است (کاشانی، ۱۳۶۶: ۴۰). برای جلوگیری از طولانی‌شدن مقاله سه روش نخست به‌طور کامل با محاسبات همراه شده است و سایر روش‌ها نیز محاسبه شده و نتیجه به‌دست‌آمده از فرمول‌ها در جدول ۶ آمده است.

در جدول (۶) مقایسه افزایش این سه چغد و همچنین طول

چفدهای مورد نظر بود. برای این کار با استفاده از شیوه ترسیم آنها و انتخاب مرکز دهانه به‌عنوان مرکز مختصات هندسی، فرمول چغد به‌شکل یک معادله چندضابطه‌ای تبدیل شد. گام بعدی محاسبه طول کمان با استفاده از فرمول محاسبه طول کمان بود که برای هر چغد به‌شکل جداگانه به‌دست آمد.

گام بعدی هم به‌دست‌آوردن افزایش چفدها و مقایسه آنها با یکدیگر بود. در این گام هم به‌دلیل این‌که هنگام محاسبه فرمول چفدها، مرکز مختصات در روی میانگاه چفدها قرار داده شده بود، کافی بود که به‌جای  $x$  در فرمول هر چغد عدد صفر قرار گیرد تا  $y$  در آن نقطه که همان  $H$  یا افزایش چغد بود، به‌دست آید. البته محاسبات مربوط به سطح رویه حاصل از دوران حول محور عمودی

جدول ۳. محاسبات ریاضی براساس روش ۱ (نگارندگان)

پارامتر مورد محاسبه	شماره رابطه	رابطه
فرمول چفد	(1)	$y \begin{cases} \sqrt{0.09d^2 - (x + 0.2d)^2} & -0.5d \leq x \leq -0.415d \\ -0.78d + \sqrt{(1.28d)^2 - (x - 0.5d)^2} & -0.415d \leq x \leq 0 \\ -0.78d + \sqrt{(1.28d)^2 - (x + 0.5d)^2} & 0 \leq x \leq 0.415d \\ \sqrt{0.09d^2 - (x - 0.2d)^2} & 0.415d \leq x \leq 0.5d \end{cases}$
h = افزایش (بلندا)	(2)	h=0.487d
s = مساحت حاصل از دوران چفد حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(3)	$s = 2 \left[ \int_0^{0.415d} (-0.7d + \sqrt{(1.28d)^2 - (x + 0.5d)^2}) dx + \int_{0.415d}^{0.5d} \sqrt{0.09d^2 - (x + 0.2d)^2} dx \right] = 0.32d^2$
v = حجم حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(4)	$V = \pi \int_0^{0.21d} (0.2d + \sqrt{0.09d^2 - y^2})^2 dy + \int_{0.21d}^{0.5d} (-0.5d + \sqrt{(1.28d)^2 - (y + 0.7d)^2})^2 dy = \pi(0.202)d^3 = 0.6346d^3$
L = طول کمان چفد	(5)	$L = \int_{-0.5d}^{-0.415d} \sqrt{\left(\frac{0.09d^2}{0.09d^2 - (x+0.2d)^2}\right)} dx + \int_{-0.415d}^0 \frac{1.28d}{\sqrt{1.28d^2 - (x-0.5d)^2}} dx + \int_0^{0.415d} \frac{1.28d}{\sqrt{1.28d^2 - (x+0.5d)^2}} dx + \int_{0.415d}^{0.5d} \sqrt{\left(\frac{0.09d^2}{0.09d^2 - (x-0.2d)^2}\right)} dx = 1.46d$

جدول ۴. محاسبات ریاضی بر اساس روش ۲ (نگارندگان)

