فصلنامه پژوهش های معماری اسلامی /شماره بیست و سوم /تابستان ۱۳۹۸ /سال هفتم

طراحی کاربندی: مسألۀ تقسیم‌بندی زمینه از منظر ریاضی

مجتبی پوراحمدی *

استادیار گروه معماری، دانشکده معماری و هنر، دانشگاه گیلان، رشت، ایران (نویسندۀ مسئول)

مهدی سهرابی **

مربی گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رودسر و املش، رودسر، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۷/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش نهایی:۹۸/۰۴/۱۰

چکیـــــــده:

در طراحی کاربندی بر روی یک زمینۀ مشخص، تعیین تعداد اضلاع کاربندی مرحله‌ای حیاتی محسوب می‌شود. با توجه به خصوصیات هندسی کاربندی‌ها، هر کاربندی برای هر زمینه‌ای قابل استفاده نمی‌باشد. در پژوهش حاضر، روش طراحی کاربندی در آثار سه تن از اساتید و معلمان معماری سنتی ایران شامل استاد پیرنیا، استاد شعرباف و استاد لرزاده مرور و بررسی می‌شود. در هیچ یک از این منابع برای پاسخگویی به مسألۀ مورد اشاره، یک روش علمی دقیق مطرح نشده است و به نظر می‌رسد یافتن پاسخ مناسب برای این مسأله بیشتر به آزمون و خطا موکول شده که به یافتن جواب‌های تقریبی می‌انجامیده است. تنها استاد پیرنیا از یک فرمول تجربی ساده برای تعیین تعداد اضلاع کاربندی‌های یک‌پا سخ گفته که این فرمول نیز محدودیت های خاص خود را داشته است. هر چه جواب‌های به دست آمده برای نحوۀ تقسیم‌بندی مستطیل زمینه با رواداری بیشتری حاصل آمده باشد؛ شمسه کاربندی دارای اعوجاج بیشتری خواهد بود و به جای دایره به سمت بیضی تمایل پیدا می‌نماید. پژوهش حاضر این مرحلۀ حساس از طراحی کاربندی را به صورت یک مسألۀ ریاضی صورت‌بندی می‌نماید و با نگارش برنامه‌ای به زبان میپل، ابزار علمی دقیقی برای حل آن در اختیار طراحان قرار می‌دهد. برای اجرای برنامه، تعیین یک‌پا یا دوپا بودن کاربندی مورد نظر، اندازۀ طول و عرض مستطیل زمینه و نهایتاً مقدار رواداری قابل قبول الزامی است. پس از ورود این اطلاعات، محاسبات انجام می‌شوند و پاسخ‌هایی که در محدودۀ رواداری قابل قبول قرار دارند؛ به ترتیب از دقیق ترین پاسخ ها تا کم‌دقت‌ترین آنها در خروجی برنامه درج می‌شوند. دقت بسیار بالا و امکان بررسی تعداد نامحدود گزینه‌ها در زمان بسیار کوتاه (در نسخۀ فعلی هزار گزینه که البته به سادگی نیز قابل تغییر است) از مزایای برنامه پیشنهادی می‌باشد. پس از معرفی روش ریاضی و نگارش برنامه موردنظر، نمونه‌ای از کاربرد این برنامه جهت طراحی کاربندی یک‌پا و دوپا بر روی یک زمینه واحد به نمایش گذاشته می‌شود. در ادامه، فرمول تجربی استاد پیرنیا توسط برنامه موردنظر به محک آزمایش گذاشته می‌شود. نتیجۀ آزمون نشان می‌دهد که این فرمول سنتی در حیطۀ کاربرد محدود و متعارف خود، می‌توانسته پاسخ های نسبتاً دقیق و قابل قبولی را تولید نماید. در نهایت، بحثی دربارۀ نتایج و کاربردهای پژوهش ارائه می‌شود.

واژه های کلیدی:معماری ایران، کاربندی، استاد پیرنیا، استاد شعرباف، استاد لرزاده.

* pourahmadi@guilan.ac.ir ** m.sohrabi۱۱۹۳@gmail.com

مقدمه

کاربندی سازه نوع خاصی از پوشش سقف در معماری سنتی ایران می باشد که «متشکل از لنگه‌طاق‌هایی با قوس معین که تحت قواعدی هندسی همدیگر را قطع می‌کنند و قواره اصلی پوشش را به وجود می‌آورند» (بزرگمهری ۱۳۸۵، ۱). یکی از مسائل اصلی مرتبط با طراحی کاربندی‌ها این است که به جهت ساختار هندسی خاص کاربندی‌ها، نمی‌توان هر کاربندی دلخواهی را روی هر زمینهٔ مورد نظر طراحی نمود. به بیان دیگر، تنها یک یا تعداد معدودی کاربندی برای پوشش هر زمینه خاص قابل استفاده می‌باشد. از این رو، ضرورت دارد که طراح بتواند به طریقی نوع مناسب کاربندی برای زمینهٔ مورد نظر را تشخیص دهد. پرسشی که پژوهش حاضر می‌کوشد تا پاسخی برای آن ارائه نماید؛ به همین نکته برمی‌گردد که از منظر هندسی، یک معمار چگونه می‌تواند کاربندی/کاربندی‌های مناسب برای یک زمینه مشخص را بیابد.

تصویر ۱. کاربندی عمارت باغ دولت آباد، یزد

با مرور دستورالعمل‌های سنتی در مورد طراحی کاربندی‌ها روشن می‌شود که حیاتی‌ترین پرسشی که طراح کاربندی باید از منظر هندسی به آن پاسخ دهد؛ اینست که تعداد اضلاع آن کاربندی که به بهترین شکل بر زمینه مورد نظر منطبق می‌شود؛ باید چند باشد؛ به بیان دیگر، طراح چگونه زمینه مورد نظر را به زاویه‌ها یا قطعات خاصی تقسیم نماید که با ساختار هندسی خاص کاربندی‌ها سازگار باشد.

با مرور ادبیات علمی مرتبط به نظر می‌رسد که توضیح شفاف و قانع‌کننده‌ای برای نحوهٔ تعیین تعداد اضلاع کاربندی مناسب برای زمینهٔ مورد نظر از منظر ریاضی ارائه نمی‌شود. فقط استاد پیرنیا است که از یک فرمول سنتی ساده و تجربی در این ارتباط سخن به میان آورده است (نک: بزرگمهری ۱۳۸۵، ۱۲). بدین ترتیب، به نظر می‌رسد در غیاب یک راه‌حل ریاضی دقیق برای این مسأله، معماران ناگزیر بودند در اکثر موارد به راه‌حل‌های تقریبی مبتنی بر آزمون و خطا روی آورند تا کاربندی مناسب برای زمینهٔ مورد نظر را بیابند و یا مجبور می‌شدند که ابعاد زمینهٔ مورد نظر را دستکاری نمایند تا بتوانند کاربندی قابل قبولی را بر آن سوار کنند. پژوهش حاضر می‌کوشد تا از دیدگاه ریاضی به این مسأله بپردازد و راه‌حل دقیق آن را بیابد.

در این پژوهش، نخست مروری بر روش‌های سنتی طراحی کاربندی انجام می‌شود. بعد از ارزیابی این روش‌ها، مسألهٔ تشخیص کاربندی مناسب برای زمینهٔ مورد نظر به صورت یک مسألهٔ ریاضی (مجرد از سایر مسائل اجرایی) تعریف می‌شود و به کمک دانش ریاضی امروزین حل می‌گردد. سپس، برنامه‌ای در زبان میپل[۱] نوشته می‌شود که هر بار محاسبات زمانبر و تکراری مورد نیاز را انجام دهد و به سهولت پاسخ یا پاسخ‌های قابل قبول در هر مورد را تولید نماید. در نتیجه، با استفاده از این برنامه مسألهٔ تعیین کاربندی مناسب برای یک زمینهٔ مورد نظر به روش علمی و قابل اتکایی حل می‌شود.

مروری بر روش‌های سنتی طراحی کاربندی در ادبیات علمی

در حال حاضر چهار کتاب عمده معاصر درباره کاربندی‌ها در معماری ایران موجود است. اهمیت ویژهٔ این کتاب‌ها به این موضوع برمی‌گردد که این آثار یا توسط و یا بر مبنای آموزه‌های سه تن از چهره‌های شناخته شدهٔ معماری سنتی ایران نگاشته شده‌اند که دو تن از ایشان را می‌توان آخرین نسل از اساتید معماری سنتی ایران محسوب نمود: استاد شعرباف و استاد لرزاده. جایگاه استاد پیرنیا نیز به عنوان یکی از پیشگامان پژوهش در معماری سنتی ایران که دغدغهٔ کشف و انتقال دانش معماران سنتی به نسل

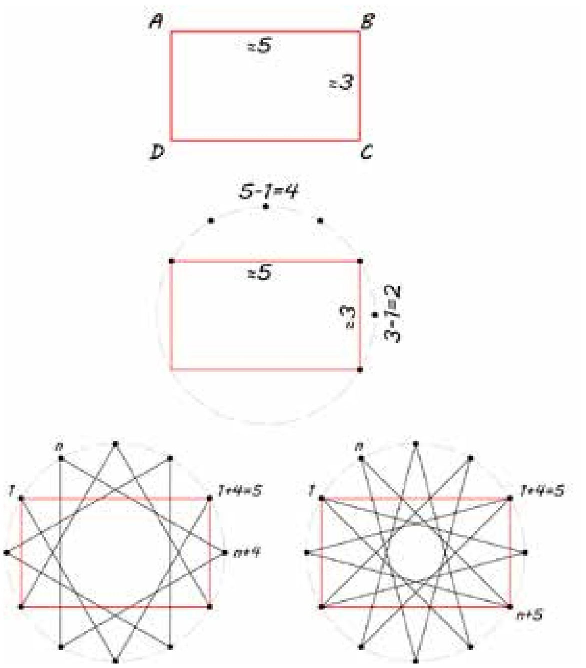
جدید را داشته است؛ بر کسی پوشیده نیست. کتابی که بر مبنای آموزه‌های استاد پیرنیا شکل گرفته است؛ توسط بزرگمهری در سال ۱۳۶۰ و در قالب یکی از شماره‌های مجله اثر نگارش یافته است (نک: بزرگمهری ۱۳۸۵). دو کتاب بر مبنای آموزه‌های استاد شعرباف نگاشته شده‌اند که یکی از آنها را خود وی تألیف نموده (نک: شعرباف ۱۳۸۵) و دیگری را یکی از شاگردان او تألیف نموده است (نک: نادری ۱۳۷۹). کتابی که به شرح آموزه‌های استاد لرزاده اختصاص دارد؛ توسط دو تن از شاگردان وی تدوین شده است (نک: رئیس‌زاده و مفید ۱۳۸۹). در ادامه ادبیات مرتبط با روش‌های طراحی کاربندی بر مبنای منابع مورد اشاره مرور می‌شود.