پارامتر مورد محاسبه	شماره رابطه	رابطه
فرمول چفد	(1)	$y \begin{cases} \frac{2}{5} \sqrt{\frac{25}{16}d^2 - 4(x - \frac{d}{8})^2} & -0.5d \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{5} \sqrt{\frac{25}{16}d^2 - 4(x + \frac{d}{8})^2} & 0 \leq x \leq 0.5d \end{cases}$
h = افزایش (بلندا)	(2)	h=0.489d
s = مساحت حاصل از دوران چفد حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(3)	$s = \frac{4}{5} \int_0^{0.2d} \sqrt{\frac{25}{16}d^2 - 4(x + \frac{d}{8})^2} dx = 0.36d^2$
v = حجم حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(4)	$V = \pi \int_0^{0.489d} (-\frac{d}{8} + \frac{5}{4} \sqrt{0.25d^2 - y^2})^2 dy = \pi(0.24)d^3 = 0.7540d^3$
L = طول کمان چفد	(5)	$L = [\int_{-0.5d}^0 \frac{\frac{5d}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}d^2 - 4(x - \frac{d}{8})^2}} dx - \int_{-0.5d}^0 \frac{\frac{6}{5}(x - \frac{d}{8})}{\sqrt{\frac{25}{16}d^2 - 4(x - \frac{d}{8})^2}} dx] + [\int_0^{0.5d} \frac{\frac{5d}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}d^2 - 4(x + \frac{d}{8})^2}} dx - \int_0^{0.5d} \frac{\frac{6}{5}(x + \frac{d}{8})}{\sqrt{\frac{25}{16}d^2 - 4(x + \frac{d}{8})^2}} dx] = 1.22d + 0.48d = 1.7d$





رابطه	شماره رابطه	پارامتر مورد محاسبه
$y \begin{cases} \sqrt[2]{0.09d^2 - (x + 0.2d)^2} & -0.5d \leq x \leq -0.38d \\ -0.7d + \sqrt[2]{1.69d^2 - (x - 0.5d)^2} & -0.38d \leq x \leq 0 \\ -0.7d + \sqrt[2]{1.69d^2 - (x + 0.5d)^2} & 0 \leq x \leq 0.38d \\ \sqrt[2]{0.09d^2 - (x - 0.2d)^2} & 0.38d \leq x \leq 0.5d \end{cases}$	(1)	فرمول چفد
$h=0.4891d$	(2)	$h$ = افزایش (بلندا)
$s = 2 \left[ \int_0^{0.2236d} (-\sqrt[2]{0.09d^2 - y^2} - 0.2d) dy + \int_{0.2236d}^{0.4891d} 0.5d - \sqrt[2]{1.6639d^2 - (y + 0.7d)^2} dy \right] = 0.331d^2$	(3)	$s$ = مساحت حاصل از دوران چفد حول محور عمودی گذرنده از تیزه
$V = \pi \int_0^{0.2236d} (0.2d - \sqrt[2]{0.09d^2 - y^2})^2 dy + \pi \int_{0.2236d}^{0.4891d} (0.5d - \sqrt[2]{1.6639d^2 - (y + 0.7d)^2})^2 dy = 0.7344 d^3$	(4)	$V$ = حجم حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه
$L = 2 \left( \int_{-0.5d}^{-0.2236d} \sqrt[2]{1 + \left( \frac{(x+0.2d)^2}{0.09d^2 - (x+0.2d)^2} \right)} dx + \int_{-0.2236d}^{0d} \sqrt[2]{1 + \left( \frac{(x-0.5d)^2}{1.6639d^2 - (x-0.5d)^2} \right)} dx \right) = 1.41d$	(5)	$L$ = طول کمان چفد

در جدول (۷) مشخصات ارائه شده از نرم افزار ترسیمی (نرم افزار اتوکد) با یکدیگر مقایسه شده است. طول بخش اول چفد، طول بخش دوم چفد، طول کل چفد، فاصله عمودی پاکار دوم از امتداد AB و بلندای هرکدام از چفدها همگی مقایسه شده است. این جدول براساس

کمان و سطح رویه حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه و حجم حاصل از این دوران به دست آمده است. در این جدول برای نخستین بار توسط نگارندگان با دید ریاضی به اندازه گیری های دقیق چفدها پرداخته شده است. در این جداول  $d$  برابر با دهانه چفد است.

جدول ۶. مقایسه بلندا (افراز)، سطح رویه حاصل از دوران، حجم حاصل از دوران و طول با استفاده از محاسبات ریاضی (نگارندگان)

روش ترسیم	بلندا $h$	مساحت $s$	حجم $v$	طول کمان $L$
روش ۱	$0.4870d$		$0.635$	$1.460d$
روش ۲	$0.4890d$		$0.754$	$1.70d$
روش ۳	$0.4891d$		$0.734$	$1.412d$
روش ۴	$0.4852d$	$0.31$	$0.616$	$1.448 d$
روش ۵	$0.4880d$	$0.313$	$0.621$	$1.461 d$
روش ۶	$0.4714 d$	$0.306$	$0.616$	$1.443 d$





جدول ۷. مقایسه اجزای گوناگون چفد پنج و هفت تند به روش‌های گوناگون با شیوه هندسی (نگارندگان)

روش ترسیم چفد	a (m) طول بخش اول چفد	b (m) طول بخش دوم چفد	L(m) طول کمان 2(a+b)	c (m) مرکز پاکار دوم	h (m) بلندای چفد	معرفی اجزای گوناگون چفد روی شکل
روش نخست	۲/۳۵۶۲	۴/۹۴۸۰	۱۴/۶۰۸	۷/۰۰۰۰	۴/۸۸۷۱	
روش دوم	-----	-----	-----	-----	۴/۸۹۹۰	
روش سوم	۲/۳۰۰۴	۴/۷۷۰۵	۱۴/۱۴۱۸	۷/۰۷۱۱	۴/۸۸۹۴	
روش چهارم	۲/۵۲۳۲	۴/۷۰۸۷	۱۴/۴۶۳۸	۷/۸۲۶۲	۴/۸۵۱۲	
روش پنجم	۲/۴۸۶۲	۴/۸۲۲۹	۱۴/۶۱۸۲	۷/۶۳۴۴	۴/۸۸۲۶	
روش ششم	۳/۱۲۳۴	۴/۱۲۸۹	۱۴/۵۰۴۶	۵/۲۳۵۱	۴/۷۱۹۳	

جدول ۸. مقایسه هندسی میزان هم‌پوشانی شیوه‌های ترسیم چفد پنج و هفت تند با یکدیگر (ترسیم از نگارندگان)

<p>روش ۱. (پیرنیا، ۷۳: ۱۷)</p>	<p>روش ۲. روش بیضی (پیرنیا، ۷۳: ۱۸)</p>	<p>روش ۳. (پیرنیا، ۷۳: ۲۰)</p>
<p>روش ۴. (کاشانی، ۶۳)</p>	<p>روش ۵. (کاشانی، ۶۳) و (زمرشیدی، ۲۰۸)</p>	<p>روش ۶. (زمرشیدی، ۲۰۴)</p>

جدول ۹. مقایسه ویژگی‌های هندسی اجزای چفد پنج‌او هفت‌تند، با روش‌های گوناگون (مأخذ: نگارندگان)

عمق مرکز هندسی (m)	بلندای مرکز هندسی (m)	طول مرکز هندسی (m)	جرم (kg)	حجم (m <sup>3</sup> )	روش ترسیم چفد پنج‌او هفت‌تند
۰/۵۰۰۰	۳/۰۲۳۷	۰/۰۰۰۰	۹/۳۵۸۲	۹/۳۵۸۲	روش نخست
۰/۵۰۰۰	۳/۲۲۱۷	۰/۰۰۰۰	۹/۶۹۱۷	۹/۶۹۱۷	روش دوم
۰/۵۰۰۰	۲/۹۵۶۴	۰/۰۰۰۰	۹/۳۹۶۷	۹/۳۹۶۷	روش سوم
۰/۵۰۰۰	۳/۰۱۰۲	۰/۰۰۰۰	۹/۳۰۱۰	۹/۳۰۱۰	روش چهارم
۰/۵۰۰۰	۲/۹۷۲۷	۰/۰۰۰۰	۹/۳۹۶۷	۹/۳۹۶۷	روش پنجم
۰/۵۰۰۰	۳/۰۳۲۷	۰/۰۰۰۰	۹/۲۷۵۲	۹/۲۷۵۲	روش ششم

عمود بر صفحه ترسیم‌شده چفد امتداد یابد تا تاق آهن‌گاب به‌دست آید. محور مختصات در مرکز دهانه فرض می‌شود که منجر به صفرشدن طول مرکز هندسی برای همه نقاط خواهد شد و عمق مرکز هندسی هم ۰/۵ واحد خواهد شد. حجم حاصل از این تاق آهن‌گاب نیز محاسبه شده و برای به‌دست‌آوردن جرم تاق کافی است که حجم هر تاق را در جرم حجمی مصالح آن ضرب کرد. در اینجا برای ساده‌شدن کار جرم حجمی برابر با ۱ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر گرفته شده است.