روش استاد پیرنیا

بر مبنای مطالب کتاب «هندسه در معماری» می‌توان روش استاد پیرنیا برای طراحی کاربندی بر یک زمینه مستطیلی را به شرح ذیل بیان نمود. شایان ذکر است که معماران ایرانی نوعی نقشهٔ دوبعدی، تقریباً مشابه پلان امروزی، را برای طراحی و بازنمایی کاربندی‌ها مورد استفاده قرار می‌دادند. به گفتهٔ استاد پیرنیا نخست، تعداد اضلاع کاربندی می‌بایست تعیین می‌شد. در این رابطه، او فرمولی را معرفی می‌نماید و اظهار می‌دارد که معماران سنتی از آن به عنوان یک قاعدهٔ کلی استفاده می‌نمودند. طبق این فرمول اگر طول مستطیل زمینه «الف» و عرض آن «ب» باشد؛ آن گاه تعداد اضلاع کاربندی بدین صورت محاسبه خواهد شد (بزرگمهری ۱۳۸۵، ۱۲):

(۲ – ب + الف) × ۲

برای مثال، اگر طول زمینه سه متر و عرض آن دو متر باشد؛ آنگاه یک کاربندی شش ضلعی به دست می‌آید[۲] و برای یک زمینه چهار متر در پنج متر، یک کاربندی ۱۴ ضلعی مناسب خواهد بود. وی می‌افزاید که این فرمول کاملاً دقیق نیست و معماران ایرانی اغلب می‌بایست ابعاد زمینه را تا حدودی دستکاری می‌کردند تا آن را برای کاربندی متناسب سازند (همان، ۱۲). در بخش‌های بعدی مجدداً از این فرمول سخن گفته خواهد شد. در روش تشریح شده توسط استاد پیرنیا، بعد از تعیین تعداد اضلاع کاربندی، از مرکز مستطیل زمینه دایره‌ای ترسیم می‌شود که بر آن مستطیل محاط باشد و قطری برابر با قطر مستطیل داشته باشد. سپس، محیط دایره بر اساس تعداد اضلاع کاربندی به قطعات مساوی (یا تقریباً مساوی) قطعه‌بندی می‌شود؛ بدین ترتیب که اگر طول یکی از اضلاع مستطیل "n" باشد؛ مثلاً "n" متر، آنگاه کمان دایره که در مقابل همان ضلع قرار گرفته است به "n-1" قطعه برابر تقسیم می‌شود (همان، ۱۳) (تصویر ۲).

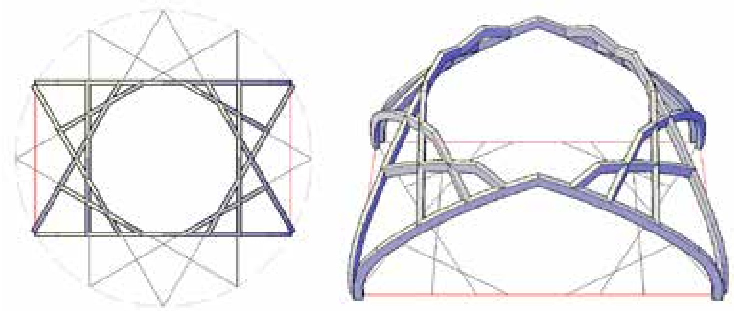


تصویر ۲. مثالی برای کاربرد روش استاد پیرنیا در طراحی کاربندی

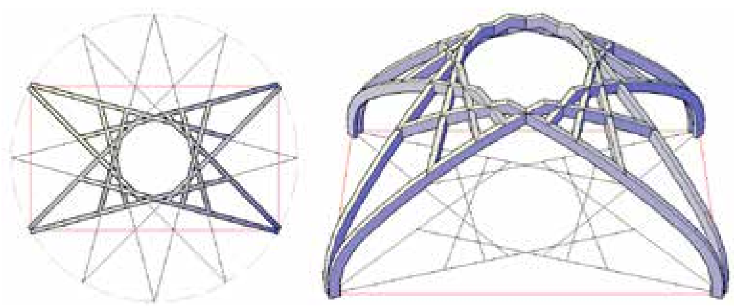
شایان ذکر است که کار در این مرحله غالباً با مقداری از تقریب همراه است و ممکن است قطعاتی که روی کمان دایرهٔ محیطی شکل می‌گیرند؛ دقیقاً با هم برابر درنیایند. در نمونه‌های واقعی به کرّات مشاهده می‌شود که قطعات مقابل ضلع بزرگتر و ضلع کوچکتر مستطیل زمینه هرچند برابر به نظر می‌رسند؛ اما اختلاف جزئی با هم دارند. نتیجه این اختلاف این است که شمسهٔ کاربندی به جای آن که یک دایره دقیق هندسی باشد؛ به شکل بیضی تمایل پیدا می‌نماید.

بعد از تقسیم‌بندی دایره، نقاط انتخاب شده روی آن، بدین

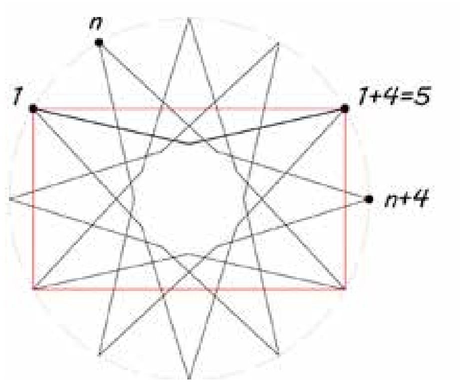
ترتیب به هم متصل می‌شوند: طراح باید به تعداد نقاط و قطعات مقابل ضلع بزرگتر مستطیل توجه نماید و این تعداد را به عنوان مبنا در نظر بگیرد. حال اگر یک کاربندی رسمی مورد نظر باشد؛ طراح باید هر نقطه روی دایره محیطی را به نقطه دیگری که با همان فاصله مبنا از آن قرار گرفته است؛ متصل نماید. برای مثال، اگر در مقابل ضلع بزرگتر مستطیل زمینه چهار قطعه قرار گرفته باشد؛ هر نقطه روی دایره محیطی باید به نقطه دیگری که با آن به اندازه چهار قطعه فاصله دارد؛ متصل گردد (تصویر ۲، پایین، سمت چپ). در صورتی که کاربندی اختری مورد نظر طراح باشد؛ باید نقاط روی دایرۀ محیطی را با فاصله‌ای بزرگتر از فاصله مبنا به یکدیگر متصل نماید (همان، ۱۳) (تصویر ۲، پایین، سمت راست).



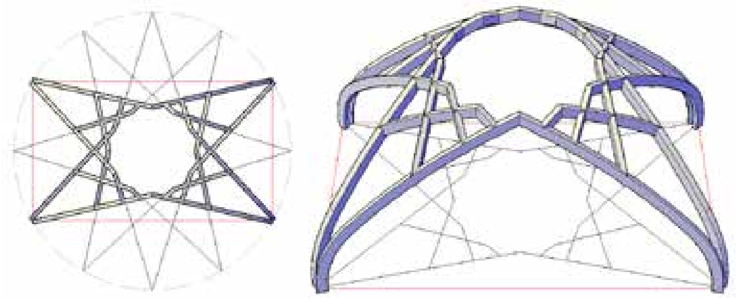
تصویر ۳. پلان و دید سه بعدی کاربندی رسمی طراحی شده در قسمت پایین سمت چپ از تصویر ۲



تصویر ۴. پلان و دید سه‌بعدی کاربندی اختری طراحی شده در قسمت پایین سمت راست از تصویر ۲



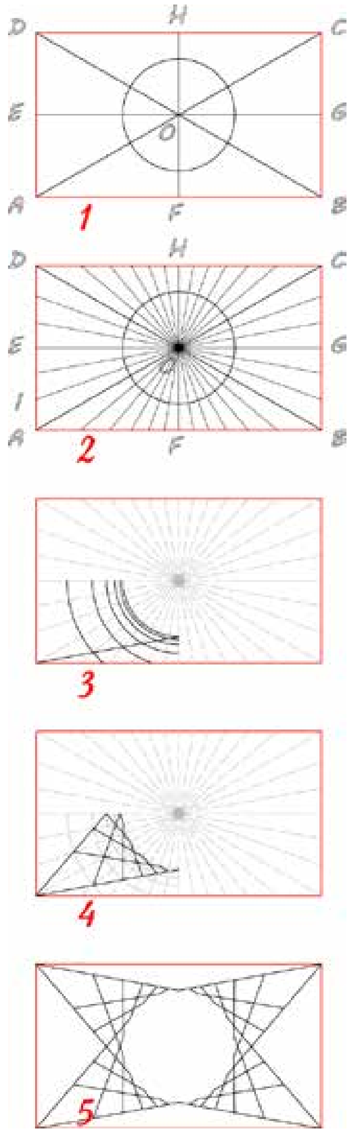
تصویر ۵. نمایش تویزه‌ها با خطوط شکسته در کاربندی قالب سرسفت



شکل ۶. پلان و دید سه‌بعدی کاربندی قالب سرسفت تصویر ۵

اگر کاربندی قالب سرسفت مورد نظر است؛ طراح باید نخست اندازه شمسه را تعیین نماید و آنگاه خطوط تویزه‌ها را به جای آن که با پاره‌خط‌های مستقیم نمایش دهد؛ با پاره‌خط‌های شکسته‌ای به شکل حرف V انگلیسی ترسیم نماید (تصویر ۵). پس از متصل کردن نقاط به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌ها، خطوط اضافه‌ای که نشان‌دهندهٔ تویزه‌ها نیستند؛ پاک می‌شوند و کاربندی تکمیل می‌شود (تصویر ۶).

در خصوص روش استاد پیرنیا، چند نکته و پرسش قابل طرح است. نخست، این که فرمول مورد استفاده در این روش چگونه شکل گرفته و چقدر می‌توان اطمینان داشت که واقعاً دقیق‌ترین و مناسب‌ترین جواب‌ها را تولید می‌کند. آیا می‌توان فرمول دیگری را تصور نمود که جواب‌های بهتری ارائه نماید؟ نکتهٔ دیگر این است که این فرمول چنان تدوین شده که صرفاً در مورد اعداد صحیح به کار گرفته شود و در صورتی که طول اضلاع مستطیل زمینه، اعداد اعشاری (غیرصحیح) باشد؛ کارایی فرمول با اشکال مواجه می‌شود. نکتهٔ بعدی این است که این فرمول فقط در مورد کاربندی‌های یک‌پا کار می‌کند. به عبارت دیگر، در مورد کاربندی‌هایی که در آنها چهار آلت پا باریک در چهار کنج مستطیل زمینه واقع می‌شوند؛ می‌توان از این فرمول استفاده نمود. در حالی که دستهٔ مهم دیگری از کاربندی‌ها یعنی کاربندی‌های دوپا وجود دارند که در آنها پاباریک‌ها نه روی کنج‌های مستطیل زمینه، بلکه در طرفین هر کنج استقرار پیدا می‌کنند[۳]. فرمول مورد اشارهٔ استاد پیرنیا نحوهٔ تشخیص تعداد اضلاع کاربندی‌های دوپا را بیان نمی‌کند.



تصویر ۷. مراحل طراحی یک کاربندی یک پای قالب سرسفت بر اساس روش استاد شعرباف

روش استاد شعرباف

بر اساس توضیحات استاد شعرباف روش طراحی کاربندی (یک پا، قالب سر سفت) بر روی زمینهٔ مستطیلی را می توان به شرح زیر بیان نمود (نک: شعرباف ۱۳۸۵، ۱۱۴-۱۱۵):

مستطیل ABCD زمینهٔ مورد نظر است. قطرهای AC و BD و عمود منصف های EG و FH ترسیم می‌شوند. آنگاه اندازهٔ شمسه با ترسیم دایره‌ای با مرکز نقطه O تعیین میشود که شعاع آن اختیاری و کوچکتر از OF میباشد. سپس، چالش اصلی هندسی در پیش‌روی طراح قرار می‌گیرد. زاویه AOE باید طوری تقسیم شود که اگر AOI یکی از قسمت‌های آن باشد؛ آنگاه زاویه AOF نیز مضرب صحیحی از AOI باشد (تصویر ۷، مرحله ۲). شعرباف بیان میدارد که در عمل این تقسیم‌بندی می‌تواند تاحدودی تقریبی باشد (همان، ۱۱۴)؛ بدین معنا که زاویه‌هایی که مبنای تقسیم AOE و AOF قرار می‌گیرند؛ می‌توانند اندکی با یکدیگر متفاوت باشند.

سپس، طراح مطابق مرحله سوم از تصویر ۷، از گوشه مستطیل زمینه، یک پاره‌خط به محل تلاقی دایره شمسه و یکی از عمودمنصف‌های اضلاع مستطیل وصل می‌نماید که نشان‌دهندهٔ بیرونی‌ترین تویزه کاربندی باشد. همانند مرحله سوم از تصویر ۷، نقاط تلاقی این تویزه بیرونی با قطاع‌های تقسیم‌کنندهٔ AOF جهت ترسیم دایره‌هایی به مرکز O مورد استفاده قرار میگیرند. طبق مرحلهٔ چهارم از تصویر ۷، نقاط تقاطع قوس‌ها با شعاع‌های خارج شده از نقطه O، جهت ترسیم بقیه تویزه‌ها مورد استفاده قرار میگیرد. مطابق مرحلهٔ پنجم از تصویر ۷، با تکرار تویزه‌ها در چهار کنج مستطیل زمینه ترسیم کاربندی تکمیل می‌گردد. هر یک از قوس‌ها نمایندهٔ یک تراز ارتفاعی می‌باشد. ارتفاع نقاط از سطح زمینه به سمت شمسه به طور پیوسته افزایش می‌یابد.

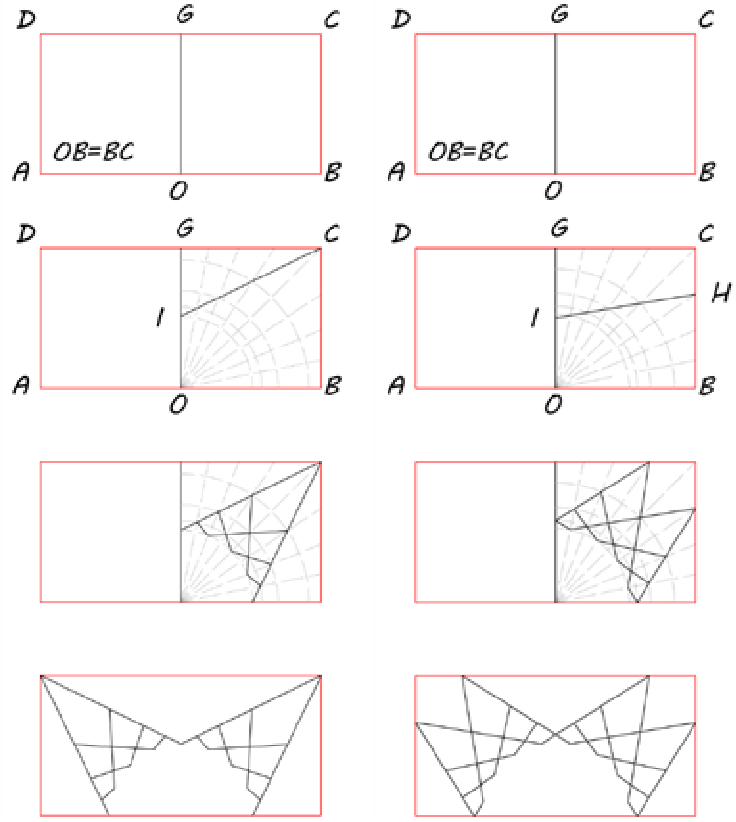
مشکلی که در توضیحات استاد شعرباف وجود دارد این است که در این روش برای نحوهٔ انجام مرحلهٔ دوم -که مهم‌ترین مرحله از لحاظ هندسی می‌باشد- توضیح روشنی ارائه نمی‌شود. علاوه بر این، مشابه روش استاد پیرنیا، در اینجا نیز مسأله تقسیم‌بندی هندسی زمینه برای طراحی کاربندی‌های دوپا مورد بحث و بررسی قرار نمی‌گیرد و راه حلی برای آن ارائه نمی‌شود.

روش استاد لرزاده

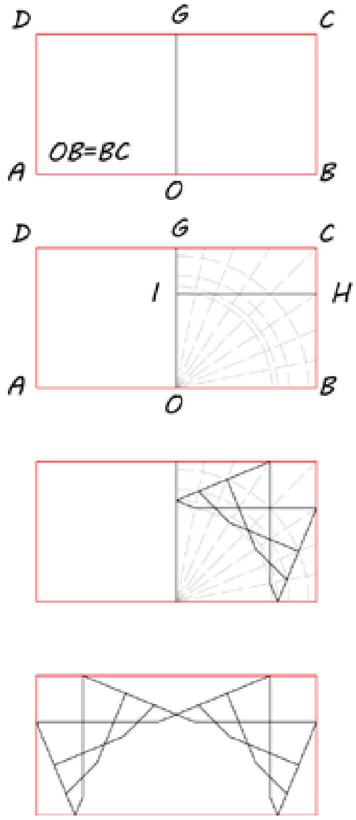
در کتاب منتسب به استاد لرزاده توضیح داده نشده است که طراح چگونه باید روی یک زمینه مشخص کاربندی طراحی نماید. در این کتاب صرفاً تعدادی کاربندی برای زمینه‌های خاص معرفی می‌شود (نک: رئیس‌زاده و مفید ۱۳۸۹). با این حال، از بررسی این نمونه‌ها می‌توان منطق کار را تشخیص داد؛ بخصوص زمانی که کاربندی‌های نیم‌کار در این کتاب معرفی می‌شوند. رویکرد ایشان شباهت زیادی به رویکرد استاد شعرباف دارد. این روش فرضی را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

در مستطیل ABCD طراح باید عمودمنصف OG را رسم نماید. اگر شکل OBCG یک مربع باشد؛ آنگاه زاویه BOG باید به تعداد زوجی از قسمت‌های برابر تقسیم شود. در مثالی که در تصویر ۸ نمایش داده شده؛ این زاویه به هشت قسمت تقسیم شده است. از تقاطع سومین شعاع و CB عمودی استخراج می شود که OG را قطع نماید. پاره خط HI ترسیم می‌شود (تصویر ۸، مرحله ۲). از مرکز O دایره‌هایی ترسیم می‌شوند که از نقاط تقاطع HI و شعاعها عبور می‌نمایند (تصویر ۸، مرحله ۲). نقاط تقاطعی که به دست می‌آیند؛ به شکلی معنی‌دار به یکدیگر متصل می‌شوند به نحوی که آلت‌های نیمکار مورد نظر را شکل بدهند (تصویر ۸، مرحله ۳ و ۴).

نیمکاری که در تصویر ۸ نمایش داده شده است به اصطلاح استاد لرزاده یک نیمکار «مربع» است (همان، ۳۹-۴۰). این در حالی است که برای همان زمینه می‌توان دو نوع کاربندی دیگر هم طراحی نمود. در تصویر ۹ سمت راست، یک «نیمکار مربع با شمسه اختیاری» (همان، ۴۰) نمایش داده شده و در سمت چپ یک «نیمکار دوپا[۴]» (همان، ۴۳) ترسیم شده است. روش طراحی این نیمکارها همان است که در تصویر ۸ بیان گردید.

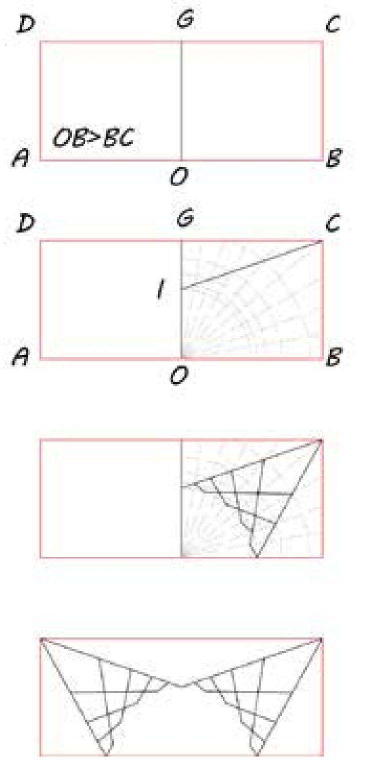


تصویر ۹. سمت راست: مراحل طراحی یک نیمکار مربع با شمسه اختیاری.
سمت چپ: مراحل طراحی یک نیمکار دوپا (کذا) با شمسه اختیاری بر اساس روش استاد لرزاده

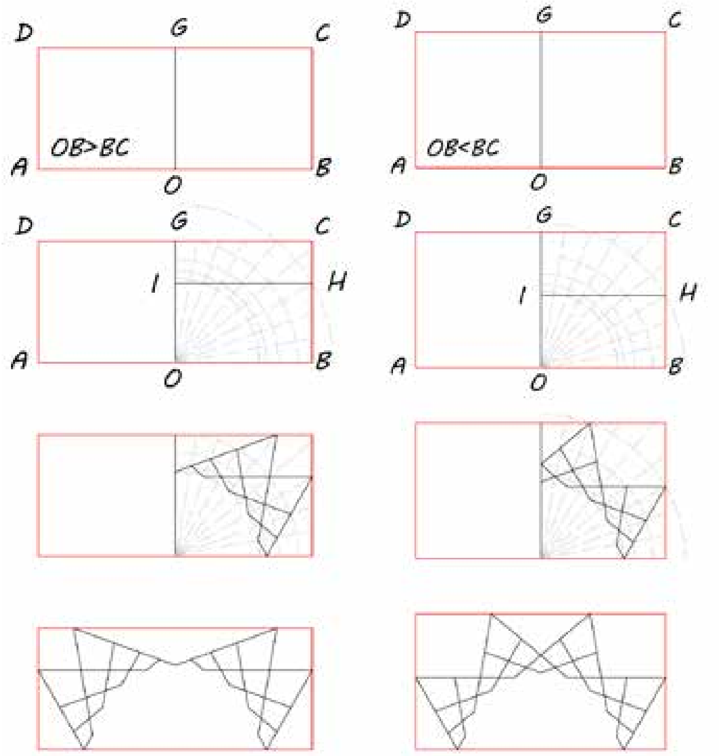


تصویر ۸. مراحل طراحی یک نیمکار مربع رسم عمود بر اساس روش استاد لرزاده

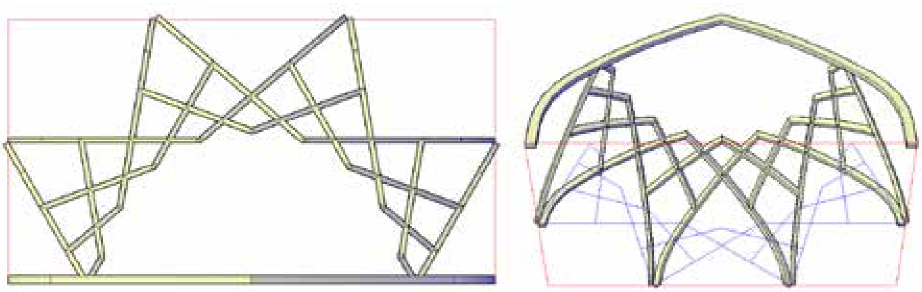
اگر چهارگوش OBCG یک مربع نباشد؛ آنگاه زاویه BOG باید به تعداد فردی از قسمتهای برابر تقسیم گردد. می‌توان تصور نمود که یافتن تعداد این قسمتها کار دشواری بوده است که طراح سنتی می‌بایست از طریق آزمون و خطا آن را انجام دهد. دو پاسخ صحیح برای آن قابل تصور است. یک پاسخ صحیح زمانی به دست می‌آید که یکی از شعاع‌هایی که از نقطه O خارج می‌شود؛ دقیقاً بر قطر OC منطبق گردد یا این که با اختلافی اندک از نزدیکی آن عبور نماید (تصویر ۱۰). این مسأله، همان مسألهٔ حیاتی طراحی کاربندی از منظر هندسی می‌باشد که در روش استاد شعرباف نیز به شکل اندک متفاوتی مطرح شده بود. پاسخ صحیح دیگر زمانی به دست می‌آید که دو شعاع که از نقطه O خارج می‌شوند؛ CB و CG را در نقاطی قطع می‌نمایند که از نقطه O به یک فاصله هستند. البته با این شرط که تعداد شعاعهای بین این دو شعاع عدد فرد باشد (تصویر ۱۱). در این مورد نیز، استاد لرزاده توصیه یا روش روشنی را برای نحوهٔ یافتن این تقسیم‌بندی‌ها ارائه نمی‌نماید.



تصویر ۱۰. یک نیمکار دوپا به اصطلاح استاد لرزاده



تصویر ۱۱. سمت راست: یک نیمکار نُقُل (عمیق)،
سمت چپ: یک نیمکار تنک (کم عمق) به اصطلاح استاد لرزاده



تصویر ۱۲. پلان و نمای سه‌بعدی نیمکار نقل (عمیق) تصویر ۱۱

راه حل ریاضی برای مسأله

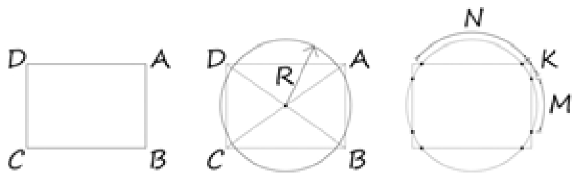
در این بخش مسأله تعیین تقسیم‌بندی مناسب زمینه برای طراحی کاربندی بر روی آن به صورت یک مسأله ریاضی طرح می‌شود و پاسخ علمی برای آن ارائه می‌گردد. از آنجا که دو نوع اصلی کاربندی می‌تواند برای پوشش یک زمینه استفاده شود؛ شامل کاربندی‌های یک‌پا و کاربندی‌های دوپا، مسألهٔ مورد نظر نیز برای این دو حالت طرح می‌شود. در ادامه، نخست به طرح و حل مسأله برای حالت دوپا پرداخته می‌شود و سپس برای حالت یک پا این کار انجام می‌گردد.

راه‌حل برای حالت دوپا

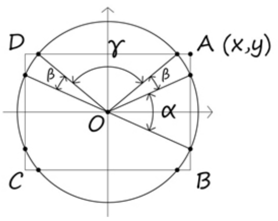
برای یک کاربندی دوپا مسألهٔ مورد نظر به این صورت

قابل صورت‌بندی می‌باشد:

مسأله ۱. مستطیل ABCD داده شده است (تصویر ۱۳). دایره‌ای را از مرکز مستطیل چنان ترسیم نمایید که هر ضلع مستطیل را در دو نقطه قطع نماید با این شرط که طول کمان‌هایی که روی دایره ایجاد می‌شوند؛ مضرب صحیحی از یک عدد حقیقی واحد باشد. شعاع این دایره چند است؟ اگر این مسأله برای یک مستطیل پاسخی ندارد؛ چگونه می‌توان مستطیل‌هایی با اندازه‌های اندکی متفاوت را یافت که شرایط فوق را تأمین نمایند؟



تصویر ۱۳. مسأله مورد نظر برای یک کاربندی دوپا
$K = a \times t,\ M = b \times t,\ N = c \times t,\ (a, b, c \in N,\ t \in R)$



تصویر ۱۴. مسأله مورد نظر که برای زاویه‌ها صورت‌بندی شده است.

پاسخ: می‌توان برای پاسخگویی به مسأله به جای رجوع به طول کمان‌های دایره به زوایای داخلی آن مراجعه؛ و مسأله را بدین شکل طرح نمود: طول شعاع دایره را تعیین نمائید؛ به نحوی که اگر شعاع‌هایی از مرکز دایره به نقاط تقاطع آن با مستطیل ترسیم شوند؛ زاویه‌های ایجاد شده (نک: تصویر ۱۴) مضرب صحیحی از یک عدد حقیقی واحد باشند.

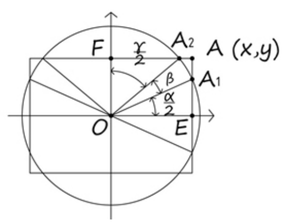
اگر a و b طول و عرض مستطیل باشند و مختصات رأس A، (x , y) باشد؛ آنگاه a=2x وb=2y . از مرکز O دو خط ترسیم می‌شود؛ به نحوی که به طور عمودی اضلاع AB و AD را در نقاط E و F قطع نمایند (تصویر ۱۵). با در نظر گرفتن تقارن‌ها در یک مستطیل و تعریف کوسینوس زاویه قائمه، خواهیم داشت:

در مثلث قائم‌الزاویه A_1EO

معادله ۱: $\cos(\alpha/2)=OE/OA_1 = x/R$

در مثلث قائم الزاویه A_2FO

معادله ۲: $\cos(\gamma/2)=OF/OA_2 = y/R$



تصویر ۱۵. نقاط E و F

حال اگر در نظر گرفته شود که $\alpha=mt,\ \beta=kt,\ \gamma=nt$ که در آن m، k و n اعداد طبیعی هستند؛ آنگاه نتیجه می‌شود:

$$\alpha + \beta + \gamma + \beta = \pi$$

$$mt + 2kt + nt = \pi$$

$$t = \pi/(m+2k+n)$$

بنابراین، مقدار t تعیین خواهد شد. همچنین بنا بر معادله‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت:

معادله ۳:

$$R = x/\cos(\alpha/2) = x/\cos(m/2\ t) = a/(2\cos(m/2\ t))$$

معادله ۴:

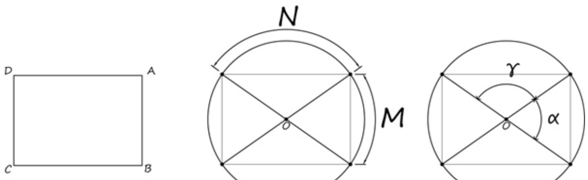
$$R = y/\cos(\gamma/2) = y/\cos(n/2\ t) = b/(2\cos(n/2\ t))$$

در نظر گرفته می شود که R، شعاع، باید در دو معادله صدق نماید. مساوی بودن این دو مقدار بدین معناست که دایره مناسب پیدا شده است و اگر این دو مقدار برابر نباشند؛ بدین معنا خواهد بود که تقسیم‌بندی مطلوب، غیرممکن است. توجه گردد که اگر این دایره پیدا شود؛ زاویه‌های α و γ ساخته می‌شوند و آنگاه زاویه β به طور خودکار ایجاد می‌گردد. بحث تعیین مقدار قابل قبولی از عدم دقت یا رواداری بعداً مورد اشاره قرار خواهد گرفت.

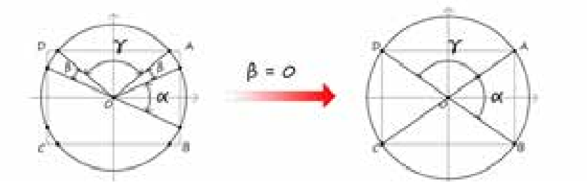
راه حل برای حالت یک پا

برای کاربندی یک پا مسأله به شکل زیر طرح می‌شود:

مسأله ۲. مستطیل ABCD داده شده است (تصویر ۱۶). از مرکز مستطیل (محل تقاطع اقطار آن) دایره‌ای ترسیم می‌شود که از چهار کنج آن بگذرد. آیا طول کمانهای دایره مضرب صحیحی از یک عدد حقیقی واحد است؟ اگر پاسخ مثبت باشد؛ مسأله حل شده است و آنگاه می‌توان اعداد صحیح به دست آمده را برای تقسیم‌بندی قطاع‌ها و ترسیم کاربندی بر روی زمینه ABCD بر اساس روش استاد پیرنیا استفاده نمود. اگر پاسخ منفی باشد؛ چگونه می‌توان مستطیل هایی را پیدا کرد که اندازه‌هایشان به مستطیل ABCD نزدیک باشد؛ و این شرط را هم تأمین نمایند؟



تصویر ۱۶. مسأله برای کاربندی یک پا



تصویر ۱۷. رابطهٔ مسأله برای حالت کاربندی یک پا و دوپا

این مسأله می‌تواند صرفاً وضعیت خاصی از مسأله ۱ در نظر گرفته شود که در آن زاویه β برابر با صفر است؛ و بالتبع تعداد نقاط تقاطع دایره و مستطیل به جای هشت، چهار نقطه است (تصویر ۱۷). از این رو، ضرورتی ندارد که راه حل مجدداً توضیح داده شود.

برنامه به زبان میپل

به منظور حل مسأله ۱ و ۲ برنامه‌ای به زبان میپل نوشته شده که در پیوست ارائه شده است. برنامه مورد نظر این ویژگی‌ها را دارد:

۱. برای هر یک از کمان‌ها تقسیم‌بندی از یک تا ده قطعه، مورد بررسی قرار داده می‌شود و بدین معناست که ۱۰۰۰ وضعیت مورد بررسی قرار می‌گیرد و در بین آنها فقط وضعیت‌هایی که پاسخ تولید می‌کنند؛ به عنوان خروجی درج می‌شوند. اگر استفاده‌کننده قصد داشته باشد که این اعداد را تغییر دهد؛ می‌تواند مقادیر m، n و k را در خط ۱۷، ۱۸، ۷۴، ۷۵، و ۷۶ برنامه[5] به مقادیر دلخواه خود تغییر دهد.

۲. پاسخهای تکراری در خروجی درج نمی‌شوند.

۳. شعاع دایره‌ای که تقسیم‌بندی مورد نظر به m، n و k را ایجاد می‌نماید؛ به عنوان پاسخ در نظر گرفته می‌شود.

۴. پیش از این اشاره گردید که اگر R در معادله‌های ۳ و ۴ برابر باشد؛ آنگاه پاسخ به دست آمده است. اما با توجه به ویژگی‌های اجرایی معماری، می‌توان وضعیت‌هایی را که در آنها شعاع‌های به دست آمده؛ از دو معادلهٔ اندکی با هم تفاوت دارند؛ نیز به عنوان پاسخ‌های تقریبی قبول نمود. در این شرایط طراح می‌تواند تناسبات مستطیل زمینه را اندکی تغییر دهد و تقسیم‌بندی به دست آمده از برنامه را بر آن اعمال نماید. در این برنامه این مقدار اندک به عنوان «رواداری» تعریف شده است و پیش از اجرای برنامه از استفاده‌کننده خواسته می‌شود که مقدار رواداری قابل‌قبول را تعیین نماید. بدیهی است که هر چقدر مقدار متغیر رواداری کمتر تعیین شده باشد؛ پاسخ‌هایی که در خروجی برنامه درج می‌شوند؛ دقیق‌تر خواهند بود. در این برنامه مقدار رواداری بر اساس نسبت طول به عرض مستطیل زمینه تعریف و محاسبه می‌شود.

۵. خروجی برنامه به ترتیب براساس کمترین مقدار رواداری تا بزرگ ترین رواداری قابل قبول مرتب می‌شود. به بیان دیگر، نخستین خروجی، به مستطیلی تعلق دارد که بیشترین نزدیکی و بیشترین شباهت را از لحاظ نسبت اضلاع به مستطیل اولیه دارد.

زمانی که برنامه اجرا می‌شود؛ اطلاعات زیر را به ترتیب از استفاده‌کننده درخواست می‌کند:

۱. برنامه از استفاده‌کننده می‌خواهد که تعیین کند آیا یک کاربندی یک‌پا را مد نظر دارد یا کاربندی دوپا. استفاده‌کننده می‌تواند عدد ۱ را برای تعیین کاربندی یک‌پا و عدد ۲ را برای کاربندی دوپا وارد نماید.

۲. طول مستطیل زمینه پرسیده می‌شود.

۳. عرض مستطیل زمینه پرسیده می‌شود.

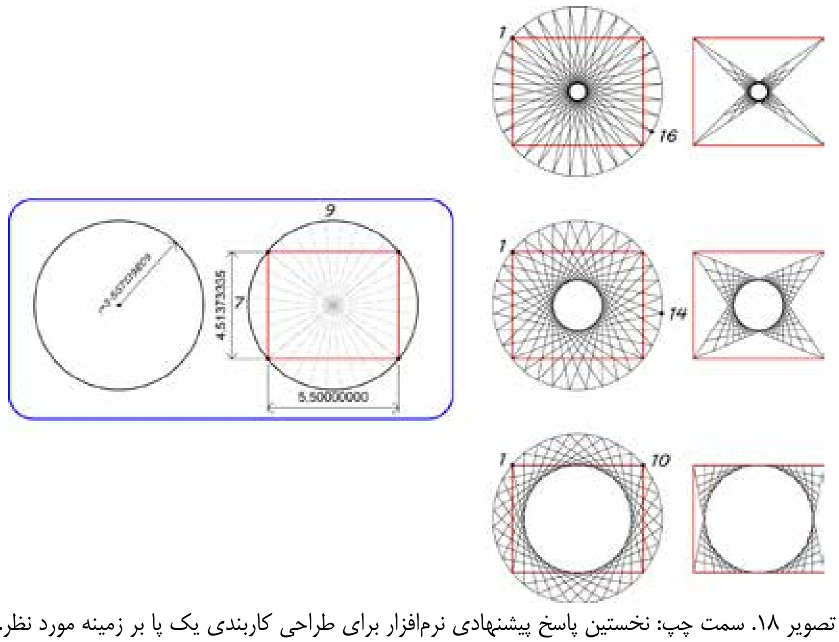
۴. رواداری قابل قبول پرسیده می‌شود که بر اساس نسبت طول به عرض مستطیل تعریف می‌شود.

پس از ورود این اطلاعات، محاسبات انجام می‌شوند و پاسخ‌هایی که در محدودۀ رواداری قابل قبول قرار دارند؛ به ترتیب از پردقت‌ترین پاسخ‌ها تا کم‌دقت‌ترین آنها در خروجی برنامه درج می‌شوند. به عنوان یک نمونه، اگر مستطیلی با ابعاد ۴,۵ و ۵,۵ متر باشد و رواداری تا ۰,۰۳ قابل قبول در نظر گرفته شود؛ این کاربندی‌ها توسط برنامه معرفی می‌شوند:

الف) برای کاربندی یک پا خروجی برنامه بدین ترتیب است:

```
"NOTE: One-footed karbandi is chosen"
"The length is ", 5.5, "and width is ", 4.5, "The ratio of width to length is ", 0.818181818182," and tolerance is ", 0.03
1, "Possible division", 7, 9, "take a circle with radius ", 3.557519809, "Exact ratio is ",
0.8206787907, "in this case tolerance is ", 0.0024969725
2, "Possible division", 3, 4, "take a circle with radius ", 3.517382021, "Exact ratio is ",
0.7974733888, "in this case tolerance is ", 0.0207084294
3, "Possible division", 4, 5, "take a circle with radius ", 3.589870046, "Exact ratio is ",
0.8390996312, "in this case tolerance is ", 0.0209178130
```

دقیق‌ترین پاسخ، اولین پاسخی است که درج شده و یک کاربندی ۳۲ را ایجاد می‌نماید. آن چنان که در تصویر ۱۸ نمایش داده شده است؛ مهم‌ترین مرحله در طراحی کاربندی از منظر هندسی تقسیم زمینه به قسمت‌های مناسب می‌باشد. پس از انجام این کار، طراح ممکن است چندین گزینه در پیش روی خود داشته باشد که از بین آنها مناسب‌ترین را انتخاب نماید. در قسمت راست تصویر ۱۸، سه طراحی امکان‌پذیر نمایش داده شده است. در این مرحله، ملاحظات اجرایی، سازه‌ای و زیباشناختی مختلفی می‌تواند بر تصمیم طراح مؤثر واقع شود. این ملاحظات حتی ممکن است طراح را وادار نماید که پاسخی کم‌دقت‌تر ولی در مجموع مناسب‌تر را از بین گزینه‌های ارائه شده توسط نرم‌افزار، انتخاب نماید. به هر حال، در این پژوهش صرفاً مرحله اول از این فرایند مورد توجه می‌باشد و ارزیابی‌های بین گزینه‌های ارائه شده از حیطۀ پژوهش حاضر خارج است.

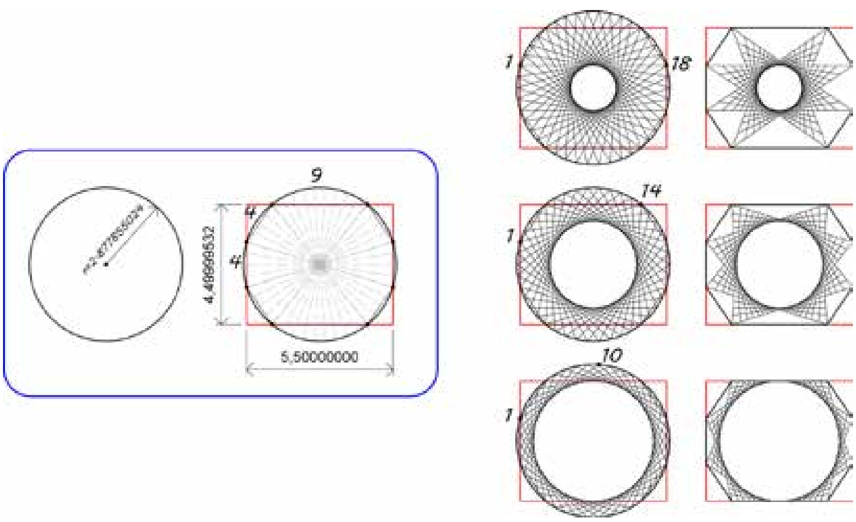


تصویر ۱۸. سمت چپ: نخستین پاسخ پیشنهادی نرم‌افزار برای طراحی کاربندی یک پا بر زمینه مورد نظر.
سمت راست: سه نمونه از کاربندی‌هایی که می‌توان بر مبنای این تقسیم‌بندی طراحی نمود.

ب) برای کاربندی‌های دوپا، نتایج به دست آمده توسط برنامه در جدول ۱ به نمایش درآمده‌است. مجدداً اشاره می‌شود که نخستین ردیف جدول دقیق‌ترین پاسخ از منظر ریاضی را نشان می‌دهد. تصویر ۱۹ این کاربندی ۴۲ ضلعی را نمایش می‌دهد.

No.	n-sided Karbandi	Possible division	Radius	Ratio	Tolerance
۱	۴۲	۴, ۴, ۹	۲,۸۷۷۸۵۵۰۲۴	۰,۸۱۸۱۸۰۹۶۷۱	۸,۵۱۱ ۱۰–۷
۲	۴۰	۲, ۵, ۸	۲,۷۸۴۲۷۹۰۹۶	۰,۸۱۹۱۰۱۴۹۲۹	۰,۰۰۰۹۱۹۶۷۴۷
۳	۴۴	۳, ۵, ۹	۲,۸۱۴۳۱۵۹۴۰	۰,۸۱۹۲۶۳۹۹۰۶	۰,۰۰۱۰۸۲۱۷۲۴
۴	۲۴	۴, ۱, ۶	۳,۱۷۵۴۲۶۴۸۱	۰,۸۱۶۴۹۶۵۸۰۹	۰,۰۰۱۶۸۵۲۳۷۳
۵	۳۶	۴, ۳, ۸	۲,۹۲۶۴۸۸۸۷۴	۰,۸۱۵۲۰۷۴۶۹۱	۰,۰۰۲۹۷۴۳۴۹۱
۶	۴۸	۴, ۵, ۱۰	۲,۸۴۷۰۰۹۴۹۶	۰,۸۲۱۳۳۹۸۱۵۹	۰,۰۰۳۱۵۷۹۹۷۷
۷	۳۶	۱, ۵, ۷	۲,۷۶۰۵۰۴۵۵۳	۰,۸۲۲۲۸۱۰۷۲۰	۰,۰۰۴۰۹۹۲۵۳۸
۸	۳۸	۳, ۴, ۸	۲,۸۳۶۸۰۵۴۹۴	۰,۸۱۴۰۵۰۲۲۹۹	۰,۰۰۴۱۳۱۵۸۸۳
۹	۳۰	۴, ۲, ۷	۳,۰۱۰۲۴۹۷۶۶	۰,۸۱۳۴۷۳۲۸۶۰	۰,۰۰۴۷۰۸۵۳۲۲
۱۰	۴۰	۵, ۳, ۹	۲,۹۷۶۵۷۸۵۵۱	۰,۸۲۳۰۵۷۴۸۶۲	۰,۰۰۴۸۷۵۶۶۸۰
۱۱	۴۶	۵, ۴, ۱۰	۲,۹۱۸۵۱۲۲۰۴	۰,۸۲۳۲۴۴۶۷۹۲	۰,۰۰۵۰۶۲۸۶۱۰
۱۲	۵۰	۳, ۶, ۱۰	۲,۷۹۹۵۸۸۴۰۸	۰,۸۲۳۶۰۵۳۰۸۶	۰,۰۰۵۴۲۳۴۹۰۴
۱۳	۳۴	۲, ۴, ۷	۲,۷۹۷۶۳۵۰۵۳	۰,۸۱۱۸۴۰۳۵۱۹	۰,۰۰۶۳۴۱۴۶۶۳
۱۴	۴۶	۲, ۶, ۹	۲,۷۷۵۸۵۴۴۵۸	۰,۸۲۴۶۵۰۷۳۴۳	۰,۰۰۶۴۶۸۹۱۶۱
۱۵	۳۴	۵, ۲, ۸	۳,۰۷۲۰۶۵۲۰۵	۰,۸۲۵۵۵۷۶۶۵۶	۰,۰۰۷۳۷۵۸۴۷۴
۱۶	۵۰	۱, ۷, ۱۰	۲,۷۵۵۴۳۷۲۲۶	۰,۸۱۰۶۱۶۵۶۰۸	۰,۰۰۷۵۶۵۲۵۷۴
۱۷	۳۸	۷, ۱, ۱۰	۳,۲۸۴۸۹۰۲۴۸	۰,۸۰۹۰۱۶۵۹۲۵	۰,۰۰۹۱۶۵۲۲۵۷
۱۸	۴۲	۱, ۶, ۸	۲,۷۵۷۷۱۱۱۱۹	۰,۸۲۸۵۵۵۵۸۳۷	۰,۰۱۰۳۷۳۷۶۵۵
۱۹	۳۲	۳, ۳, ۷	۲,۸۷۳۷۴۲۳۸۲	۰,۸۰۷۷۹۳۷۸۲۳	۰,۰۱۰۳۸۸۰۳۵۹
۲۰	۵۲	۲, ۷, ۱۰	۲,۷۷۰۱۹۷۸۶۱	۰,۸۲۹۰۲۸۴۱۶۴	۰,۰۱۰۸۴۶۵۹۸۲
۲۱	۴۴	۶, ۳, ۱۰	۳,۰۲۳۲۰۰۶۰۷	۰,۸۳۰۸۳۰۰۲۵۹	۰,۰۱۲۶۴۸۲۰۷۷
۲۲	۴۸	۱, ۷, ۹	۲,۷۵۵۹۰۰۵۹۵	۰,۸۳۳۲۵۳۶۷۲۴	۰,۰۱۵۰۷۱۸۵۴۲
۲۳	۴۴	۱, ۶, ۹	۲,۷۵۷۰۲۴۵۸۲	۰,۸۰۲۵۸۶۱۳۸۳	۰,۰۱۵۵۹۵۶۷۹۹
۲۴	۲۸	۲, ۳, ۶	۲,۸۲۰۷۲۱۳۷۴	۰,۸۰۱۹۳۷۷۳۵۷	۰,۰۱۶۲۴۴۰۸۲۵

۲۵	۲۸	۵, ۱, ۷	۳,۲۴۷۸۱۰۸۰۱	۰,۸۳۵۱۰۸۷۴۲۳	۰,۰۱۶۹۲۶۹۲۴۱
۲۶	۲۶	۳, ۲, ۶	۲,۹۴۱۱۲۵۳۷۸	۰,۸۰۰۵۳۲۳۴۷۹	۰,۰۱۷۶۴۹۴۷۰۳
۲۷	۲۴	۱, ۳, ۵	۲,۷۷۳۷۲۹۶۴۲	۰,۸۰۰۱۹۹۱۵۵۰	۰,۰۱۷۹۸۲۶۶۳۲
۲۸	۳۸	۶, ۲, ۹	۳,۱۲۶۸۶۹۸۹۹	۰,۸۳۶۵۵۰۱۶۳۸	۰,۰۱۸۳۶۸۳۴۵۶
۲۹	۵۴	۱, ۸, ۱۰	۲,۷۵۴۶۶۰۴۵۰	۰,۸۳۶۹۰۳۷۲۰۰	۰,۰۱۸۷۲۱۹۰۱۸
۳۰	۲۰	۳, ۱, ۵	۳,۰۸۶۳۹۷۱۵۳	۰,۷۹۳۶۰۴۴۹۳۳	۰,۰۲۴۵۷۷۳۲۴۹
۳۱	۳۴	۶, ۱, ۹	۳,۲۳۴۴۶۷۸۶۱	۰,۷۹۲۳۸۰۶۹۳۴	۰,۰۲۵۸۰۱۱۲۴۸
۳۲	۴۶	۳, ۵, ۱۰	۲,۸۰۸۷۴۷۵۱۷	۰,۷۹۲۲۸۲۶۰۴۰	۰,۰۲۵۸۹۹۲۱۴۲
۳۳	۳۸	۱, ۵, ۸	۲,۷۵۹۴۲۴۸۳۵	۰,۷۹۱۸۴۵۰۶۱۷	۰,۰۲۶۳۳۶۷۵۶۵
۳۴	۴۲	۲, ۵, ۹	۲,۷۸۱۰۶۲۱۶۷	۰,۷۹۰۶۶۲۵۲۹۶	۰,۰۲۷۵۱۹۲۸۸۶
۳۵	۴۲	۷, ۲, ۱۰	۳,۱۷۵۴۲۶۴۸۱	۰,۸۴۶۴۵۵۳۹۱۰	۰,۰۲۸۲۷۳۵۷۲۸
۳۶	۴۲	۳, ۵, ۸	۲,۸۲۰۷۲۱۳۷۴	۰,۸۴۷۴۸۷۰۴۳۸	۰,۰۲۹۳۰۵۲۲۵۶
۳۷	۲۶	۲, ۳, ۵	۲,۸۳۲۳۰۱۵۳۵	۰,۸۴۷۶۱۳۹۸۷۸	۰,۰۲۹۴۳۲۱۶۹۶
۳۸	۱۶	۱, ۲, ۳	۲,۸۰۳۸۷۵۶۸۵	۰,۸۴۷۷۵۹۰۶۴۹	۰,۰۲۹۵۷۷۲۴۶۷
۳۹	۱۶	۱, ۲, ۳	۲,۸۰۳۸۷۵۶۸۵	۰,۸۴۷۷۵۹۰۶۵۰	۰,۰۲۹۵۷۷۲۴۶۸
۴۰	۳۶	۳, ۴, ۷	۲,۸۴۷۰۰۹۴۹۶	۰,۸۴۸۰۴۸۵۹۹۶	۰,۰۲۹۸۶۶۷۸۱۴



تصویر ۱۹. سمت چپ: نخستین پاسخ پیشنهاد شده توسط برنامه برای کاربندی دوپا بر زمینه مورد نظر.
سمت راست: سه نمونه از کاربندی‌هایی که می‌توان بر مبنای این تقسیم‌بندی طراحی نمود.

آزمونی برای فرمول استاد پیرنیا

با توجه به این‌که برنامهٔ تدوین شده در این پژوهش ابزار علمی دقیقی برای یافتن پاسخ مسألهٔ تقسیم‌بندی زمینه کاربندی‌ها را در اختیار مخاطب می‌گذارد؛ خالی از لطف نیست که به کمک این ابزار، فرمول تجربی مورد اشاره استاد پیرنیا به آزمون گذاشته؛ و دقت آن سنجیده شود. بنا به گفتهٔ استاد پیرنیا معماران سنتی ایران از این فرمول ساده به عنوان مبنایی جهت یافتن پاسخ مسألهٔ مورد اشاره استفاده می‌نمودند (بزرگمهری ۱۳۸۵، ۱۲).

جدول ۲ پاسخ‌های تولید شده توسط فرمول استاد پیرنیا و پاسخ‌های تولید شده توسط برنامه را نشان می‌دهد[۶]. ستون‌های اول و دوم جدول از کتاب بزرگمهری (همان، ۱۲) استخراج شده‌اند. ستون‌های بعدی اطلاعاتی را که توسط نرم‌افزار تولید شده‌اند؛ به‌ترتیب از دقیق‌ترین پاسخ‌ها به کم‌دقت‌ترین آنها برای هر مورد به نمایش درمی‌آورند. جالب است که مشاهده می‌شود فرمول تجربی ساده استاد پیرنیا در پنج مورد از نه مورد، همان دقیق‌ترین پاسخی را که نرم‌افزار محاسبه کرده است؛ تولید می‌نماید. در خصوص موردهایی هم که پاسخ تولید شده توسط فرمول تجربی، دقیق‌ترین پاسخ پیشنهادی توسط نرم‌افزار نیست؛ می‌توان این تفاوت را انعکاس‌دهندهٔ دغدغه‌های اجرایی، سازه‌ای و یا زیباشناختی معماران سنتی دانست. برای مثال، برای زمینه‌ای با ابعاد سه متر در چهار متر، تقریباً غیرممکن بود که کاربندی ۳۴ یا حتی ۲۴ ضلعی ساخته شود که این امر به محدودیت‌های اجرایی برمی‌گشت. بنابراین، در این مورد معماران سنتی یک کاربندی ده‌ضلعی را با وجود رواداری در حد دو درصد ترجیح می‌دادند. بدین ترتیب می‌توان گفت؛ فرمول تجربی مورد استفاده معماران ایرانی، با وجود محدودیت‌هایی که دارد؛ یک فرمول کارآمد بوده که می‌توانسته به‌خوبی به‌عنوان یک ابزار راهنمای مفید اولیه مورد استفاده این معماران قرار بگیرد.

جدول ۲. پاسخ های تولید شده توسط فرمول تجربی و برنامه به زبان میپل

جواب راه حل ریاضی امروزی				جواب فرمول استاد پیرنیا	
شعاع دایره محیطی	تقسیم بندی دایره	رواداری	کاربندی های قابل استفاده	کاربندی قابل استفاده	ابعاد زمینه
۱,۸۰۴۰۳۴۶۶۱	۳.۵	۰,۰۰۱۵۱۱۹۷۱۰	۱٦	٦	۲×۳
۱,۸۲۲۶۳۵۹۷۴	۵[illegible]۸	۰,۰۲۳۵۸۳۴۹۵۱	۲٦		
۱,۷۸۳۰۵۳۴۳۴	۴[illegible]۷	۰,۰۲۴۰۰۵۶۸۹۷	۲۲		
۱,۷۷۱۵۳۳۱۶۴	۵[illegible]۹	۰,۰۳۸۳۲۵۰۲۱۵	۲۸		
۱,۸۵۴۱۰۱۹۶۶	۲[illegible]۳	۰,۰۵۹۸۷۵۸۶۱۱	۱۰		
۱,۸۵۴۱۰۱۹۶۶	۲[illegible]۳	۰,۰۵۹۸۷۵۸۶۱۲	۱۰		
۱,۸۷۹۶۵۸۶۷۰	۷[illegible]۱۰	۰,۰۸۸۴۹۸۲۷۹۲	۳٤		
۱,۷۳۲۰۵۰۸۰۸	۱[illegible]۲	۰,۰۸۹۳۱۶۳۹۷۳	6		
۲,۲۴۴۶۵۲۴۷۵	۳[illegible]۷	۰,۰۰۹۵۲۵۴۴۹۴	۲۰	۸	۲×۴
۲,۲۱۹۸۳۲۵۲۸	۲[illegible]۵	۰,۰۱۸۴۲۵۳۸۱۴	۱٤		
۲,۲۵۸۷۲۳۱۲۴	۴[illegible]۹	۰,۰۲۴۸۴۰۴۸۷۲	۲٦		
۲,۱۹۸۶۹۱۳۵۰	۳[illegible]۸	۰,۰۴۳۳۱۵۳۰۲۳	۲۲		
۲,۳۰۹۴۰۱۰۷۷	۱[illegible]۲	۰,۰۷۷۳۵۰۲۶۸۹	٦		
۲,۳۰۹۴۰۱۰۷۷	۱[illegible]۲	۰,۰۷۷۳۵۰۲۶۹۰	٦		
۲,۳۰۹۴۰۱۰۷۷	۱[illegible]۲	۰,۰۷۷۳۵۰۲۶۹۲	٦		
۲,۳۰۹۴۰۱۰۷۷	۱[illegible]۲	۰,۰۷۷۳۵۰۲۶۹۴	٦		
۲,۱۶۴۷۸۴۴۰۰	۱[illegible]۳	۰,۰۸۵۷۸۶۴۳۷۶	8		
۲,۵۰۶۲۱۱۵۶۰	۷[illegible]۱۰	۰,۰۰۵۱۶۴۹۴۵۹	۳٤	۱۰	۳×۴
۲,۵۲۰۹۴۴۸۲۸	۵[illegible]۷	۰,۰۱۷۳۲۶۹۸۸۰	۲٤		
۲,۴۷۲۱۳۵۹۵۵	۲[illegible]۳	۰,۰۲۳۴۵۷۴۷۲۱	10		
۲,۸۸۶۷۵۱۳۴۶	۱[illegible]۲	۰,۰۲۲۶۴۹۷۳۰۶	6 , 12	۱۲	۳×۵
۳,۱۹۷۶۲۰۰۲۰	۳[illegible]۴	۰,۰۰۲۵۲۶۶۱۱۲	14	۱۴	۴×۵

۳,۶۰۸۰۶۹۳۲۲	۳□۵	۰,۰۰۱۵۱۱۹۷۱۰	16	۱۶	۴×۶
۳,۹۱۶۲۲۱۸۶۸	۴□۵	۰,۰۰۵۷۶۶۲۹۷۹	18	۱۸	۵×۶
۴,۳۲۶۲۳۷۹۲۲	۲□۳	۰,۰۱۲۲۵۶۸۱۳۵	10, 20	۲۰	۵×۷
۲,۵۰۶۲۱۱۵۶۰ ۲,۵۲۰۹۴۴۸۲۸	۷□۱۰ ۵□۷	۰,۰۰۵۱۶۴۹۴۵۹ ۰,۰۱۷۳۲۶۹۸۸۰	۳٤ 24	۲۴	۶×۸

بررسی‌های پژوهش حاضر در اینجا به پایان می‌رسد؛ اما بررسی دلایل ریاضی پشت این فرمول و نحوهٔ ارتباط آن با راه‌حل ریاضی امروزین می‌تواند موضوع پژوهش‌های آتی قرار گیرد. به هر حال، این یافته می‌تواند به این واقعیت تاریخی مرتبط دانسته شود که در گذشته ریاضی‌دانان برجسته‌ای بودند؛ مانند بوزجانی[۷]، که به حل مسائل کاربردی حرفه‌مندان مختلف از جمله معماران علاقه‌مند بودند و راه‌حل‌های سادهٔ ریاضی را جهت استفاده توسط این افراد ابداع می‌نمودند. این احتمال وجود دارد که فرمول مورد اشاره نیز توسط یکی از این ریاضی‌دانان گمنام تدوین شده باشد. اما در حال حاضر، نمی‌توان مطلب بیشتری در این باره بیان نمود.

نتیجه گیری

با مرور ادبیات علمی مرتبط ملاحظه گردید؛ مسألهٔ تعیین تقسیم‌بندی مناسب زمینه برای طراحی کاربندی بر روی آن در منابع سنتی به شکل دقیقی حل نشده است و طراح اغلب باید بکوشد که به کمک آزمون و خطا راه‌حل بهینه‌ای را بیابد. این امر می‌تواند در ارتباط نزدیک با اظهارات ابوالقاسمی در نظر گرفته شود (نک: ابوالقاسمی ۱۳۸۹، ۳۸۵–۳۸۶)؛ مبنی بر این که برای معماران ایرانی، طراحی و ساخت سقف فضاها دغدغهٔ اولیه قلمداد می‌شده و طراحی پلان طبقات از آن تبعیت می‌نموده است. این در حالی است که معمولاً در معماری معاصر نخست طراحی پلان طبقات مطرح می‌شود و طراحی سقف فضاها به دنبال آن مورد توجه قرار می‌گیرد. از این رو، می‌توان دریافت که مسألهٔ طراحی کاربندی برای یک زمینه خاص، به شکل انتزاعی، نامحدود و دقیقی که در این مقاله مطرح می‌شود؛ برای معماران سنتی مطرح نبوده است. تأکیدی که در معماری سنتی بر کاربرد شکل‌های استاندارد برای زمینه کاربندی‌ها می‌گردد؛ از قبیل هشت و نیم‌هشت، نگینی، کشکولی و غیره، بیانگر آن است که مسألهٔ طراحی کاربندی بر روی یک زمینهٔ مشخص برای معماران سنتی به شکل بسیار محدودتری از آنچه در این پژوهش مورد بررسی قرار می گیرد؛ مطرح بوده است.

همچنین، میزان دقتی که به طور متعارف در طراحی کاربندی‌ها در معماری سنتی وجود داشت؛ در حدی بود که پاسخ‌های تقریبی برای مسأله مورد بررسی را هم به راحتی می‌پذیرفت؛ به نحوی که انحراف جزئی شکل شمسه از دایره به سمت بیضی و ناهمسان شدن آلت‌های کاربندی در حد جزئی به چشم نمی‌آمد و نقصی برای کار محسوب نمی‌شد. نگارندگان هرچند این تفاوت‌های ساختاری را می‌پذیرند؛ اما همچنان معتقدند که به منظور شناسایی و به‌روزرسانی مفهوم کاربندی در معماری ایران، صورت‌بندی مسألهٔ طراحی کاربندی به عنوان یک مسأله ریاضی موضوع جذاب و مفیدی برای بررسی می‌باشد.

در پژوهش حاضر، این مسأله مورد بررسی قرار گرفت و به منظور حل آن، برنامه‌ای به زبان میپل تدوین گردید. با استفاده از این برنامه، طراح می‌تواند به آسانی و با دقت بالا کاربندی‌های یک‌پا و دوپای قابل استفاده بر روی هر زمینهٔ مورد نظر را بیابد. البته در مرحلهٔ بعد، باید از بین کاربندی‌های پیشنهادی یکی را برگزیند که نحوهٔ انجام این کار و معیارهای قابل استفاده در آن، خارج از حیطهٔ پژوهش حاضر می‌باشد. در پایان پژوهش، مقایسه‌ای بین پاسخ‌های تولید شده توسط نرم‌افزار و فرمول تجربی استاد پیرنیا صورت گرفت و مشاهده شد که فرمول تجربی به رغم محدودیت‌هایی که دارد؛ می‌تواند برای اکثر زمینه‌های متعارف پاسخ‌های دقیقی تولید نماید. این امر ممکن است حاکی از همکاری تاریخی بین ریاضی‌دانان قدیم با معماران قلمداد گردد که البته بررسی دقیق‌تر آن نیازمند پژوهش‌های آتی می‌باشد.

پی‌نوشت

۱. میپل ۱۳ (Maple ۱۳,۰) محصول شرکت میپل‌سافت (Maplesoft) می‌باشد که شعبه‌ای از شرکت واترلو میپل (Waterloo Maple Inc.) است.

۲. واحد سنتی اندازه‌گیری طول در معماری ایرانی «گز» یا «ذرع» بود که تقریباً معادل ۱۰۶ سانتی‌متر بوده است. با این حال، استاد پیرنیا در مثال‌هایی که ارائه می‌نماید؛ واحد متر را استفاده می‌کند.

۳. برای توضیح درمورد انواع کاربندی ها و اصطلاحات تخصصی آنها نک Pour Ahmadi, 2014.

۴. منظور از اصطلاح دوپا در روش استاد لرزاده و استاد شعرباف یکسان نیست. آنچه را که لرزاده یک نیمکار دوپا می‌نامد؛ در روش شعرباف یک‌پا نامیده می‌شود. در این پژوهش، روش شعرباف ملاک قرار گرفته است.

۵. نک به متن برنامه که در پیوست ارائه شده‌است.

۶. توجه گردد که بر اساس مقادیر فعلی متغیرها، برنامه تقسیم‌بندی هر کمان دایره در مقابل اضلاع مستطیل را برای همه وضعیت‌ها از یک تا ده قسمت، مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهد. بدیهی است که طراح در صورت تمایل می‌تواند این متغیرها را تغییر دهد.

۷. نک: البوزجانی ۱۳۸۹

منابع

۱. ابوالقاسمی، لطیف. ۱۳۸۹. *هنجار شکل‌یابی معماری اسلامی ایران، در: معماری ایران (دوره اسلامی)*. ویرایش محمد یوسف کیانی. تهران: سمت.

۲. بزرگمهری، زهره. ۱۳۸۵. *هندسه در معماری*. تهران: انتشارات سازمان میراث فرهنگی کشور.

۳. البوزجانی، ابوالوفا محمد بن محمد. ۱۳۸۹. *هندسه ایرانی: کاربرد هندسه در عمل*. ترجمه و اضافات توسط سید علیرضا جذبی. تهران: سروش.

۴. پورنادری، حسین. ۱۳۷۹. *شعرباف و آثارش (جلد دوم گره و کاربندی)*. تهران: انتشارات سازمان میراث فرهنگی کشور.

۵. رئیس‌زاده، مهناز، و حسین مفید. ۱۳۸۹. *احیای هنرهای از یاد رفته: مبانی معماری سنتی در ایران به روایت استاد حسین لرزاده*. تهران: مولا.

۶. شعرباف، اصغر. ۱۳۸۵. *گره و کاربندی*. تهران: انتشارات سازمان میراث فرهنگی کشور.

References

1. Abol-Ghāsemi, Latif. 2011. *The Order of Creation of Form in Iranian Islamic Architecture, in: The Architecture of Iran (Islamic period).* Edited by Mohammad Yousof Kiāni. Tehran: SAMT.

2. Bozorgmehri, Zohreh. 1992. *Geometry in Architecture.* Tehran: Iranian Cultural Heritage Organization.

3. Al-Buzjāni, Abu Alvafā Mohammad ibn-e Mohammad. 2011. *Persian Geometry: Applied Geometry.* Persian Translation with Additions by Seyyed Alireza Jazbi. Tehran: Soroush.

4. Pour Ahmadi, M. 2014. *A Basic Method for Naming Persian Karbandis Using a Set of Numbers.* Nexus Network Journal 16(2): 313-343.

5. Pour Nāderi, Hossein. 1999. *Sharbaf and His Works; Second Volume of Gereh and Karbandi.* Tehran: Iranian Cultural Heritage Organization.

6. Ra'ees Zādeh, Mahnāz and Hossein Mofid. 2011. *Revival of Forgotten Arts: Basics of Traditional Architecture in Iran as Narrated by Master Hossein-e Lorzadeh.* Tehran: Moula.

7. Sha'rbāf, Asghar. 2006. *Gereh and Karbandi.* Tehran: Iranian Cultural Heritage Organization.

ضمیمه

برنامه نوشته شده به زبان میپل که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است، در اینجا ارائه شده است.

شروع برنامه

```
> karbandi := proc( );
local i :
i := readstat(" Enter 1 for 1- pa or 2 for 2 - pa");
if i = 1 then
pa1 := proc( );
local a, b, e :
a := readstat(Length) :
b := readstat(Wide) :
e := readstat(Tolerance) :
if a ≤ 0 or b ≤ 0 or e < 0 or e > 10 then
error("Length, width,tolerance must be positive and Tolerance must be less than 10");
end if
ratio := evalf(b/a, 12) :
print(" Your length is ", a , "and width is ", b, " The ratio of width to length is ", ratio,
   " and Tolerance is ", e);
p := 0 :
for n from 1 to 10 do
 for m from 1 to 10 do
 t := 3.14159265358979/(n + m) :
R := evalf(1/(2·cos(n/2·t)), 15) :
y := evalf(2·R·cos(m/2·t), 15) :
y := evalf(y) :
R := a·R :
if abs(y − ratio) ≤ e then :
d := gcd(n, m) :
 p := p + 1 :
E[p] := abs(y − ratio) :
V[E[p]] := ("Possible division", n/d, m/d, " take a circle with radius ", R, "Exact ratio is ",
   y) :
end if
end do
end do
if p = 0 then
print("Sorry ! There is no result , try again by another rectangle or tolerance") :
else
k := 0 :
M[0] := 0 :
for j from 1 to p do
M[j] := 100;
for i from 1 to p do
if M[j − 1] < E[i] < M[j] then :
M[j] := E[i] :
else
 end if
```

ادامه برنامه

```
end do
end do
for i from 1 to p do
if M[i] < 100 then
k := k + 1 :
else
end if
end do
for i from 1 to k do
print(i, V[M[i]], "in this case tolerance is ", M[i]);
end do;
 end if
end proc
pa1( );
 else
if i = 2 then
print("NOTE: You choose karbandiye 2 pa");
pa2 := proc( );
local a, b, e :
a := readstat(Length) :
b := readstat(Width) :
e := readstat(Tolerance) :
 if a ≤ 0 or b ≤ 0 or e < 0 or e > 10 then
error("Length, width, and tolerance must be positive and Tolerance must be less than 10");
end if
ratio := evalf(b/a, 12) :
print(" Your length is ", a , "and width is ", b, " The ratio of width to length is ", ratio,
   " and Tolerance is ", e);
p := 0 :
for n from 1 to 10 do
for k from 1 to 10 do
 for m from 1 to 10 do
 t := 3.14159265358979/(n + m + 2 k) :
R := evalf(1/(2·cos(n/2·t)), 15) :
y := evalf(2·R·cos(m/2·t), 15) :
y := evalf(y) :
R := a·R :
if abs(y − ratio) ≤ e then :
d := gcd(gcd(n, m), k) :
p := p + 1 :
E[p] := abs(y − ratio) :
V[E[p]] := ("Possible division", n/d, k/d, m/d, " take a circle with radius ", R,
   "Exact ratio is ", y) :
end if
```

قسمت پایانی برنامه

```
end do
end do
end do
if p = 0 then
print("Sorry ! There is no result , try again by another rectangle or tolerance") :
else
k := 0 :
M[0] := 0 :
for j from 1 to p do
M[j] := 100;
for i from 1 to p do
if M[j − 1] < E[i] < M[j] then :
M[j] := E[i] :
else
 end if
end do
end do
for i from 1 to p do
if M[i] < 100 then
k := k + 1 :
else
end if
end do
for i from 1 to k do
print(i, V[M[i]], "in this case tolerance is ", M[i]);
end do;
 end if
end proc
 pa2( );
else
 error("You must Enter number 1 or 2");
end if
end if ;
end proc;
karbandi( );
```

Journal of Reasearch in Islamic Architecture / No.23 / Summer 2019

Design of Persian Karbandi: The Problem of Dividing the Base from a Mathematical Viewpoint

Mojtaba Pour Ahmadi *

Department of Architecture, Faculty of Architecture and Arts, University of Guilan, Rasht, Iran (Corresponding Author)

Mehdi Sohrabi **

Department of Mathematics, Roudsar and Amlash Branch, Islamic Azad University, Roudsar, Iran

Received:30/04/2017 Accepted: 03/06/2018

Abstract

Karbandi is the structure of a kind of roofing in Persian architecture. One of the main issues related to the design of karbandi is that, due to its geometrical structure, it is not possible to design any desired karbandi on a given base. Therefore, it is necessary for the designer to be able to discern the proper karbandi for a given base. The most critical stage in designing a karbandi is when the designer should recognize the number of sides of a proper karbandi for the given base. Therefore, the question that this paper is trying to answer is that from a mathematical point of view how an architect can find out the proper segmentation of the base to fit the geometrical structure of a karbandi.

In this paper first a literature review of traditional methods for designing karbandis is conducted in which the methods of three master architects are examined. They include master Pirnia, Sha’rbaf, and Lorzadeh. The problem with these traditional methods is that no clear explanation is given for the way the designer can reach a proper division of the base. Only Pirnia speaks of a simple empirical formula that was used by traditional architects.

This formula has its specific limitations too. It is so arranged that in order to produce a meaningful answer, the numbers pertaining to the length and width of the base rectangle have to be integer numbers. However, it is highly probable that a designer wants to design a karbandi on a rectangular base with non-integer dimensions. Besides its limited range of function, it is not mathematically clear how much accurate its answers are. Pirnia admits that this formula was not aimed to be quite accurate and most of the times the designers had to modify the original dimensions of the base in order to find an acceptable one. The less accurate the segmentation of the base rectangle, the more deviated will be the shamseh piece of the karbandi from a true circle towards an ellipse.

Therefore, in the absence of a precise mathematical solution for this problem, it was probable that most of the times the designers had to content themselves with proximate solutions out of trial and error process or had to alter the original dimensions of the base in order to be able to build up a karbandi on it.

In this paper this problem is formulated as a mathematical question and is solved. Then a program in Maple language is written to do the iterative calculations and print the relevant answers. Designers can easily run the program to find possible karbandis for any desired base. When the program

* pourahmadi@guilan.ac.ir ** m.sohrabi1193@gmail.com

is executed in Maple application, it prompts the user to determine whether a one-footed karbandi is required or a two-footed one. Then the length and width of the base rectangle and finally, the acceptable tolerance are asked. The acceptable tolerance is defined based on the ratio of the length to width of the rectangle. After entering these variants, the calculations are done and the answers which are within the domain of acceptable tolerance are printed orderly from the most exact answers to the least.
In other words, the first answer belongs to the rectangle which is most similar to the original base. The output of the program includes the method for the segmentation of the base, the radius of the cutting circle, the proportion of the sides of the suggested rectangle, and the relevant tolerance for every printed answer. The advantages of this program include the high level of accuracy and the possibility to check an infinite number of options in a very short time (in the current version of the program the variants are set in order that the program checks 1000 options to produce its outputs but this number can be adjusted by the user). After introducing the mathematical solution to the problem and writing the relevant program to do the calculations, the paper continues to include one example of its application to design one-footed and two-footed karbandis on a given base to show its capability and convenience.
After that, the program is used to test the credibility of the empirical formula mentioned by master Pirnia. Nine different bases that are mentioned by Pirnia to show the application of the formula are used to compare the results. Surprisingly, it is observed that the Pirnia›s simple empirical formula in five cases out of nine cases produces the most exact answers produced by the program. Regarding cases in which the answer by the formula is not the most exact answer according to the program, it can be said that this difference reflects practical, structural, or aesthetical concerns of traditional architects. Therefore, the test shows that the formula used by Persian architects, though limited in its scope, was really a working formula that could be used as a useful basic guidance for designers of karbandis. This finding might be related to the historical fact that there were expert mathematicians who were interested in solving practical problems of professions like architecture and who devised simple mathematical solutions to be used by ordinary practitioners.

Keywords: Persian Architecture, Karbandi, Master Pirnia, Master Sha’rbaf, Master Lorzadeh.