طول دهانه ۱۰ متر محاسبه شده است. در جدول (۸) این چفدها از لحاظ ویژگی‌های هندسی با هم مقایسه شده‌اند. میزان هم‌پوشانی آنها با یکدیگر مشخص شده است. منظور از هم‌پوشانی در اینجا میزان انطباق چفدهای گوناگون است. این جدول تأکیدی دیگر بر این موضوع است که نه‌تنها چفدها از لحاظ محاسبات با یکدیگر قابل مقایسه نیستند، بلکه از لحاظ هندسی و شکل و فرم نیز بر یکدیگر منطبق نیستند. برای به‌دست‌آوردن اندازه‌های جدول (۹) لازم است ابتدا چفد مورد نظر به‌اندازه یک واحد در راستای Zها یعنی

### نتیجه‌گیری

۱. در بین روش‌های ترسیم، چفد به‌روش ششم دارای کمترین بلندا (افراز) است و چفدهای به‌روش سوم و دوم دارای بیش‌ترین بلندا هستند.
۲. مساحت حاصل از دوران حول محور گذرنده از تیزه، در روش ششم از سایر روش‌ها کمتر است ولی در روش دوم مساحت سطح رویه از سایر چفدها بیش‌تر است. یعنی اگر از این چفد گنبدی ساخته شود، میزان اندود یا آمودی (عموماً کاشی) که باید روی این سطح گنبد را ببوشاند، از سایر چفدها بیش‌تر خواهد بود.
۳. حجم حاصل از دوران چفد در روش دوم از سایر روش‌ها بیش‌تر است یعنی برای ساخت آن نیاز به مصالح بیش‌تری می‌باشد. هم‌چنین چفد به‌روش چهارم و ششم کمترین حجم حاصل از دوران را ایجاد خواهد کرد یعنی مصالح کمتری برای ساخت آن نیاز است.
۴. طول کمان چفد دوم بیش از سایر روش‌هاست. به‌بیان دیگر اگر با این چفد تاق آهن‌گابی ساخته شود، تاق ساخته‌شده با چفد دوم مصالح بیش‌تری نیاز دارد و تاق آهن‌گاب ساخته‌شده با روش سوم کمترین میزان مصالح را نیاز خواهد داشت.



برای بررسی جدول (۷) و مقایسه آن با جدول (۶)، به دلیل این که جدول (۶) به صورت پارامتریک بوده و دهانه در آن با  $d$  نشان داده شده است لذا با محاسبه دهانه ۱۰ متر برای جدول (۷) اعداد دو جدول با یکدیگر قابل مقایسه هستند.

با توجه به جدول (۷) می توان گفت:

۱. به غیر از روش بیضی در روش‌های دیگر، هر نیمه چفد با دو کمان ترسیم می‌شود.
۲. کمان نخست روش سوم کوچک‌تر از کمان نخست سایر روش‌ها و کمان نخست روش ششم از سایر روش‌ها بزرگ‌تر است.
۳. اگر تاق‌آهنگی را با چفد پنج او هفت تند به شیوه‌های شش‌گانه ترسیم و سپس آن را اجرا کنیم، شیوه ششم کم‌بلندترین روش و شیوه سوم و پس از آن شیوه دوم پرافرازترین تاق را خواهند ساخت.

با ملاک قراردادن چفد بیضی (روش دوم) و بررسی هم‌پوشانی آنها در جدول (۸) نتایج زیر به دست خواهد آمد:

۱. چفد به روش دوم سایر چفدها را دربرمی‌گیرد. این بدین معناست که چفد دوم بیش‌ترین فضا را در زیر خود پوشش می‌دهد.
  ۲. چفد به روش دوم از میان شانه به بعد کم‌کم از سایر چفدها جدا می‌شود و سطح بیش‌تری را در زیر خود پوشش می‌دهد.
  ۳. کلیه چفدها تقریباً در بربخش بالنج (آغاز کار) برهم منطبق هستند.
- با بررسی جدول (۹) نتایج زیر به دست می‌آید:
۱. چفد با شیوه دوم دارای بالاترین مرکز هندسی است و چفد با شیوه سوم پایین‌ترین مرکز هندسی را دارد. این نکته صراحتاً آشکار می‌کند که چفد به روش بیضی نیز دارای نقاط ضعفی است.
  ۲. با بررسی حجم و متعاقب آن جرم تاق‌های حاصل از شیوه‌های گوناگون ترسیم‌شده دیده می‌شود که تاق حاصل از چفد دوم دارای بیش‌ترین حجم و بیش‌ترین جرم است یعنی تاق‌آهنگی که با این شیوه ترسیم شود، از همه تاق‌ها سنگین‌تر است و تاق‌آهنگی که با شیوه ششم ترسیم شود از همه تاق‌ها سبک‌تر و بیانگر این است که رفتار تاقی که با روش ششم ساخته شود، در شرایط برابر با سایر روش‌ها به دلیل سبک‌بودن از خود رفتار پایداری در برابر زمین‌لرزه از خود نشان می‌دهد و این نکته نیز الزاماً بیانگر ضعف روش بیضی نسبت به سایر روش‌هاست.

## منابع

- ابوالوفاء محمدبن محمدبن محمد (۱۳۶۹). *هندسه ایرانی*. ترجمه سیدعلیرضا جذبی، چاپ اول، تهران: سروش.
- پیرنیا، محمدکریم (۱۳۷۳). *شماره ویژه اثر، تاق و چفد*. چاپ اول، تهران: میراث فرهنگی.
- پیرنیا، محمدکریم (۱۳۷۸). *تحقیق در معماری گذشته ایران*. چاپ اول، تهران: دانشگاه علم و صنعت ایران.
- زمرشیدی، حسین (۱۳۷۳). *تاق و قوس در معماری ایران*. چاپ اول، تهران: کیهان.
- فرشته‌نژاد، مرتضی (۱۳۸۹). *فرهنگ معماری و مرمت معماری*. چاپ اول، اصفهان: ارکان دانش.
- کاشانی، غیاث‌الدین جمشید (۱۳۶۶). *رساله تاق و ازج*. ترجمه سیدعلیرضا جذبی، چاپ اول، تهران: سروش.
- گدار، آندره و دیگران (۱۳۷۵). *آثار ایران*. ترجمه ابوالحسن سروقد مقدم، چاپ اول، تهران: آستان قدس رضوی.
- گلمبک، لیزا و ویلبر، دونالد (۱۳۷۴). *معماری تیموری در ایران و توران*. ترجمه کرامت‌الله افسر، چاپ اول، تهران: میراث فرهنگی.

Receive date: 2011/05/12

Admission date: 2012/07/09



## The Geometrical and Mathematical Analysis of *Panjohaft* Arches in Iranian Barrel Vaults

Nima Valibeig\* Fatemeh Mehdizadeh\*\* Farhad Tehrani\*\*\*

### Abstract

Iranian major builders have used many different arches for building barrel vaults through the ages. Amongst them, the most common arch is called Panjohaft. Various drawing methods have been recorded for this arch with different geometrical and mathematical characteristics. Calculating the total number of bricks was one of the reasons for writing the book entitled *Miftah al-Hisab* by Ghyath al-Din Jamshid Kashani. This paper will present another method for the same issue. The paper also presents a new method for measuring the length of arches. Finally, the analysis has been made for various Panjohaft arches through mathematical and geometrical approaches and then various drawing methods have been compared together to reveal the advantages and disadvantages of each for different purposes.

**Keywords:** arch, barrel vault, Panjohaft, geometrical analysis, increase and decrease

---

\* PhD Candidate, Restoration Faculty, Art University of Isfahan

\*\* Assistant Professor, Architecture Faculty, Science and Industry University, Tehran, Iran

\*\*\* Associate Professor, Architecture Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran