



نشریه علمی پژوهشی

علوم و فناوری کامپوزیت

http://jstc.iust.ac.ir



تحلیل پارامتری ضربه بر روی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه FML و هسته مدرج تابعی با استفاده از یک تئوری پوسته جدید

علی داور^{1*}، محسن حیدری بنی²، رضا آذرافزا¹، جعفر اسکندری جم³

1- دانشیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران.

2- دانشجوی دکتری، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران.

3- استاد، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری‌های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران.

* تهران، صندوق پستی 15875-1774، a_davar@mut.ac.ir

چکیده

در مقاله حاضر به تحلیل پارامتری ضربه بر روی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه FML و هسته مدرج تابعی با استفاده از یک تئوری پوسته جدید پرداخته شده است. در این پژوهش دو مدل جدید، ساده و مهندسی برای پیش‌گویی تاریخچه نیروی تماس ناشی از برخورد عرضی شبه استاتیکی توسط ضربه‌زننده الاستیک و ایزوتروپیک به شکل کره، با سرعت پایین به پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی ارائه شده است. این دو مدل عبارت‌اند از مدل نیم سینوسی (یا H-S) و مدل جرم و فنر بهبود یافته با دو درجه آزادی (یا IS-M). در مدل H-S حداکثر نیروی تماس و مدت زمان تماس به روش تحلیلی استخراج شده‌اند. در مدل IS-M، ابتدا جرم و سفتی مؤثر پوسته در محل تماس به روش تحلیلی محاسبه شده، سپس با استفاده از روش تکرار و رسیدن به همگرایی، سفتی تماس اصلاح شده به دست آمده است. اعتبارسنجی نتایج پژوهش حاضر با مقایسه با نتایج تئوری و تجربی سایر محققین و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس صورت پذیرفته و تطابق خوبی حاصل شده است. نتایج نشان می‌دهند که هر چه اثر عبارت‌های $(1 + z/R)$ دقیق‌تر محاسبه شوند، دقت محاسبه پاسخ ضربه افزایش می‌یابد. همچنین، نتایج عددی نشان می‌دهند که برخی پارامترها از جمله ساختار، جنس و زاویه لایه‌ها و کسر حجمی فلز (MVF) و نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پوسته در پوسته‌های ساندویچی FML/هسته/FML با هسته FGM، اثر قابل ملاحظه‌ای بر روی پاسخ ضربه این پوسته‌ها می‌گذارند.

اطلاعات مقاله:

دریافت: 1401/11/26

پذیرش: 1402/01/15

کلیدواژگان

پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی، ضربه عرضی سرعت پایین، تئوری مرتبه بالای تصحیح شده، مدل ضربه

Parametric analysis of impact on sandwich cylindrical shells with FML face and functionally graded core using a new shell theory

Ali Davar^{1*}, Mohsen Heydari Beni¹, Reza Azarafza¹, Jafar Eskandari Jam¹

1- Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

* P.O.B. 1774-15875, Tehran, Iran, a_davar@mut.ac.ir.

Keywords

Composite cylindrical shells,
Low-velocity transverse impact,
Modified Higher-order theory,
Impact model.

Abstract

In this paper, the parametric analysis of the impact on cylindrical sandwich shells with the FML face sheet and functionally graded core using a new shell theory is discussed. In this research, two new, simple and engineering models have been presented to predict the history of the contact force caused by a quasi-static transverse impact by an elastic and isotropic impactor in the shape of a sphere, with a low speed, to a composite cylindrical shell. These two models are the half-sine model (or H-S) and the improved mass and spring model with two degrees of freedom (or IS-M). In the H-S model, the maximum contact force and contact duration have been extracted analytically. In the IS-M model, first the mass and the effective stiffness of the shell at the contact point are calculated analytically, then using the successive method and reaching convergence, the modified contact stiffness is obtained. Validation of the present research results was done by comparing the theoretical and experimental results of other researchers and the results of the ABAQUS software, and a good match has been achieved. The results show that the more accurately the effect of $(1+z/R)$ terms are calculated, the higher the accuracy of estimating the impact response. Also, the numerical results show that some parameters such as the structure, material and angle of the layers and the metal volume fraction (MVF) and the ratio of the core thickness to the total thickness of the shell in FML/Core/FML sandwich shells with FGM core have a significant effect on the impact response.

Please cite this article using:

برای ارجاع به مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Davar, A., Heydari Beni, M., Azarafza, R., Eskandari Jam, J., "Parametric analysis of impact on sandwich cylindrical shells with FML face and functionally graded core using a new shell theory," In Persian, Journal of Science and Technology of Composites, Vol. 9, No. 4, pp. 2099-2115, 2023.

https://doi.org/10.22068/JSTC.2023.1989398.1825

1- مقدمه

ساختارهای ساندویچی کامپوزیتی FML/هسته/FML در سازه سیستم‌های هوافضایی، از جمله در فیرینگ² (سطوح آیرودینامیکی محافظ) بار محموله مویشک‌های ماهواره بر کاربرد دارند. ساختارهای مورد استفاده در فیرینگ‌های سیستم‌های حامل بار محموله به فضا، از بار محموله در برابر بارهای حرارتی، آکوستیکی، تداخل امواج الکترومغناطیسی، فروریزش ناگهانی ناشی از فشار آیرودینامیکی خارجی و همچنین برخورد اجرام ریز موجود در اتمسفر، محافظت می‌کنند. با توجه به مقاومت فلز تیتانیوم در دماهای بالا، از قابلیت استفاده در FML برای افزایش مقاومت حرارتی برخوردار است. تاکنون تحقیقات فراوان در حوزه ضربه بر روی ورق‌های کامپوزیتی انجام شده است. لیکن تعداد تحقیقات انجام شده تاکنون راجع به ضربه روی پوسته‌های استوانه-ای کامپوزیتی بسیار کم بوده است. در ادامه، به آن دسته از تحقیقات انجام شده راجع به ضربه روی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی که از منظر موضوعی به پژوهش حاضر نزدیک‌تر هستند، اشاره شده است.

کریشنامورثی³ و همکاران [1] پاسخ ضربه و آسیب ناشی از آن برای پوسته کامپوزیتی چندلایه توسط یک ضربه زننده فلزی را با روش المان محدود مطالعه کردند. از قانون تماس هرگز برای محاسبه نیروی تماس بین جرم ضربه زننده و پوسته استفاده شده است. اثر پارامترهای مهم مسئله، مانند جرم و سرعت ضربه زننده، انحنای پوسته و ترتیب چیدمان لایه‌ها بررسی شده است. نیروی تماس و پاسخ سازه‌ای برای تغییر شکل‌های زیاد در مورد پانل‌های انحنادار استوانه‌ای محاسبه شده است.

گانگ و لام⁴ [2] پدیده ضربه را روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در حال چرخش تحلیل کردند. از تئوری کلاسیک پوسته‌ها و تقریب اول لاو با در نظر گرفتن اثر شتاب کوریولیس استفاده کردند. بار ضربه‌ای را به صورت یک پالس نیم سینوسی با نیروی قله، با مقدار عددی از قبل تعریف شده، در نظر گرفتند. نتایج آن‌ها نشان داد که با افزایش نسبت پارامتر بار ضربه‌ای به سرعت چرخش استوانه، ماکزیمم تغییر شکل تا حد زیادی کاهش می‌یابد.

کریشنامورثی و همکاران [3] پاسخ ضربه پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه را با دو روش کلاسیک سری فوری و المان‌های محدود تعیین کردند. پاسخ ضربه‌ای که توسط روش المان محدود به دست آمده، شامل پیشگویی آسیب ناشی از ضربه بر پایه مدل پیشگویی آسیب نیمه تجربی چوی-چانگ می‌باشد. در روش تحلیلی، حل با استفاده از روش عددی جایگزین، در ارتباط با قانون تماس غیرخطی هرگز، انجام شده که قابلیت فرورفتگی موضعی ناشی از جسم فرورونده⁵ روی سطح ضربه را فراهم می‌کند. دابینین و بانیکف⁶ [4] حل مسئله معکوس⁷ را به منظور آشکارسازی محل ضربه روی پوسته و جرم و سرعت ضربه زننده انجام دادند. آن‌ها اثر برخورد قطعات لق شده یا جدا شده را بر روی سازه اصلی نیروگاه هسته‌ای یا خطوط لوله، بررسی کردند. مدل کاری آن‌ها، برخورد یک جرم صلب به پوسته استوانه‌ای بود. وابستگی نیروی ضربه و شتاب یک نقطه از پوسته بر حسب زمان را از آزمون تجربی به‌عنوان ورودی تحلیل دریافت کرده، محاسبات تئوری را با نتایج تجربی تأیید کردند.

سونوکاک⁸ و همکاران [5] آنالیز پاسخ ضربه برای یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک را با استفاده از بسط توابع ویژه و تئوری الاستودینامیک سه‌بعدی انجام دادند. شرایط مرزی دو انتهای پوسته را مفصلی در نظر گرفتند. بار ضربه‌ای را به صورت یک بار یکنواخت توزیع شده که به صورت ناگهانی روی یک بخش از سطح خارجی وارد می‌شود، اعمال کردند. نتایج عددی برای پاسخ تنش و تغییر مکان نقاط مختلف دلخواه را به دست آوردند. آن‌ها اثر ناهمسانگردی را روی پاسخ ضربه بررسی کردند. همچنین به این نتیجه دست یافتند که پاسخ تنش بزرگ‌تر، در جهتی رخ می‌دهد که مدول الاستیک طولی بالاتری دارد.

گنینگ⁹ و همکاران [6] ضربه روی پوسته‌های کامپوزیتی را در دو بخش بررسی کردند. بخش اول شامل تعیین و مدل‌سازی آسیب و توسعه آن در پوسته‌های استوانه‌ای تحت ضربه وزنه‌ای افتان است. بخش دوم شامل ارزیابی اثر این آسیب روی تنش پس‌ماند و فشار هیدرواستاتیکی است. آن‌ها برای مدل‌سازی و تعیین پاسخ ضربه و آسیب، از روش المان محدود و از نرم‌افزار آباکوس¹⁰ استفاده نمودند. نتایج آزمون تجربی با نتایج نرم‌افزار تطابق بسیار خوبی داشته است.

جعفری و همکاران [7] پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت تنش‌های اولیه و ایمپالس جانبی را مطالعه کردند. ایشان ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با شرایط مرزی مختلف را تحت بار ایمپالس جانبی وارد بر روی یک سطح مستطیلی و با در نظر گرفتن اثرات پیش‌تنیدگی (مانند نیروی محوری و فشار داخلی) بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تقریب اول لاو مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها حل معادلات ارتعاشات آزاد را با استفاده از روش گالرکین انجام دادند. با استفاده از نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد و با استفاده از انتگرال کانولوشن، پاسخ زمانی مؤلفه‌های جابجایی را بر اساس روش جمع مودها رسم کردند.

کومار¹¹ و همکاران [8] پاسخ ضربه و آسیب ناشی از ضربه را در کامپوزیت‌های چندلایه انحنادار تحت ضربه عرضی توسط ضربه زننده فلزی را با روش المان محدود سه‌بعدی مطالعه کردند. چندین مثال از پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی گرافیت/اپوکسی را حل کرده و اثر پارامترهای ضربه‌زننده (جرم و سرعت) و مشخصات چندلایه (انحنای پوسته و زاویه الیاف) را در این مثال‌ها بررسی کردند. آن‌ها آسیب ناشی از ضربه (شامل تورق و ترک در ماتریس) را با استفاده از معیار واماندگی بر پایه تنش سه‌بعدی مناسب پیش‌گویی کردند. ایشان به منظور در نظر گرفتن کاهش خواص مکانیکی منطقه آسیب دیده ناشی از ضربه، ماتریس سفتی المان‌های واقع در ناحیه وامانده را، در حین حل کاهش دادند.

خلیلی و همکاران [9] پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت تنش‌های اولیه و ایمپالس جانبی را مطالعه کردند. ایشان ارتعاشات آزاد و پاسخ دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با شرایط مرزی ساده را با در نظر گرفتن اثر نیروی محوری توأم با فشار داخلی، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تقریب اول لاو مورد بررسی قرار دادند. ایشان پس از مطالعه اثر نیروی محوری توأم با فشار داخلی روی پاسخ زمانی پوسته، به این نتیجه دست یافتند که فرکانس طبیعی و پاسخ دینامیکی

7 Inverse problem

8 Tsunokake

9 Gning

10 ABAQUS

11 Kumar

1 Fibre-metal laminates

2 Fairing

3 Krishnamurthy

4 Gong and Lam

5 Indenter

6 Dubinin and Bannikov

روش تحلیلی از مدل ارائه شده توسط شیواکمار بهره گرفته شده است. استفاده از روش گالرکین معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر ارتعاشات پوسته حل شده‌اند. سپس، پاسخ دینامیکی و تنش پوسته تحت ضربه با سرعت پایین به کمک روش اجزای محدود با استفاده از نرم‌افزار آباکوس و برنامه توسعه داده شده در محیط نرم‌افزار ریاضی متمتیکا⁴ تحلیل شده است. ژائو⁵ و همکاران [15] در پژوهشی، دنباله‌ای از تجمع بر روی ارتعاش پوسته استوانه‌ای ورقه‌ای فلزی الیافی (FML) در فاز میکرو با استفاده از نظریه تنش کوپل توسعه داده‌اند. اصل همپلتون برای استخراج معادلات غیر کلاسیک حرکت پوسته ریز استوانه‌ای نازک وابسته به اندازه بر اساس اولین نظریه تقریب لاو انجام شده است. از موری تاکانا و قانون توسعه یافته مخلوط به ترتیب برای تخمین ویژگی‌های مکانیکی نانولوله‌های کربنی و فیبر معادل آن استفاده شده است.

بر اساس جستجوی انجام شده توسط نگارنده، تاکنون به بحث ضربه روی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی FML/هسته/FML با هسته FGM پرداخته نشده است. لذا در پژوهش حاضر، تحلیل ضربه روی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی FML/هسته/FML با هسته FGM انجام پذیرفته است. در این پژوهش، با ارتقای دقت تئوری‌های مرتبه بالای موجود، تئوری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی مرتبه بالای تصحیح شده جدید با دوازده مؤلفه جابجایی توسعه داده شده است. در این تئوری، اثر عبارات‌های مربوط به شکل دوزنقه‌ای مقطع پوسته $(I+z/R)$ در نتیجه‌های تنش پوسته به‌طور دقیق محاسبه شده است. پس از افزودن انرژی کرنشی نظیر جلوگیری از چرخش جسم صلب به تابعی (فانکشنال) انرژی پوسته، بر اساس اصل هامپلتون، معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای دو سر ساده استخراج شده‌اند. با استفاده از این معادلات، تحلیل پوسته تحت بارگذاری عرضی دینامیکی (با توزیع یکنواخت بر روی یک سطح مربعی کوچک) انجام شده‌اند. همچنین دو مدل ضربه جدید تحت عنوان نیم‌سینوسی یا "H-S" و مدل جرم و فنر بهبود یافته دو درجه آزادی "IS-M" برای تحلیل ضربه شبه استاتیکی ارائه شده است.

2- معادلات حاکم

با محاسبه عبارات‌های مربوط به کار و انرژی در تابعی اصل همپلتون [16]، امکان استخراج معادلات تعادل پوسته فراهم می‌آید. بدین نحو که بر مبنای قضیه اساسی حساب تغییرات⁵، مجموع کل ضرایب عبارات‌های $\delta u_0, \delta u_1, \delta u_2, \delta v_0, \delta v_1, \delta v_2, \delta w_0, \delta w_1, \delta w_2, \delta \theta_x, \delta \theta_y, \delta \theta_z, \delta \theta_\phi, \delta \theta_\psi, \delta \theta_\chi, \delta \theta_\xi, \delta \theta_\zeta, \delta \theta_\eta, \delta \theta_\theta, \delta \theta_\iota, \delta \theta_\upsilon, \delta \theta_\omega, \delta \theta_\nu, \delta \theta_\xi, \delta \theta_\zeta, \delta \theta_\eta, \delta \theta_\theta, \delta \theta_\iota, \delta \theta_\upsilon, \delta \theta_\omega, \delta \theta_\nu$ در عبارات زیر انتگرال‌های دوگانه بایستی برابر صفر قرار داده شوند. با انجام این کار، پس از مرتب‌سازی، معادلات تعادل به صورت زیر به دست آمده‌اند:

معادله اول، ضرایب δu_0 :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} + (1-\gamma_0) \left(-\frac{1}{2R^2} \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} - \frac{1}{2R} \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} + \frac{1}{2R} \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \bar{I}_0 + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \bar{I}_1 + C_3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \bar{I}_2 + C_4 \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \bar{I}_3 \quad (1)$$

معادله دوم، ضرایب δv_0 :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial N_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} Q_\phi + \gamma_0 \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R^2} S_\phi - \frac{1}{R} R_\phi \right) + (1-\gamma_0) \left(\frac{1}{2R} \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} (\bar{I}_0 + \frac{2\gamma_0}{R} \bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R^2} \bar{I}_2) + \frac{\partial^2 \theta_\phi}{\partial t^2} (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2) + C_3 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} (\bar{I}_2 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_3) + C_4 \frac{\partial^2 \theta_\phi}{\partial t^2} (\bar{I}_3 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_4) \quad (2)$$

پوسته کامپوزیتی جدار نازک، نسبت به فشار داخلی حساسیت بیشتری در مقایسه با نیروی محوری دارد.

احمدی و صدیقی [10] مسئله ضربه سرعت پایین توسط یک ضربه زنده صلب نیم کروی بر روی یک پوسته استوانه‌ای¹ FGM را انجام دادند. آن‌ها با استفاده از یک مدل المان محدود، ماتریس جرم، سفتی و میرایی سازه را استخراج کردند. با استفاده از روش نیومارک معادلات حاکم را حل کردند. آن‌ها از قانون تماس هر تاز اصلاح یافته برای مدل‌سازی تماس بین پوسته و ضربه زنده استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش سرعت، نوسانات در پاسخ پوسته استوانه‌ای افزایش می‌یابد و ضربه‌های دوم و سوم به وقوع می‌پیوندند. همچنین نشان دادند که برای پوسته‌های استوانه‌ای FGM با افزایش ضخامت، مدت زمان تماس کاهش و حداکثر نیروی تماس افزایش می‌یابد.

ستوده و انفرادی [11] ضربه سرعت پایین روی پوسته‌های کامپوزیتی رشته‌پیچی را به روش عددی با استفاده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس بررسی کردند. آنالیز ارتعاشات آزاد و آنالیز دینامیکی به روش ضمنی² را برای مطالعه اثر میرایی روی پاسخ پوسته کامپوزیتی چندلایه در معرض بارگذاری ضربه با سرعت پایین انجام دادند. آن‌ها اثر میرایی سازه‌ای را بر روی نیروی تماس، خیز نقطه محل تماس و سرعت و انرژی جسم ضربه زنده مطالعه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که میرایی سازه‌ای سبب افزایش نیروی تماس و کاهش خیز نقطه محل تماس می‌شود. همچنین انرژی تلف شده ناشی از میرایی سازه‌ای، در مقابل انرژی سیستم بدون میرایی قابل صرف‌نظر است.

رحمانی و همکاران [12] رفتار پوسته ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر را با استفاده از اصل هامپلتون مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها تئوری مرتبه بالای جدید برای تحلیل رفتار دینامیکی پوسته‌های ساندویچی ضخیم ارائه دادند. برای مدل‌سازی اثر رویه‌ها از تئوری کلاسیک پوسته و برای مدل‌سازی هسته از تئوری الاستیسیته بهره بردند. اثرات غیرخطی صفحه‌ای و جابجایی‌های قائم هسته را در تئوری مرتبه بالا لحاظ کردند. آن‌ها نتیجه‌های تنش و جابجایی‌ها در رویه‌ها و هسته و تنش‌های برشی و نرمال متقابل بین هسته و رویه‌ها را در معادلات وارد کردند. آن‌ها به این نتیجه دست یافتند که الگوهای ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی پیچیده‌تر از پوسته‌های استوانه‌ای همگن است.

بیات و همکاران [13] در مطالعه‌ای، رفتار غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌ی کربنی در برابر ضربه‌ی سرعت پایین در دماهای مختلف را مورد بررسی قرار دادند. توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت به صورت مدرج تابعی در نظر گرفتند. برای محاسبه‌ی خواص مکانیکی مؤثر، از مدل‌های میکرومکانیکی استفاده شد. معادلات حرکت بر پایه‌ی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا با ترم غیرخطی هندسی از نوع ونکارمن، بوده است.

مامندی و سلیمان‌زاده [14] تحلیل ارتعاشات گذرای غیرخطی ضربه با سرعت پایین بر روی پوسته استوانه‌ای مرکب تحت فشار داخلی با استفاده از روش‌های تحلیلی و اجزای محدود مورد بررسی قرار دادند. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر حرکت پوسته با استفاده از نظریه غیرخطی پوسته دائل استخراج شده است. نیروی برخورد ناشی از ضربه زنده با قانون تماس اصلاح شده هر تاز مدل شده است. برای مدل‌سازی ضربه با سرعت پایین در

¹ Functionally graded materials

² implicit

³ Mathematica

⁴ zhaoh

⁵ Fundamental lemma of the calculus of variations

معادله دوازدهم، ضرایب $\delta\theta_z^*$ در حالت $C_2 = 1$:

$$-\frac{1}{R}M_\phi^* - 3N_z^* + \frac{\partial S_x^*}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial S_\phi^*}{\partial \phi} - \frac{h^3}{8}(q_t - q_b) =$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \bar{I}_3 + C_1 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 + \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_6 \quad (12)$$

که در روابط (1) تا (12)، اینرسی‌های جرمی به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$(\bar{I}_0, \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3, \bar{I}_4, \bar{I}_5, \bar{I}_6)$$

$$= \sum_{i=1}^{NL} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho_k (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) (1 + \gamma_0 z/R) dz \quad (13)$$

که در رابطه (13)، ρ_k عبارت است از چگالی لایه k -ام. همچنین با استفاده از اصل هامیلتون، امکان استخراج معادلات شرایط مرزی پوسته نیز فراهم می‌آید. بار دیگر بر مبنای قضیه اساسی حساب تغییرات، مجموع کل ضرایب عبارت‌های $\delta\theta_x^*$ ، δw_0^* ، δv_0^* ، δu_0^* ، $\delta\theta_z$ ، $\delta\theta_\phi$ ، $\delta\theta_x$ ، δw_0 ، δv_0 ، δu_0 ، δu_0^* و $\delta\theta_z^*$ در عبارات زیر انتگرال‌های یکنانه در روابط، بایستی برابر صفر قرار داده شوند. با انجام این کار، پس از مرتب‌سازی، معادلات شرایط مرزی در $x = L$ و $x = 0$ به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\delta u_0 = 0 \rightarrow N_x - \hat{N}_x = 0$$

$$\delta v_0 = 0 \rightarrow (N_{x\phi} + \gamma_0/R M_{x\phi}) - (\hat{N}_{x\phi} + \gamma_0/R \hat{M}_{x\phi}) = 0$$

$$\delta w_0 = 0 \rightarrow Q_x - \hat{Q}_x = 0$$

$$\delta\theta_x = 0 \rightarrow M_x - \hat{M}_x = 0$$

$$\delta\theta_\phi = 0 \rightarrow M_{x\phi} - \hat{M}_{x\phi} = 0$$

$$C_1 \delta\theta_z = 0 \rightarrow C_1 (S_x - \hat{S}_x) = 0$$

$$C_3 \delta u_0^* = 0 \rightarrow C_3 (N_x^* - \hat{N}_x^*) = 0$$

$$C_3 \delta v_0^* = 0 \rightarrow C_3 (N_{x\phi}^* - \hat{N}_{x\phi}^*) = 0$$

$$C_1 \delta w_0^* = 0 \rightarrow C_1 (Q_x^* - \hat{Q}_x^*) = 0$$

$$C_4 \delta\theta_x^* = 0 \rightarrow C_4 (M_x^* - \hat{M}_x^*) = 0$$

$$C_4 \delta\theta_\phi^* = 0 \rightarrow C_4 (M_{x\phi}^* - \hat{M}_{x\phi}^*) = 0$$

$$C_2 \delta\theta_z^* = 0 \rightarrow C_2 (S_x^* - \hat{S}_x^*) = 0 \quad (14)$$

3- تحلیل بارگذاری ضربه

در این بخش، به منظور محاسبه تغییر شکل‌های پوسته استوانه‌ای در معرض بارگذاری عرضی¹، به حل معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای، پرداخته شده است. تنش‌ها و کرنش‌های ایجاد شده در پوسته‌های استوانه‌ای تحت تأثیر بارهای دینامیکی، از عوامل تعیین‌کننده در طراحی این سازه‌ها می‌باشد. در کاربردهای عملی، این بارهای دینامیکی ممکن است به صورت ضربه (برخورد جسم خارجی) بر پوسته وارد شوند. بنابراین در این پژوهش، بار دینامیکی به

معادله سوم، ضرایب δw_0 :

$$-\frac{1}{R}N_\phi + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} - q_t - q_b =$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \bar{I}_0 + C_1 \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \bar{I}_1 + C_1 \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_2 + C_2 \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 \quad (3)$$

معادله چهارم، ضرایب $\delta\theta_x$:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\phi}}{\partial \phi} - Q_x = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \bar{I}_1 + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \bar{I}_2 + C_3 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + C_4 \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 \quad (4)$$

معادله پنجم، ضرایب $\delta\theta_\phi$:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} + \frac{1}{R}S_\phi - R_\phi =$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2) + \frac{\partial^2 \theta_\phi}{\partial t^2} \bar{I}_2 + C_3 \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + C_4 \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 \quad (5)$$

معادله ششم، ضرایب $\delta\theta_z$ در حالت $C_1 = 1$:

$$-\frac{1}{R}M_\phi - N_z + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial S_\phi}{\partial \phi} - \frac{h}{2}(q_t - q_b) =$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \bar{I}_1 + \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \bar{I}_2 + \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + C_2 \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 \quad (6)$$

معادله هفتم، ضرایب δu_0^* در حالت $C_3 = 1$:

$$\frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\phi}^*}{\partial \phi} - 2S_x + (1 - \gamma_0) \left(-\frac{1}{2R^2} \frac{\partial M_{x\phi}^*}{\partial \phi} - \frac{1}{2R} \frac{\partial N_{x\phi}^*}{\partial \phi} + \frac{1}{2R} \frac{\partial N_{x\phi}^*}{\partial \phi} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_2 + \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_4 \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 \quad (7)$$

معادله هشتم، ضرایب δv_0^* در حالت $C_3 = 1$:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial N_\phi^*}{\partial \phi} + \frac{\partial N_{x\phi}^*}{\partial x} + \frac{1}{R}Q_\phi^* - 2T_\phi + (1 - \gamma_0) \left(\frac{1}{2R} \frac{\partial M_{x\phi}^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_{x\phi}^*}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial N_{x\phi}^*}{\partial x} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial t^2} (\bar{I}_2 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_3) + \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_4 \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 \quad (8)$$

معادله نهم، ضرایب δw_0^* در حالت $C_1 = 1$:

$$-\frac{1}{R}N_\phi^* - 2M_z + \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial Q_\phi^*}{\partial \phi} - \frac{h^2}{4}(q_t + q_b) =$$

$$\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_2 + \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + \frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_2 \frac{\partial^2 \theta_z^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 \quad (9)$$

معادله دهم، ضرایب $\delta\theta_x^*$ در حالت $C_4 = 1$:

$$\frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\phi}^*}{\partial \phi} - 3Q_x^* = \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_3 + \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_3 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 + \frac{\partial^2 \theta_x^*}{\partial t^2} \bar{I}_6 \quad (10)$$

معادله یازدهم، ضرایب $\delta\theta_\phi^*$ در حالت $C_4 = 1$:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial M_\phi^*}{\partial \phi} + \frac{\partial M_{x\phi}^*}{\partial x} + \frac{1}{R}S_\phi^* - 3R_\phi^* =$$

$$\frac{\partial^2 v_0^*}{\partial t^2} (\bar{I}_3 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_4) + \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_4 + C_3 \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial t^2} \bar{I}_5 + \frac{\partial^2 \theta_\phi^*}{\partial t^2} \bar{I}_6 \quad (11)$$

¹ -Transverse loading

طرفین رابطه (17) و انتگرال گیری روی سطح پوسته، روابط زیر برای P به دست آمده‌اند:

$$n = 0, P_{m0} = \frac{1}{\pi L} \int_0^L q_t(x, \varphi) \sin \lambda x dx \quad (19)$$

$$n > 0, P_{mn} = \frac{2}{\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} q_t(x, \varphi) \sin \lambda x \cos n\varphi dx d\varphi \quad (20)$$

با توجه به کوچک بودن سطح اعمال بار، فرض شده است توزیع فشار بر روی سطح مستطیلی یکنواخت و برابر q_0 باشد، یعنی $q_t(x, \varphi) = q_0$ ، آنگاه روابط (19) و (20) پس از انتگرال گیری به صورت زیر در آمده‌اند:

$$n = 0, P_{m0} = \frac{q_0}{m\pi^2} (\cos \lambda x_1 - \cos \lambda x_2) \quad (21)$$

$$n > 0, P_{mn} = \frac{2q_0}{m\pi^2} (\sin n\psi_2 - \sin n\psi_1) (\cos \lambda x_1 - \cos \lambda x_2) \quad (22)$$

با جایگذاری روابط (21) و (22) در معادلات تعادل (1) تا (12) و صرف نظر از عبارتهای متغیر با زمان، معادله زیر حاصل شده است:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \left([L'_{ij}] \{ \Delta \} - \{ Q_s \} \right) \{ \Psi \} dx d\varphi = 0 \quad (23)$$

که در رابطه (23)، $\{ \Delta \}$ بردار شکل مودهای طبیعی و $\{ \Psi \}$ بردار توابع وزنی¹ هستند و به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\{ \Delta \} = \begin{Bmatrix} u_{0mn} \cos \lambda x \cos n\varphi \\ v_{0mn} \sin \lambda x \sin n\varphi \\ w_{0mn} \sin \lambda x \cos n\varphi \\ \theta_{xmn} \cos \lambda x \cos n\varphi \\ \theta_{\varphi mn} \sin \lambda x \sin n\varphi \\ \theta_{zmn} \sin \lambda x \cos n\varphi \\ u_{0mn}^* \cos \lambda x \cos n\varphi \\ v_{0mn}^* \sin \lambda x \sin n\varphi \\ w_{0mn}^* \sin \lambda x \cos n\varphi \\ \theta_{xmn}^* \cos \lambda x \cos n\varphi \\ \theta_{\varphi mn}^* \sin \lambda x \sin n\varphi \\ \theta_{zmn}^* \sin \lambda x \cos n\varphi \end{Bmatrix}, \{ \Psi \} = \begin{Bmatrix} \cos \lambda x \cos n\varphi \\ \sin \lambda x \sin n\varphi \\ \sin \lambda x \cos n\varphi \\ \cos \lambda x \cos n\varphi \\ \sin \lambda x \sin n\varphi \\ \sin \lambda x \cos n\varphi \\ \cos \lambda x \cos n\varphi \\ \sin \lambda x \sin n\varphi \\ \sin \lambda x \cos n\varphi \\ \cos \lambda x \cos n\varphi \\ \sin \lambda x \sin n\varphi \\ \sin \lambda x \cos n\varphi \end{Bmatrix} \quad (24)$$

در رابطه (23)، L'_{ij} عبارت‌اند از همان عملگرهای دیفرانسیلی L_{ij} ولی بدون در نظر گرفتن اینرسی‌های جرمی (\bar{I}_I) و به عبارت دیگر با حذف عبارت‌های شامل مشتقات زمانی $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ و همچنین Q_s بردار نیروهای عرضی استاتیکی است و به صورت زیر تعریف شده است:

$$\{ Q_s \} = \{ Q \} = \left\{ 0 \ 0 \ q_t \ 0 \ 0 \ q_t \ \frac{h}{2} \ 0 \ 0 \ q_t \ \frac{h^2}{4} \ 0 \ 0 \ q_t \ \frac{h^3}{8} \right\}^T \quad (25)$$

صورت بار ضربه عرضی ناشی از برخورد جسم کروی الاستیک و با سرعت پایین بر پوسته استوانه‌ای اعمال شده است.

در گزارش حاضر، به منظور حصول اطمینان از صحت پاسخ‌های حاصل از تئوری پیشنهادی برای تغییر شکل و کرنش پوسته، ابتدا بارگذاری استاتیکی عرضی پوسته استوانه‌ای به صورت فشار یکنواخت بر روی یک سطح مستطیلی کوچک واقع بر سطح خارجی پوسته در نظر گرفته شده است. سپس بارگذاری ضربه عرضی به صورت فشار یکنواخت ولی متغیر با زمان (مانند فشار حاصل از بارگذاری ضربه‌ای) بر روی سطح مستطیلی مذکور اعمال شده، تحلیل دینامیکی گذرا تحت بارگذاری ضربه عرضی انجام پذیرفته است.

1-3- تحلیل بارگذاری استاتیکی عرضی

فرض شده است بار استاتیکی عرضی مطابق شکل 1 به صورت فشار یکنواخت بر روی سطح مستطیلی واقع بر سطح خارجی پوسته اعمال شده باشد.

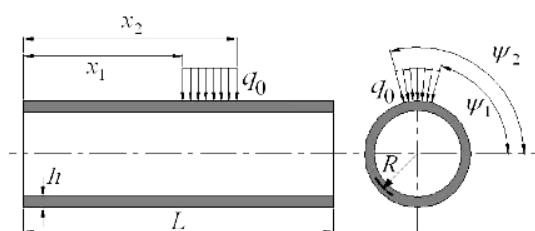


Fig. 1 Static loading applied on a small rectangular surface.

شکل 1 بارگذاری عرضی استاتیکی اعمال شده بر یک سطح مستطیلی کوچک.

با توجه به شکل 1، مختصات نقطه مرکز این سطح به صورت زیر تعریف شده است:

$$(x_L, \varphi_L, z_L) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}, \frac{h}{2} \right) \quad (15)$$

بعد سطح اعمال بار به صورت $2l_2 \times Al = 2l_1$ تعریف شده که l_1 و l_2 عبارت‌اند از:

$$l_1 = \frac{R(\psi_2 - \psi_1)}{2}, \quad l_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad (16)$$

با توجه به تعریف شرایط مرزی دو سر ساده برای پوسته، بارگذاری عرضی q_b و q_t باید با استفاده از سری فوریه دوگانه، طوری تعریف شوند که شرایط مرزی پارامترهای جابجایی مؤلفه جابجایی عرضی (w) را ارضاء کنند. چون فرض شده است بارگذاری عرضی بر سطح خارجی پوسته اعمال می‌شود، در معادلات تعادل، مقادیر q_b و q_t به صورت زیر جایگذاری شده‌اند:

$$q_t(x, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn} \sin \lambda x \cos n\varphi \quad (17)$$

$$q_b(x, \varphi) = 0 \quad (18)$$

که در رابطه (17) P_{mn} ضرایب ثابت فوریه هستند که به مشخصات سطح اعمال بار (ابعاد، محل و پروفیل توزیع بار) دارند. با ضرب $\sin \lambda x \cos n\varphi$

¹ Weighting functions

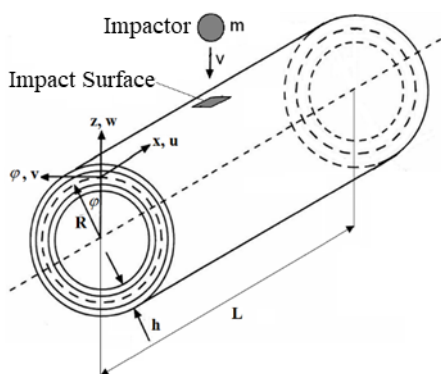


Fig. 2 Transverse shock loading applied to the outer surface of the shell.

شکل 2 بارگذاری ضربه عرضی اعمال شده بر سطح خارجی پوسته.

به منظور محاسبه پاسخ ضربه، تابع تحریک خارجی q_t ، به دو بخش مکانی و زمانی تقسیم شده است. بخش مکانی این تابع، با روابط (17) تا (23) تعریف شده در بخش استاتیکی محاسبه شده و بخش زمانی این تابع، به صورت $f(t)$ تعریف شده، در بخش مکانی ضرب شده است. تابع q_t در تحلیل ضربه عرضی به صورت زیر تعریف شده است:

$$q_t(x, \phi, t) = q_t(x, \phi) f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn} \sin \lambda x \cos n \phi f(t) \quad (29)$$

$$q_b(x, \phi, t) = 0 \quad (30)$$

با جایگذاری پارامترهای جابجایی و همچنین تحریک خارجی q_t در معادلات تعادل، با اعمال روش گالرکین، معادله زیر به دست آمده است:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} ([L_{ij}] \{\Delta\} T_{mn}(t) - \{Q_d\}) \{\Psi\} dx d\phi = 0 \quad (31)$$

که در رابطه (31)، $\{\Delta\}$ بردار شکل مودهای طبیعی و $\{\Psi\}$ بردار توابع وزنی³ هستند.

$T_{mn}(t)$ تابع زمانی مجهول است که باید محاسبه شود. $\{Q_d\}$ بردار توابع تحریک عرضی دینامیکی است و به صورت زیر تعریف شده است:

$$\{Q_d\} = \{Q\} f(t) \quad (32)$$

به منظور حل دستگاه معادلات رابطه (32)، ابتدا این دستگاه معادلات به صورت زیر بازنویسی شده است:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} ([L'_{ij}] \{\Delta\} T_{mn}(t)) \{\Psi\} dx d\phi = \int_0^L \int_0^{2\pi} (\ddot{T}_{mn}(t) \{\Phi\} - \{Q_d\}) \{\Psi\} dx d\phi \quad (33)$$

با انجام انتگرال گیری ذکر شده در رابطه (23) و دسته بندی ضرایب، یک دستگاه دوازده معادله‌ای با دوازده مجهول به صورت زیر حاصل شده است:

$$[K] \{d\} = \{Q\} \quad (26)$$

که در رابطه (26)، $\{Q\}$ بردار نیروهای عرضی استاتیکی تعریف شده در رابطه (26)، $\{d\}$ بردار ثوابت فوریه (پارامترهای جابجایی)، مشابه با تعریف ارائه شده در رابطه (21) و K ماتریس سفتی است. برای به دست آوردن ثوابت فوریه، معادله (26) به ازای مقادیر مختلف m و n حل شده است. برای حل معادله (26) از نرم افزار متلب¹ استفاده شده است. برای محاسبه پاسخ جابجایی در هر نقطه (x, ϕ, z) از فضای پوسته در سه جهت (u, v, w) پارامترهای جابجایی با استفاده از روش جمع آثار مودها²، به صورت سری‌های فوریه دوگانه مثلثاتی زیر محاسبه شده‌اند [17]:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{0mn}^* \cos \lambda x \cos n \phi & u_0^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{0mn}^* \cos \lambda x \cos n \phi \\ v_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{0mn}^* \sin \lambda x \sin n \phi & v_0^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{0mn}^* \sin \lambda x \sin n \phi \\ w_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{0mn}^* \sin \lambda x \cos n \phi & w_0^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{0mn}^* \sin \lambda x \cos n \phi \\ \theta_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{xmn}^* \cos \lambda x \cos n \phi & \theta_x^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{xmn}^* \cos \lambda x \cos n \phi \\ \theta_\phi &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\phi mn}^* \sin \lambda x \sin n \phi & \theta_\phi^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\phi mn}^* \sin \lambda x \sin n \phi \\ \theta_z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{zmn}^* \sin \lambda x \cos n \phi & \theta_z^* &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{zmn}^* \sin \lambda x \cos n \phi \end{aligned} \quad (27)$$

با جایگذاری پارامترهای جابجایی از رابطه (27) در رابطه (28)، مؤلفه‌های جابجایی پوسته نیز در هر نقطه دلخواه (x, ϕ, z) قابل محاسبه هستند.

$$\begin{aligned} u(x, \phi, z, t) &= u_0(x, \phi, t) + z \theta_x(x, \phi, t) + z^2 u_0^*(x, \phi, t) + z^3 \theta_x^*(x, \phi, t) \\ v(x, \phi, z, t) &= (1 + z/R) v_0(x, \phi, t) + z \theta_\phi(x, \phi, t) + z^2 v_0^*(x, \phi, t) + z^3 \theta_\phi^*(x, \phi, t) \\ w(x, \phi, z, t) &= w_0(x, \phi, t) + z \theta_z(x, \phi, t) + z^2 w_0^*(x, \phi, t) + z^3 \theta_z^*(x, \phi, t) \end{aligned} \quad (28)$$

3-2- تحلیل بارگذاری ضربه عرضی

فرض شده است جسم ضربه زننده کروی با جرم m_i از جنس ماده همگن، ایزوتروپیک و الاستیک، با سرعت v_i به صورت عمود بر سطح خارجی پوسته استوانه‌ای مطابق شکل 2 برخورد کند.

³ Weighting functions

¹ MATLAB

² Modes superposition method

که در رابطه (33) بردار $\{\Phi\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$G_{mn}(t) = \frac{H_{mn}}{J_{mn}} f(t) \quad (39)$$

که در رابطه (39)، H_{mn} در صورت کسر، به صورت زیر تعریف شده است:

$$H_{mn} = P_{mn} (w_{0mn} + C_1 \frac{h}{2} \theta_{zmn} + C_1 \frac{h^2}{4} w_{0mn}^* + C_2 \frac{h^3}{8} \theta_{zmn}^*) \quad (40)$$

همچنین در رابطه (40)، J_{mn} در مخرج کسر، عبارت‌اند از جرم‌های نرمالیزه³ و به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$J_{mn} = A_{mn} \bar{I}_0 + B_{mn} \bar{I}_1 + C_{mn} \bar{I}_2 + D_{mn} \bar{I}_3 + E_{mn} \bar{I}_4 + F_{mn} \bar{I}_5 + Z_{mn} \bar{I}_6 \quad (41)$$

که در رابطه (41)، ضرایب A_{mn} تا Z_{mn} به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= (u_{0mn}^2 + v_{0mn}^2 + w_{0mn}^2) \\ B_{mn} &= 2 \left(\theta_{xmn} u_{0mn} + v_{0mn} \frac{\gamma_0}{R} + \theta_{\varphi mn} v_{0mn} + C_1 \theta_{zmn} w_{0mn} \right) \\ C_{mn} &= 2 \left(C_3 u_{0mn}^* u_{0mn} + \theta_{\varphi mn} v_{0mn} \frac{\gamma_0}{R} + C_3 v_{0mn}^* v_{0mn} + C_1 w_{0mn}^* w_{0mn} \right) + \left(v_{0mn}^2 \frac{\gamma_0}{R^2} + \theta_{xmn}^2 + \theta_{\varphi mn}^2 + C_1 \theta_{zmn}^2 \right) \\ D_{mn} &= 2 \left(C_4 \theta_{xmn}^* u_{0mn} + C_3 v_{0mn}^* v_{0mn} \frac{\gamma_0}{R} + C_4 \theta_{\varphi mn}^* v_{0mn} + C_2 \theta_{zmn}^* w_{0mn} \right) + \left(C_3 u_{0mn}^* \theta_{xmn} + C_3 v_{0mn}^* \theta_{\varphi mn} + C_1 w_{0mn}^* \theta_{zmn} \right) \\ E_{mn} &= 2 \left(C_4 \theta_{\varphi mn}^* v_{0mn} \frac{\gamma_0}{R} + C_4 \theta_{xmn}^* \theta_{zmn} + C_4 \theta_{\varphi mn}^* \theta_{\varphi mn} + C_1 C_2 \theta_{zmn}^* \theta_{zmn} \right) + \left(C_3 (u_{0mn}^*)^2 + C_3 (v_{0mn}^*)^2 + C_1 (w_{0mn}^*)^2 \right) \\ F_{mn} &= 2(C_3 C_4 \theta_{xmn}^* u_{0mn}^* + C_3 C_4 \theta_{\varphi mn}^* v_{0mn}^* + C_1 C_2 \theta_{zmn}^* w_{0mn}^*) \\ Z_{mn} &= (C_4 (\theta_{xmn}^*)^2 + C_4 (\theta_{\varphi mn}^*)^2 + C_2 (\theta_{zmn}^*)^2) \end{aligned} \quad (42)$$

به منظور حل معادله دیفرانسیل در رابطه (38)، از طرفین این رابطه تبدیل لاپلاس گرفته شده، رابطه زیر به دست آمده است:

$$\mathcal{L} \{ \ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) \} = \mathcal{L} \left\{ \frac{H_{mn} f(t)}{J_{mn}} \right\} \quad (43)$$

با فرض $t \geq 0$ ، می‌توان نوشت [18]:

$$s^2 T_{mn}(s) - s T_{mn}(0) - \dot{T}_{mn}(0) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(s) = \frac{H_{mn}}{J_{mn}} F(s) \quad (44)$$

که در رابطه (44)، $T_{mn}(s) = \mathcal{L}(T_{mn}(t))$ و $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ با فرض شرایط اولیه صفر، یعنی $T_{mn}(0) = \dot{T}_{mn}(0) = 0$ ، می‌توان نوشت:

$$s^2 T_{mn}(s) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(s) = \frac{H_{mn}}{J_{mn}} F(s) \quad (45)$$

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} (u_{0mn} \bar{I}_0 + \theta_{xmn} \bar{I}_1 + C_3 u_{0mn}^* \bar{I}_2 + C_4 \theta_{xmn}^* \bar{I}_3) \cos \lambda x \cos n \varphi \\ \left(v_{0mn} (\bar{I}_0 + \frac{2\gamma_0}{R} \bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R^2} \bar{I}_2) + \theta_{\varphi mn} (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2) \right) \sin \lambda x \sin n \varphi \\ (C_3 v_{0mn}^* \bar{I}_2 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_3) + C_4 \theta_{\varphi mn}^* (\bar{I}_3 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_4) \\ (w_{0mn} \bar{I}_0 + C_1 \theta_{zmn} \bar{I}_1 + C_1 w_{0mn}^* \bar{I}_2 + C_2 \theta_{zmn}^* \bar{I}_3) \sin \lambda x \cos n \varphi \\ (u_{0mn} \bar{I}_1 + \theta_{xmn} \bar{I}_2 + C_3 u_{0mn}^* \bar{I}_3 + C_4 \theta_{xmn}^* \bar{I}_4) \cos \lambda x \cos n \varphi \\ \left(v_{0mn} (\bar{I}_1 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_2) + \theta_{\varphi mn} \bar{I}_2 + C_3 v_{0mn}^* \bar{I}_3 + C_4 \theta_{\varphi mn}^* \bar{I}_4 \right) \sin \lambda x \sin n \varphi \\ C_1 (w_{0mn} \bar{I}_1 + \theta_{zmn} \bar{I}_2 + w_{0mn}^* \bar{I}_3 + C_2 \theta_{zmn}^* \bar{I}_4) \sin \lambda x \cos n \varphi \\ C_3 (u_{0mn} \bar{I}_2 + \theta_{xmn} \bar{I}_3 + u_{0mn}^* \bar{I}_4 + C_4 \theta_{xmn}^* \bar{I}_5) \cos \lambda x \cos n \varphi \\ C_3 \left(v_{0mn} (\bar{I}_2 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_3) + \theta_{\varphi mn} \bar{I}_3 + v_{0mn}^* \bar{I}_4 + C_4 \theta_{\varphi mn}^* \bar{I}_5 \right) \sin \lambda x \sin n \varphi \\ C_1 (w_{0mn} \bar{I}_2 + \theta_{zmn} \bar{I}_3 + w_{0mn}^* \bar{I}_4 + C_2 \theta_{zmn}^* \bar{I}_5) \sin \lambda x \cos n \varphi \\ C_4 (u_{0mn} \bar{I}_3 + \theta_{xmn} \bar{I}_4 + C_3 u_{0mn}^* \bar{I}_5 + \theta_{xmn}^* \bar{I}_6) \cos \lambda x \cos n \varphi \\ C_4 \left(v_{0mn} (\bar{I}_3 + \frac{\gamma_0}{R} \bar{I}_4) + \theta_{\varphi mn} \bar{I}_4 + C_3 v_{0mn}^* \bar{I}_5 + \theta_{\varphi mn}^* \bar{I}_6 \right) \sin \lambda x \sin n \varphi \\ C_2 (w_{0mn} \bar{I}_3 + C_1 \theta_{zmn} \bar{I}_4 + C_1 w_{0mn}^* \bar{I}_5 + \theta_{zmn}^* \bar{I}_6) \sin \lambda x \cos n \varphi \end{Bmatrix} \quad (34)$$

از طرفی در تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته، داریم:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} ([L_{ij}] \{\Delta\} T_{mn}(t)) \{\Psi\} dx d\varphi = 0 \quad (35)$$

با توجه به این‌که در تحلیل ارتعاشات آزاد رابطه $e^{i\omega_{mn} t} T_{mn}(t)$ برقرار است، دستگاه معادلات رابطه (35) نیز به صورت زیر بازنویسی شده است:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} ([L'_{ij}] \{\Delta\} T_{mn}(t)) \{\Psi\} dx d\varphi = \int_0^L \int_0^{2\pi} (-\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) \{\Phi\}) \{\Psi\} dx d\varphi \quad (36)$$

با استفاده از خاصیت تعامد شکل مودها¹، از ترکیب دو رابطه (33) و (36)، رابطه زیر به دست آمده است [17]:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} (\ddot{T}_{mn}(t) \{\Phi\} - \{Q_d\}) \{\Psi\} dx d\varphi = \int_0^L \int_0^{2\pi} (-\omega_{mn}^2 T_{mn}(t) \{\Phi\}) \{\Psi\} dx d\varphi \quad (37)$$

پس از انجام انتگرال‌گیری در رابطه (37)، معادلات سطرهای اول تا دوازدهم، به ترتیب در u_{0mn}^* ، θ_{zmn}^* ، $\theta_{\varphi mn}^*$ ، θ_{xmn}^* ، w_{0mn} ، v_{0mn} ، u_{0mn} ، θ_{zmn}^* ، $\theta_{\varphi mn}^*$ ، θ_{xmn}^* ، w_{0mn}^* ، v_{0mn}^* تساوی با هم جمع شده‌اند. پس از مرتب‌سازی عبارت‌های جبری، یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم بر حسب زمان به صورت زیر به دست آمده است:

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = G_{mn}(t) \quad (38)$$

که در رابطه (38)، $G_{mn}(t)$ عبارت‌اند از نیروهای تعمیم یافته² و به صورت زیر تعریف شده است:

¹ - Orthogonality of mode shapes
² - Generalized forces

پس از انجام ساده‌سازی، رابطه زیر حاصل شده است:

$$\theta_x^*(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{xmn}^* H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (48)$$

با جایگذاری پارامترهای جابجایی از رابطه (48) در رابطه (28)، مؤلفه‌های جابجایی پوسته نیز در هر نقطه دلخواه (x, φ, z) برحسب زمان قابل محاسبه هستند.

4- مدل ضربه ارائه شده این پژوهش

در تحقیقاتی که تاکنون برای تحلیل پاسخ ضربه روی پوسته‌های استوانه‌ای توسط سایر محققین انجام پذیرفته است، به دو موضوع مهم توجه شده است. یکی تخمین نیروی تماس بین ضربه‌زننده و پوسته و دیگری پیش‌گویی جابجایی‌ها، تنش‌ها و کرنش‌های ایجاد شده در پوسته تحت بارگذاری ضربه‌ای.

اکثر محققین برای تخمین نیروی تماس بین جسم ضربه زننده و سازه هدف در حین ضربه، از قانون تماس هرتر³ و یا از ویرایش اصلاح شده آن استفاده کرده‌اند [18]. تحقیقات بسیاری تاکنون برای تخمین تاریخچه نیروی ضربه انجام شده است. اما اکثر این تحقیقات، یا به کمک روش‌های اندازه‌گیری تجربی انجام شده مانند گنینگ و همکاران [5] و یا با استفاده از روش‌های عددی مانند المان محدود و تفاضل محدود مانند چاندراشخارا و شرودر [19] کیستلر و واس [20]؛ کریشنامورثی و همکاران [2]؛ گلنپائی و راثو [21]. برخی محققین نیز با روش‌های تحلیلی به معادله‌ای غیرخطی جهت محاسبه نیروی ضربه دست یافته‌اند مانند مانیولولا و سترونج [22]. لیکن حل این معادله غیرخطی، قدری دشوار است و باید به روش گام‌به‌گام، توأم با ارضای معیار همگرایی صورت گیرد. برخی دیگر مانند کریستوفرو و سوانسون [23] با استفاده از تبدیل لاپلاس، حل تحلیلی بسته برای نیروی ضربه روی پوسته استوانه‌ای ارائه دادند. لیکن رابطه ارائه شده توسط ایشان برای محاسبه نیروی ضربه، رابطه‌ای نسبتاً پیچیده است.

برخی محققین سعی کرده‌اند از مدل‌های ساده‌تر برای تخمین نیروی تماس استفاده کنند. از جمله گانگ [18] برای محاسبه نیروی ضربه روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی، از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی مشابه با مدل جرم و فنر شیواکومار و همکاران [24] استفاده کرد. اما سفتی تماس را به کمک آزمایش تجربی استخراج کرد. تعداد کمی از تحقیقات صورت گرفته تاکنون، به روش‌های تحلیلی ساده و مهندسی برای تخمین نیروی ضربه بر روی پوسته‌های استوانه‌ای روی آورده‌اند. از این رو، در این پژوهش دو مدل جدید با تعاریف کلی زیر برای محاسبه تاریخچه نیروی ضربه پیشنهاد شده‌اند:

1. مدل اول (مدل نیم سینوسی یا H-S): این مدل بر مبنای

مدل بالانس انرژی ارائه شده در مقاله آپتیه و همکاران [25] با ایده گرفتن از روش ارائه شده در مقاله چوی و هونگ [26] بنا نهاده شده است.

2. مدل دوم (مدل جرم و فنر بهبودیافته یا IS-M): این مدل

بر مبنای مدل جرم و فنر خطی دو درجه آزادی ارائه شده در مقاله شیواکومار و همکاران [24] با ایده گرفتن از روش

$$T_{mn}(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega_{mn}^2)} \frac{H_{mn}}{J_{mn}} F(s) \quad (46)$$

صورت و مخرج کسر رابطه (46) در ω_{mn} ضرب شده، از طرفین این رابطه تبدیل لاپلاس معکوس گرفته شده است. آنگاه با بهره‌گیری از انتگرال کانولوشن¹ [18]، توابع مجهول $T_{mn}(s)$ به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$T_{mn}(t) = \frac{H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (47)$$

برای محاسبه پاسخ جابجایی در هر نقطه (x, φ, z) از فضای پوسته در سه جهت (u, v, w) برحسب زمان، پارامترهای جابجایی با استفاده از روش جمع آثار مودها، به صورت سری‌های فوریه دوگانه مثلثاتی زیر محاسبه شده‌اند:

$$u_0(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{0mn} H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \cos \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$v_0(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_{0mn} H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \sin n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$w_0(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{0mn} H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$\theta_x(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{xmn} H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \cos \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$\theta_\varphi(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{\varphi mn} H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \sin n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$\theta_z(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{zmn} H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$u_0^*(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{0mn}^* H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \cos \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$v_0^*(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_{0mn}^* H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \sin n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$w_0^*(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{0mn}^* H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$\theta_x^*(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{xmn}^* H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \cos \lambda x \cos n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

$$\theta_\varphi^*(x, \varphi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta_{\varphi mn}^* H_{mn}}{J_{mn} \omega_{mn}} \sin \lambda x \sin n \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau$$

³ - Half-Sine model

⁴ - Improved Spring-Mass model

¹ - Convolution integral

² - Hertz's contact law

1-1-4- محاسبه حداکثر نیروی تماس (F_{max})

به منظور محاسبه حداکثر نیروی ضربه (F_{max})، ابتدا تحلیل استاتیکی پوسته استوانه‌ای صورت پذیرفته است. سپس پاسخ تحلیل استاتیکی با پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای با استفاده از مدل جرم و فنر تلفیق شده است. همانطور که در شکل 3 نمایش داده شده است، سیستم ضربه زنده و پوسته استوانه‌ای با دو فنر الاستیک به صورت سری مدل‌سازی شده است. یک فنر خطی (با ثابت k_s) برای به حساب آوردن خیز کلی³ و یک فنر غیرخطی (با ثابت k_i) برای به حساب آوردن فرورفتگی موضعی³ ناشی از نیروی تماس در نظر گرفته شده است.

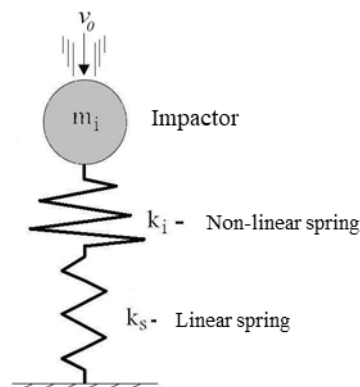


Fig. 3 Low velocity impact model.

شکل 3 مدل ضربه سرعت پایین.

نیروی موجود در هر دو فنر خطی و غیرخطی نمایش داده شده در شکل 3، با استفاده از روابط زیر محاسبه شده‌اند:

$$F = k_i \alpha^p \quad (51)$$

$$F = k_s w_b, \quad w_b = w(x_L, \varphi_L, -h/2) \quad (52)$$

که در روابط (51) و (52)، F کل نیروی تماس، α فرورفتگی موضعی، p نما و w_b جابه‌جایی شعاعی نقطه زیرین مرکز اعمال بار با مختصات $(x_L, \varphi_L, -h/2)$ است. همچنین ثابت فنر غیرخطی k_i بر اساس قانون تماس هرتز و ثابت فنر خطی k_s بر اساس سفتی پوسته در محل اعمال نیروی ضربه در راستای شعاعی هستند که در ادامه به توضیح نحوه محاسبه آن‌ها پرداخته شده است.

برای محاسبه ثابت فنر الاستیک خطی (k_s)، نیروی استاتیکی واحد به صورت فشاری بر سطح مستطیلی مورد اصابت ضربه زنده اعمال شده است. بر این اساس، k_s به طریق زیر محاسبه شده است:

$$k_s = \frac{1}{\delta_1}, \quad \delta_1 = w(x_L, \varphi_L, -h/2) \quad (53)$$

که در رابطه (53)، δ_1 خیز در نقطه زیرین مرکز اعمال بار در اثر اعمال نیروی فشاری واحد بر سطح مستطیلی مورد اصابت ضربه زنده است. ثابت فنر الاستیک غیرخطی k_i یا سفتی تماس هرتز، بر اساس قانون تماس هرتز به صورت زیر محاسبه شده است [30]:

خطی‌سازی قانون تماس ارائه شده در مقاله چوی و لیم [27] بنا نهاده شده است.

به منظور محاسبه تاریخچه نیروی ضربه روی پوسته استوانه‌ای، فرضیات زیر مدنظر قرار گرفته‌اند:

- ضربه زنده با سرعت پایین به پوسته برخورد می‌کند
- شکل ضربه زنده کروی، از جنس همگن ایزوتروپیک و الاستیک است
- از اثرات نرخ کرنش و انتشار موج بر پاسخ ضربه صرف‌نظر شده است
- از انرژی‌های ناشی از ارتعاش جسم ضربه زنده، صوت، حرارت و آسیب جزئی در محل ضربه صرف‌نظر شده است

با توجه به اینکه در فرضیات، از اثر انتشار موج بر پاسخ ضربه صرف‌نظر شده، ضربه مورد بحث در پژوهش حاضر در دسته ضربه مرز کنترل شده واقع می‌شود. بنابراین، برای محاسبه تاریخچه نیروی تماس، پدیده ضربه به صورت شبه‌استاتیکی فرض شده است.

1-4- مدل اول (مدل نیم سینوسی یا H-S)

با توجه به نتایج تحقیقات گذشته توسط سایر محققین، فرض شده است که نیروی تماس δ و بدل شده بین ضربه زنده و پوسته کامپوزیتی چندلایه در حین ضربه، از تئوری تماس هرتز به صورت زیر تبعیت می‌کند:

$$F_c(t) = K_2 [\delta(t)]^p \quad (49)$$

که در آن K_2 و P ثابت‌های ماده، F_c نیروی تماس و δ فرورفتگی هستند که با استفاده از آزمایش‌های فرورفتگی استاتیکی قابل دستیابی هستند (یانگ و سان [28] و گانگ [18]). از طرفی نشان داده شده است که فرورفتگی ناشی از تماس را می‌توان با دقت مناسب، به صورت یک منحنی نیم سینوسی، مانند رابطه (50) تقریب زد [18، 29]:

$$\delta(t) = \delta_m \sin \frac{\pi t}{T} \quad (50)$$

که در آن δ_m حداکثر فرورفتگی و T مدت زمان تماس¹ هستند. بنابراین، در مدل اول (H-S) ارائه شده در این پژوهش، تاریخچه نیروی ضربه به صورت یک منحنی نیم سینوسی تقریب زده شده است.

همان‌طور که ذکر شد، این مدل بر مبنای مدل بالانس انرژی ارائه شده در مقاله آپتره و همکاران [25]، که برای حل مسئله ضربه بر روی یک تیر ساندویچی بکار گرفته شده، توأم با استفاده از ایده‌ی ارائه شده در مقاله چوی و هونگ [26]، که در آن تحلیل ضربه روی ورق‌های مربعی کامپوزیتی انجام پذیرفته، بنا نهاده شده است. روش بالانس انرژی ارائه شده توسط آپتره و همکاران [25] اصولاً مشابه با روش بالانس انرژی ارائه شده توسط شیواکومار و همکاران [26] است. همچنین چوی و هونگ [26] با کمک نرم‌افزار المان محدود، فرکانس پایه سیستم ورق با جرم متمرکز در مرکز آن را محاسبه کرده، مدت زمان تماس (C.T.) را برابر نصف پرئود پایه در نظر گرفته‌اند. لیکن در این پژوهش، بر اساس یک روش تحلیلی و بدون استفاده از نرم‌افزار المان محدود، مدت زمان تماس محاسبه شده است.

¹ Contact time (C.T.)

² Global deflection

³ Local indentation

شده است. لذا در این پژوهش، برخلاف روش ارائه شده توسط چوی و هونگ [26] نیاز به استفاده از نرم افزار المان محدود وجود ندارد.

اثر جرم نقطه‌ای¹ متمرکز در یک نقطه دلخواه از سطح میانی پوسته استوانه‌ای بر فرکانس‌های طبیعی توسط سُوْدِل [31] بررسی شده است. معادله مشخصه کل سیستم پوسته به طول L و به جرم m_s که جرم نقطه‌ای m_i در مختصات (x_L, φ_L) به آن وصل شده، عبارت است از [31]:

$$\frac{4}{m_s} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin^2 \frac{m\pi x_L}{L} - \frac{1}{m_i \omega^2} = 0 \quad (59)$$

که در رابطه (59) x_L همان مختصه طولی مرکز سطح اعمال بار و ω_{mn} فرکانس‌های طبیعی پوسته (بدون جرم متمرکز) هستند. برای استخراج فرکانس‌های طبیعی سیستم با جرم متمرکز، $\omega = \omega_{mn}$ باید ریشه معادله (59) با یک روش عددی محاسبه شود. هر چه تعداد موده‌های (m, n) در نظر گرفته شده در رابطه (59) بیشتر باشد، دقت جواب به دست آمده برای فرکانس‌های طبیعی سیستم با جرم متمرکز بیشتر است. در مرجع [31] جزئیات نحوه محاسبه فرکانس‌های طبیعی سیستم با جرم متمرکز آورده شده است.

3-1-4- استخراج تابع نیروی ضربه در مدل اول (H-S)

پس از مشخص شدن حداکثر نیروی ضربه (F_{max}) و مدت زمان تماس (C.T)، اطلاعات لازم برای رسم منحنی نیم سینوسی توصیف کننده تاریخچه نیروی ضربه، آماده شده‌اند. بنابراین، تابع نیروی ضربه به صورت زیر در می‌آید:

$$F_c(t) = F_{max} \sin(\omega_1^* t) \quad (60)$$

که در رابطه (60)، ω_1^* همان فرکانس پایه سیستم با جرم متمرکز (برحسب رادیان بر ثانیه) است که با استفاده از رابطه (59) تعیین شده است. بخش زمانی $(f(t))$ از تابع تحریک خارجی $(q_1(x, \varphi, t))$ ، در رابطه (17)، با تقسیم تابع نیروی ضربه $f_c(t)$ در رابطه (60) بر مساحت سطح کوچک اعمال بار $(A_L = 2l_1 \times 2l_2)$ ، به صورت زیر تعیین شده است:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{F_c(t)}{A_L} = \frac{F_{max}}{A_L} \sin(\omega_1^* t) = f_0 \sin(\omega_1^* t), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_1} \\ f(t) = 0, & t > \frac{\pi}{\omega_1} \end{cases} \quad (61)$$

در عمل مساحت سطح اعمال بار ضربه‌ای با زمان تغییر می‌کند. لیکن نشان داده شده است که با توجه به بسیار کوچک بودن سطح تماس در حین ضربه، تغییر در اندازه مساحت آن (حتی تا صد برابر افزایش) تأثیری ناچیز بر نیروی تماس و خیز کلی ناشی از ضربه می‌گذارد [2]. لذا در پژوهش حاضر برای سادگی حل مسئله، در رابطه (61) سطح اعمال بار ضربه‌ای، ثابت در نظر گرفته شده است. با جایگذاری تابع $f(t)$ از رابطه (61) در انتگرال کانولوشن رابطه (51)، رابطه (62) حاصل شده است:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{f_0 (\sin(\omega_{mn} t) - \frac{\omega_{mn}}{\omega_1} \sin(\omega_1^* t))}{(\omega_1^2 - \omega_{mn}^2)}, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_1} \\ \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn} (t - \tau) d\tau \\ \frac{f_0 (\sin(\omega_{mn} t) + \sin \frac{\omega_{mn}}{\omega_1} (\omega_1 t - \pi))}{(\omega_1^2 - \omega_{mn}^2)}, & t > \frac{\pi}{\omega_1} \end{cases} \quad (62)$$

$$k_i = \frac{4}{3} E_s \sqrt{R_s} \quad (54)$$

که در آن E_s و R_s به ترتیب مدول یانگ معادل و انحنای معادل هستند و به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s}, \quad \frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_s} \quad (55)$$

که در رابطه (55)، V و R به ترتیب مدول یانگ، ضریب پواسون و شعاع انحنا و زیرنویس‌های i و s به ترتیب نماینده جسم ضربه زننده و سازه هدف هستند. جایجایی ضربه زننده برابر است با حاصل جمع عمق فرورفتگی به علاوه خیز کلی پوسته استوانه‌ای که به صورت رابطه (56) محاسبه شده است:

$$w = \alpha + w_b = \frac{F}{k_s} + \left(\frac{F}{k_i} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (56)$$

کار انجام شده توسط جسم ضربه زننده در خلال رخداد ضربه به شیوه زیر محاسبه شده است:

$$W = \int_0^w F dw = Fw - \int_0^F w dF = Fw - \int_0^F \left(\frac{F}{k_i} + \left(\frac{F}{k_i} \right)^{\frac{1}{p}} \right) dF = \frac{F^2}{2k_i} + \frac{1}{p+1} \frac{F^{1+1/p}}{2k_i^{1/p}} \quad (57)$$

با توجه به اینکه انرژی جنبشی ضربه زننده برابر با کار انجام شده توسط نیروی ضربه و یا انرژی کرنشی ذخیره شده در فنرها است، حداکثر نیروی تماس به شیوه زیر محاسبه شده است [32]:

$$\frac{F_{max}^2}{2k_s} + \frac{F_{max}^{1+1/p}}{(p+1)k_i^{1/p}} = \frac{1}{2} m_i v_0^2 \quad (58)$$

که در رابطه (58)، m_i جرم و v_0 سرعت اولیه برخورد جسم ضربه زننده هستند. با حل معادله فوق با استفاده از یکی از روش‌های عددی ریشه‌یابی معادلات، مانند روش نیوتن، مقدار F_{max} یا حداکثر نیروی ضربه به دست آمده است. مقدار p در رابطه (58)، بر اساس قانون هرترز برابر 1.5 در نظر گرفته شده است.

4-1-2- محاسبه مدت زمان تماس (C.T)

چوی و هونگ [26] فرکانس‌های حاکم بر تاریخچه نیروی ضربه را با مقادیر فرکانس‌های طبیعی این سیستم با جرم متمرکز مقایسه کردند. آن‌ها از انطباق اولین فرکانس طبیعی سیستم با جرم متمرکز با اولین فرکانس تاریخچه نیروی ضربه، نتیجه گرفتند که اولین فرکانس طبیعی سیستم با جرم متمرکز، توصیف کننده اصلی رفتار دینامیکی نیروی ضربه است و اثر آن در مقایسه با اثر سایر فرکانس‌ها بر رفتار دینامیکی نیروی ضربه، غالب است. در مدل تحلیلی ساده‌ای که برای پیش‌گویی تاریخچه نیروی ضربه ارائه دادند، مدت زمان تماس را برابر نصف عکس اولین فرکانس طبیعی سیستم با جرم متمرکز قرار دادند.

در این پژوهش محاسبه فرکانس پایه سیستم پوسته با جرم ضربه زننده متمرکز در نقطه اعمال ضربه، به روش تحلیلی صورت پذیرفته است. سپس مشابه با روش چوی و هونگ [26]، مدت زمان تماس (C.T) برابر نصف پرئود پایه (نصف عکس اولین فرکانس طبیعی سیستم با جرم متمرکز) قرار داده

¹- Point mass

با فرض پاسخ هارمونیک برای این سیستم دو درجه آزادی، فرکانس‌های طبیعی به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\left(\frac{k_c + k_{bs}}{m_i} + \frac{k_c}{m_s} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_c + k_{bs}}{m_i} + \frac{k_c}{m_s} \right)^2 - 4 \frac{k_c k_1}{m_i m_s}}}{2}, \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}} \quad (65)$$

که در رابطه (65) ω_2 و ω_1 فرکانس‌های طبیعی سیستم جرم و فنر هستند. برای حل مسئله ارتعاشات آزاد سیستم جرم و فنر با شرایط اولیه، پاسخ هارمونیک برای درجات آزادی x_i و x_s به صورت زیر به دست آمده‌اند [17]:

$$\begin{Bmatrix} x_i(t) \\ x_s(t) \end{Bmatrix} = A_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ X_s^{(1)} \end{Bmatrix} \sin \omega_1 t + A_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ X_s^{(1)} \end{Bmatrix} \cos \omega_1 t + A_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ X_s^{(2)} \end{Bmatrix} \sin \omega_2 t + A_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ X_s^{(2)} \end{Bmatrix} \cos \omega_2 t \quad (66)$$

$$X_s^{(1)} = 1 - \frac{m_i}{k_c} \lambda_1, \quad X_s^{(2)} = 1 - \frac{m_i}{k_c} \lambda_2 \quad (67)$$

که در رابطه (66) ثوابت A_1 تا A_4 از شرایط اولیه به صورت زیر تعیین شده‌اند [17]:

$$A_1 = \frac{v_0(k_c - m_i \omega_1^2)}{\omega_1 m_i (\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad A_3 = \frac{v_0(k_c - m_i \omega_2^2)}{\omega_2 m_i (\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad A_2 = A_4 = 0 \quad (68)$$

با توجه به روابط (66) تا (68)، تابع نیروی ضربه به صورت رابطه (69) استخراج شده است [24]:

$$F_c(t) = k_{bs} x_s(t) = \frac{k_{bs} v_0 (k_c - m_i \omega_2^2) (k_c - m_i \omega_1^2)}{k_c m_i (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} - \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right) \quad (69)$$

بخش زمانی $f(t)$ از تابع تحریک خارجی $(q_t(x, \phi, t))$ ، در رابطه (29)، با تقسیم تابع نیروی ضربه $f_c(t)$ بر مساحت سطح کوچک اعمال بار $(A_L = 2l_1 \times 2l_2)$ ، به صورت زیر تعیین شده است:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{F_c(t)}{A_L} = F_0 \left(\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} - \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right), & 0 \leq t \leq T \\ f(t) = 0, & t > T \end{cases} \quad (70)$$

$$F_0 = \frac{k_{bs} v_0 (k_c - m_i \omega_2^2) (k_c - m_i \omega_1^2)}{A_L k_c m_i (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (71)$$

که در رابطه (70)، مدت زمان تماس است. با جایگذاری تابع $f(t)$ از رابطه (71) در انتگرال کانولوشن، رابطه (72) حاصل شده است:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mm}(t-\tau) d\tau &= F_0 \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_{mm}^2} \left(\sin(\omega_{mm} t) - \frac{\omega_{mm}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_{mm}^2} \left(\sin(\omega_{mm} t) - \frac{\omega_{mm}}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right) \right], \quad 0 \leq t \leq T \\ \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mm}(t-\tau) d\tau &= F_0 \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_{mm}^2} \left(\frac{\sin(\omega_{mm} t) - \cos(\omega_1 T) \sin \omega_{mm}(t-T)}{\omega_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_{mm}^2} \left(\frac{\sin(\omega_{mm} t) - \cos(\omega_2 T) \sin \omega_{mm}(t-T)}{\omega_2} \right) \right], \quad t > T \end{aligned} \quad (72)$$

³ - Modified contact stiffness

برای محاسبه پارامترهای جابجایی پوسته بر حسب زمان، رابطه (62) در روابط (60) جایگذاری شده است.

4-2- مدل دوم (مدل جرم و فنر بهبودیافته یا IS-M)

همان‌طور که ذکر شد، این مدل بر مبنای مدل جرم و فنر دو درجه آزادی ارائه شده در مقاله شیواکومار و همکاران [24] برای حل مسئله ضربه بر روی ورق دایروی کامپوزیتی توأم با استفاده از قانون تماس خطی شده¹ ارائه شده در مقاله چوی و لیم [27] برای تحلیل ضربه روی ورق‌های مربعی کامپوزیتی، بنا نهاده شده است.

4-2-1- معادلات حرکت مدل جرم و فنر دو درجه آزادی بهبودیافته

با توجه به اینکه در این پژوهش، از اثرات تغییر شکل‌های غیرخطی صرف‌نظر شده است، از مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی بهره گرفته شده که در آن از به‌کارگیری فنر غیرخطی ناشی از اثرات غشایی، یا همان (K_m) در مدل جرم و فنر دو درجه آزادی غیرخطی شیواکومار و همکاران [24]، صرف‌نظر شده است. در شکل 4 این سیستم‌های جرم و فنر دو درجه آزادی نمایش داده شده‌اند.

شکل 4 ب شماییک یک سیستم دو درجه آزادی را نشان می‌دهد که در آن m_i جرم ضربه زنده، m_s^* جرم مؤثر پوسته²، k_c سفتی تماس اصلاح شده³ و k_{bs} سفتی معادل پوسته (سفتی توأم خمشی و برشی یا همان k_s در رابطه (85)) هستند. با توجه به شکل 4، معادلات حرکت سیستم دو درجه آزادی با شرایط اولیه $\dot{x}_i(0) = -v_0, x_s(0) = x_i(0) = \dot{x}_s(0) = 0$ بر اساس قانون نیوتن به صورت رابطه (95) در می‌آیند:

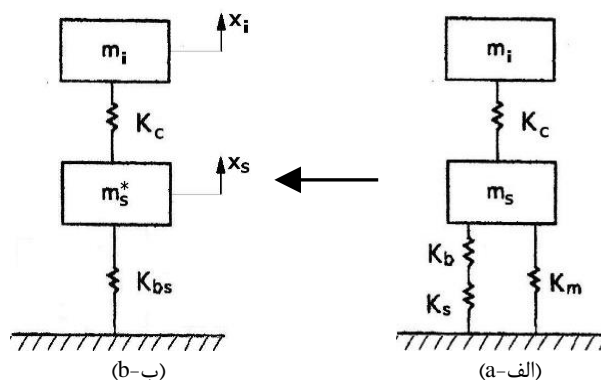


Fig. 4 a) Nonlinear mass and spring model of two degrees of freedom by Shivakumar et al. [24]; b) Improved linear mass and spring model with two degrees of freedom (used in this research).

شکل 4 الف- مدل جرم و فنر دو درجه آزادی غیرخطی شیواکومار و همکاران [24]؛ ب- مدل جرم و فنر دو درجه آزادی خطی بهبودیافته (مورد استفاده در این پژوهش).

$$\sum F_{x_j} = m_j \ddot{x}_j, \quad j = i, s \quad (63)$$

از روابط (63) معادلات به فرم ماتریسی زیر نتیجه شده است:

$$\begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_s^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_c & -k_c \\ -k_c & (k_c + k_{bs}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

¹ - Linearized contact law

² - Effective mass of the shell

که در رابطه (75)، F_m عبارت است از حداکثر نیروی تماس پیش‌گویی شده و $k = k_i$ همان سفتی تماس هر ترم معرفی شده در رابطه (64) است.

4-2-4- به‌کارگیری الگوریتم تکراری و اصلاح سفتی تماس

در این الگوریتم، برای همگرایی سریع‌تر مقدار سفتی تماس، فرض شده است مقدار حداکثر نیروی تماس مورد استفاده در رابطه (75) در تکرار اول ($F_m^{(1)}$) از مدل جرم و فنر یک درجه آزادی به صورت رابطه (76) استخراج شده باشد [34]:

$$F_m^{(1)} = v_0 \sqrt{k_{bs} m_i} \quad (76)$$

با جایگذاری $F_m^{(1)}$ در رابطه (75)، اولین مقدار برای k_c به دست آمده است. اما این مقدار واقعی k_c نیست و باید در تکرارهای بعد اصلاح شود. با استفاده از k_c محاسبه شده در تکرار اول، می‌توان با استفاده از رابطه (69)، حداکثر نیروی تماس را در تکرار دوم $F_m^{(2)}$ محاسبه کرد. با جایگذاری $F_m^{(2)}$ در رابطه (59)، دومین مقدار (اصلاح شده) برای k_c به دست آمده است. این روند تکراری تا آنجا ادامه می‌یابد که قدر مطلق اختلاف حداکثر نیروی تماس در آخرین تکرار با تکرار قبل، از حد مجاز تعریف شده (عدد بسیار کوچک مثل ϵ) کوچک‌تر شود. آخرین مقدار به دست آمده برای سفتی تماس، سفتی تماس اصلاح شده (k_c^*) نامیده می‌شود.

در روش خطی سازی گانگ [18]، با برابر قرار دادن ایمپالس (سطح زیر منحنی نیروی تماس-زمان) حاصل از قانون تماس خطی با ایمپالس حاصل از قانون تماس غیرخطی، سفتی تماس (k_c) با استفاده از تابع گاما به‌طور تقریبی محاسبه شده است. لیکن این محاسبه با فرض رعایت شرط $m_s > 10 m_i$ انجام شده است [18]. لیکن در این مدل، برای محاسبه سفتی تماس اصلاح شده (k_c^*)، هیچ شرطی برای نسبت جرمی اعمال نشده است. نام‌گذاری مدل جرم و فنر "بهبودیافته" برای این مدل، به همین دلیل است. پس از محاسبه تاریخچه نیروی تماس توسط مدل‌های ضربه H-S یا IS-M، ابعاد سطح مربعی کوچک تماس (ابعاد ناحیه اعمال بار ضربه‌ای) طبق رابطه (77) محاسبه شده است [34]:

$$2l_1 = 2l_2 = 2R_{contact} \\ R_{contact} = \left(3 \frac{F_{max} R_c}{4 E_c} \right)^{1/3} \quad (77)$$

که در رابطه (77) $R_{contact}$ معرف شعاع ناحیه تماس، F_{max} حداکثر نیروی تماس و R_c و E_c شعاع انحنا و مدول یانگ معادل هستند و در رابطه (55) تعریف شده‌اند.

5- صحت سنجی

تاریخچه نیروی ضربه مرکزی بر روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با استفاده از مدل‌های اول (H-S) و دوم (IS-M) در مقایسه با نتایج تئوری و تجربی گانگ [18] و همچنین نتایج تحلیلی ماتمیولا و سترونج [22]، در شکل 5 نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌شود، نتایج مدل‌های H-S و IS-M ارائه شده در پژوهش حاضر، از تطابق خوبی نسبت به نتایج تئوری و تجربی سایر محققین برخوردار هستند.

برای محاسبه پارامترهای جابجایی پوسته برحسب زمان، رابطه (72) در روابط (53) جایگذاری شده است.

4-2-2- محاسبه جرم مؤثر پوسته (m_s^*)

در تحلیل‌های انجام شده توسط شیواکومار و همکاران [24] (راجع به ضربه روی ورق دایروی کامپوزیتی) و گلنگ [18] (راجع به ضربه روی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی)، جرم مؤثر سازه (m_s^*) برابر یک چهارم جرم کل سازه در نظر گرفته شده است ($m_s^*/m = 1/4$). لیکن ژوو و سترونج [32] نشان دادند که نسبت m_s^*/m به‌شدت وابسته به نسبت سفتی برشی به سفتی خمشی سازه ($\xi = k_s/k_b$) در محل اعمال بار ضربه‌ای است. آن‌ها نشان دادند که در حالت حدی $\xi \rightarrow \infty$ (یعنی حالتی که سهم انرژی کرنشی برشی در مقایسه با سهم انرژی کرنشی نرمال ناچیز است، مانند ورق‌های خیلی جدار نازک) نسبت m_s^*/m برای ورق‌های کامپوزیتی دایروی به سمت یک چهارم میل می‌کند [32].

سوانسون [33] نشان داد که نسبت جرم مؤثر سازه به کل جرم آن به نوع سازه (مانند شکل هندسی سازه ورق مسطح یا پوسته انحنادار) و ضخامت جداره سازه نازک یا ضخیم، محل اعمال بار، شرایط مرزی و ناهمسانگردی خواص ماده بستگی دارد. وی نسبت جرم مؤثر سازه به کل جرم آن را به‌طور تقریبی برای تیرهای دو سرگیردار 0.375 و برای تیرهای دو سر لولا 0.5 تخمین زد. وی مقدار این نسبت‌ها در مورد ورق‌ها را تقریباً نصف مقدار این نسبت‌ها در مورد تیرها با همین شرایط مرزی تخمین زد. ایشان مقدار نسبت جرم مؤثر پوسته استوانه‌ای به کل جرم آن را بسیار کوچک‌تر از این نسبت برای تیرها و ورق‌ها تخمین زد. برای مثال، ایشان جرم مؤثر برای پوسته‌های استوانه‌ای گرافیت/اپوکسی (با نسبت $R/h=30$) را بین 2 درصد (به ازای $L/R=4$) تا 5 درصد (به ازای $L/R=16$) در مقایسه با جرم کل آن تخمین زد. این مطلب نشان دهنده آن است که ضربه بر روی پوسته استوانه‌ای بسته، به صورت کاملاً موضعی (یا متمرکز) اعمال می‌شود و این امر سبب می‌شود که تنها سهم نسبتاً کوچکی از جرم کل پوسته استوانه‌ای در پاسخ ضربه دخالت کند [33]. سوانسون همچنین رابطه‌ای تقریبی و ساده برای محاسبه جرم مؤثر سازه‌های کامپوزیتی ارائه کرد [33]:

$$\omega_f \approx \sqrt{\frac{k_{bs}}{m_s^*}} \quad (73)$$

که در رابطه (73)، ω_f کوچک‌ترین فرکانس طبیعی سازه است. در مدل دوم (IS-M)، جرم مؤثر پوسته استوانه‌ای با استفاده از رابطه (27) محاسبه شده است.

4-2-3- قانون تماس خطی شده چوی¹

چوی و لیم [27] نشان دادند که در رابطه معروف قانون تماس هر ترم، $F = k\alpha^p$ ، در p ثابت، تغییر مقدار k تا صد برابر و یا در k ثابت، تغییر مقدار p تا 2.5 برابر، تأثیر قابل توجهی بر تاریخچه نیروی ضربه روی ورق‌های مربعی کامپوزیتی نمی‌گذارد. آن‌ها نتیجه گرفتند که استفاده از رابطه غیرخطی $F = k\alpha^p$ برای محاسبه نیروی تماس الزامی نیست. لذا برای راحتی در انجام تحلیل ضربه، بجای این رابطه غیرخطی، از رابطه خطی شده زیر استفاده کردند [27]:

$$F = k_c \alpha \quad (74)$$

$$k_c = F_m^{1/3} k^{2/3} \quad (75)$$

¹ Choi

جدول 2 خطاهای پارامترهای اصلی منحنی تاریخچه نیروی تماس در مقایسه با آزمایش تجربی گانگ [18].

Table 2 Errors of the main parameters of the contact force history curve in comparison with Gang's experimental test [18].

روش	سطح زیر منحنی نیروی تماس- زمان (ایمپالس) (N.s)	مدت زمان تماس (C.T) (ms)	زمان حداکثر نیروی تماس (F _{max}) (N)	حداکثر نیروی تماس (N)
روش آزمایش تجربی گانگ [18]	0.756070	1.8686	696.2	0.5249
مدل اول (H-S)	0.751076	1.5487	696.1	0.7744
خطا (%)	0.66-	17.11-	0.01-	47.53
مدل دوم (IS-M)	0.695056	2.0136	599.7	1.0191
خطا (%)	8.07-	7.76	13.86-	94.15
روش تحلیلی گانگ [18]	0.767867	1.80	701.2	0.8911
خطا (%)	1.56	3.67-	0.7218	69.77
روش تحلیلی ماتمیولا و سترونج [22]	0.554105	1.4976	610.0	0.4456
خطا (%)	26.71-	19.85-	12.38-	15.11-

5-1- مقایسه مدل اول (H-S) و مدل دوم (IS-M)

دو نکته در مقایسه بین نیروی تماس پیش‌گویی شده بر اساس دو مدل H-S و IS-M قابل توجه هستند.

1- حداکثر نیروی ضربه تخمین زده شده با مدل H-S دقتی بیشتر از مدل IS-M دارد ولی مدت زمان تماس تخمین زده شده با مدل H-S دقتی کمتر از مدل IS-M دارد.

2- برای ایجاد مدل H-S نیاز به محاسبه تعداد کافی فرکانس طبیعی ω_{mn} ، دو حلقه همگرایی (اولی برای محاسبه سفتی خمشی معادل استاتیکی و دومی برای محاسبه فرکانس سیستم جرم متمرکز) و محاسبه ریشه دو معادله غیرخطی است. ولی مدل IS-M نیاز به تنها فرکانس پایه، تنها یک حلقه همگرایی جهت محاسبه سفتی خمشی معادل استاتیکی و تعداد اندکی تکرار (معمولاً سه یا چهار تکرار) برای همگرایی سفتی تماس اصلاح شده دارد.

با توجه به آنچه تا اینجا گفته شد، می‌توان گفت مدل IS-M از مدل H-S ساده‌تر است و کارایی آن در محاسبات با حجم بالا مانند فرآیندهای بهینه‌سازی، جایی که زمان صرف شده برای پردازش اطلاعات از اولی‌تری بالاتر برخوردار است، مناسب‌تر است. علاوه، یکی از ویژگی‌های مدل IS-M در مقایسه با مدل H-S، این است که علاوه بر محاسبه نیروی تماس، امکان محاسبه هم‌زمان خیز پوسته در نقطه زیرین محل برخورد نیز وجود دارد.

6- تحلیل ضربه پوسته استوانه‌ای FML/هسته/FML با هسته FGM

در این بخش، پاسخ ضربه پوسته ساندویچی FML/هسته/FML، تحت ضربه عرضی سرعت پایین توسط ضربه زننده کروی صلب در مرکز پوسته، به روش تحلیلی با استفاده از مدل‌های H-S و IS-M محاسبه شده، با نتایج حاصل از حلگر ABAQUS/Explicit مقایسه صورت پذیرفته است. به منظور مدل‌سازی به روش المان محدود، شکل 6، در نرم‌افزار ABAQUS ایجاد شده است. در جدول 3 مشخصات هندسه و جنس پوسته استوانه‌ای و ضربه زننده موردنظر آورده شده‌اند.

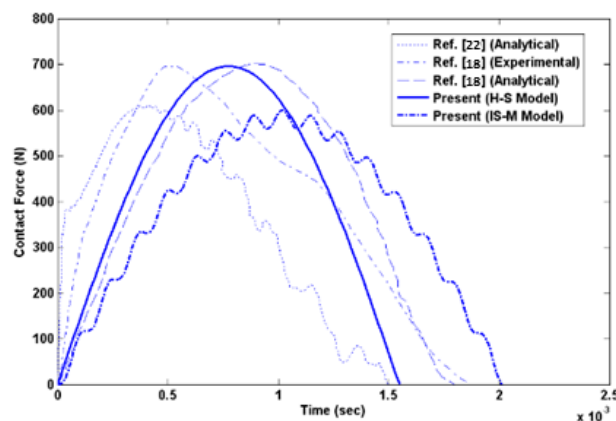


Fig. 5 Comparison of the contact force history obtained from the analytical method of Matmilola and Stronge [22], the analytical and experimental methods of Gang [18] and the first model (H-S) and the second model (IS-M) of the present study.

شکل 5 مقایسه تاریخچه نیروی تماس حاصل از روش تحلیلی ماتمیولا و سترونج [22]، روش‌های تحلیلی و تجربی گانگ [18] و مدل اول (H-S) و مدل دوم (IS-M) پژوهش حاضر.

هندسه، جنس، شرایط مرزی پوسته و ضربه زننده مورد بررسی در شکل 5، در جدول 1 آورده شده‌اند. همچنین خطاهای پارامترهای اصلی منحنی تاریخچه نیروی تماس، در مقایسه با آزمایش تجربی انجام شده توسط گانگ [18]، در جدول 2 آورده شده‌اند.

همان‌طور که در جدول 2 مشاهده می‌شود، مدل اول (H-S) حداکثر نیروی تماس را با دقت خیلی خوب پیش‌گویی می‌کند. ولی مدل دوم (IS-M) حداکثر نیروی تماس را با دقتی کمتر پیش‌گویی می‌کند. در عوض مدل IS-M مدت زمان تماس را با دقتی بیشتر در مقایسه با مدل H-S پیش‌گویی می‌کند. همچنین سطح زیر منحنی نیروی تماس- زمان در مدل H-S در مقایسه با مدل IS-M، به مقدار به دست آمده از آزمایش تجربی گانگ [18] نزدیک‌تر است.

در این مثال، نسبت جرم مؤثر پوسته به جرم کل آن 0.0536 به دست آمده است. این عدد، به اعداد تقریبی پیش‌گویی شده توسط سوانسون [33]، در مورد نسبت جرم مؤثر پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به جرم کل آن (دو تا پنج درصد)، نزدیک است.

جدول 1 هندسه و جنس پوسته و ضربه زننده مورد بررسی در شکل 5 [18, 20].

Table 1 The geometry and material of the shell and impactor studied in Figure 5 [18, 20]

جنس	$E_{\text{in}} = 14.506 \text{ GPa}$, $E_{\text{out}} = 5.362 \text{ GPa}$
(ایزوتروپیک)	$G_{\text{in}} = 2.509 \text{ GPa}$, $\nu_{\text{in}} = 0.231$, $\rho = 1526 \text{ kg/m}^3$
پوسته	عرضی) لایه‌چینی: [90] ⁸ (با ضخامت لایه‌های یکسان)
هندسه (استوانه)	$R = 108 \text{ mm}$, $L = 280 \text{ mm}$, $h = 2.3 \text{ mm}$
جنس (ایزوتروپیک)	$\rho_i = 7900 \text{ kg/m}^3$, $E_i = 200 \text{ GPa}$, $\nu_i = 0.3$
ضربه زننده	هندسه (کره) $R_i = 13.2 \text{ mm}$
جرم و سرعت اولیه	$m_i = 0.0751 \text{ kg}$, $v_0 = 5 \text{ m/s}$

در شکل 7 تاریخچه نیروی تماس حاصل از دو مدل H-S و IS-M، به ازای نسبت‌های جرمی (m_i/m_s) مختلف با نتایج حاصل از حلگر می‌شود، نتایج هر دو مدل H-S و IS-M تطابق خوبی با نتایج حلگر ABAQUS/Explicit نشان می‌دهند. همان‌طور که انتظار می‌رود، هر چه مقدار نسبت جرمی m_i/m_s بیشتر می‌شود، ماهیت شبه استاتیکی بر رفتار ضربه غالب شده، اختلاف بین نتایج دو مدل H-S و IS-M با نتایج حلگر ABAQUS/Explicit کاهش می‌یابد. درصد تفاوت در حداکثر نیروی تماس حاصل از مدل IS-M و H-S به ترتیب -1.36% و -2.68% به ازای $m_i/m_s = 5.22$ ، 2.18 و 0.23 به ازای $m_i/m_s = 2.09$ ، 4.69 و 1.73 به ازای $m_i/m_s = 1.04$ ، 5.83 و 0.4 به ازای $m_i/m_s = 0.52$ و 12.57% و 7.37% به ازای $m_i/m_s = 0.26$ است.

7- مطالعه پارامتری ضربه روی پوسته‌های استوانه‌ای FML/هسته/FML با هسته FGM

به منظور بررسی خصوصیات رفتار دینامیکی پوسته‌های ساندویچی FML/هسته/FML با هسته P-FGM تحت بار ضربه‌ای، در این بخش به بررسی اثر برخی پارامترها مانند کسر حجمی هسته (h_{core}/h)، کسر حجمی فلز (MVF) در رویه‌ها و نمای قانون توانی (N) هسته P-FGM پرداخته شده است. در جدول 4 مشخصات هندسه و جنس پوسته و ضربه زننده مورد نظر آورده شده‌اند.

جدول 4 هندسه و جنس پوسته ساندویچی FML/هسته/FML با هسته P-FGM و ضربه زننده فولادی.

Table 4 Geometry and material of FML/core/FML sandwich shell with P-FGM core and steel impactor.

Ti/C 2/1 [0/90/0]	رویه‌ها (facesheets)	
P-FGM با ساختار متقارن تیتانیوم-تیتانیوم بوراید (Ti-TiB-Ti)	هسته (core)	پوسته
$R = 1m, L = 1m, h = 0.05m$	هندسه (استوانه)	
$E_i = 200GPa, \nu_i = 0.3$	جنس (ایزوتروپیک)	ضربه
$R_i = 0.3m$	هندسه (کروی)	ضربه
$v_0 = 1m/s, m_i = 1282.7kg$	جرم و سرعت	زننده

7-1 اثر کسر حجمی هسته یا h_{core}/h

در شکل‌های 8 و 9 اثر کسر حجمی هسته (h_{core}/h) بر روی به ترتیب تاریخچه نیروی تماس و تاریخچه خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس مورد بررسی قرار گرفته است.

با توجه به شکل 8، با افزایش h_{core}/h از 0.0 تا 1.0، حداکثر نیروی تماس حدود 1.23 برابر افزایش یافته است. همچنین با توجه به شکل 9، با افزایش h_{core}/h از 0.0 تا 1.0، حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس حدود 1.36 برابر کاهش یافته است.

7-2 اثر کسر حجمی فلز (MVF) در رویه‌ها

در شکل‌های 10 و 11 تغییرات به ترتیب حداکثر نیروی تماس و حداکثر خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس برحسب کسر حجمی هسته (h_{core}/h) به ازای مقادیر مختلف MVF در رویه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشخص است، با افزایش MVF در رویه‌ها از 0.0

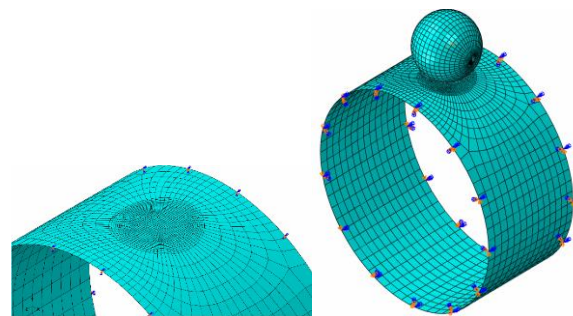


Fig. 6 Modeling of shell and spherical rigid impactor in ABAQUS software.

شکل 6 مدل سازی پوسته و ضربه زننده صلب کروی در نرم افزار ABAQUS.

جدول 3 هندسه و جنس پوسته ساندویچی FML/هسته/FML با هسته P-FGM و ضربه زننده صلب.

Table 3 Geometry and material of FML/هسته/FML sandwich shell with P-FGM core and rigid impactor.

Ti/C 2/1 [0/90/0], MVF = 0.7	رویه‌ها (facesheets)	
FGM با ساختار متقارن تیتانیوم-تیتانیوم بوراید-تیتانیوم	هسته (core)	پوسته
(Ti-TiB-Ti) با کسر حجمی 30 درصد یا $h_{core}/h = 0.3$	هندسه (استوانه)	
$R = 1m, L = 1m, h = 0.05m$	هندسه (کروی)	ضربه
$R_i = 0.3m$	جرم و سرعت	زننده
متغیر m_i و $v_0 = 3m/s$		

برای مدل سازی پوسته کامپوزیتی از المان S4R دارای 4 گره با شش درجه آزادی در هر گره و برای مدل سازی ضربه زننده از المان‌های صلب R3D4 و R3D3 به ترتیب با 4 و 3 گره با سه درجه آزادی در هر گره استفاده شده است. سپس مش بندی پوسته و ضربه زننده مطابق شکل 6 انجام پذیرفته است.

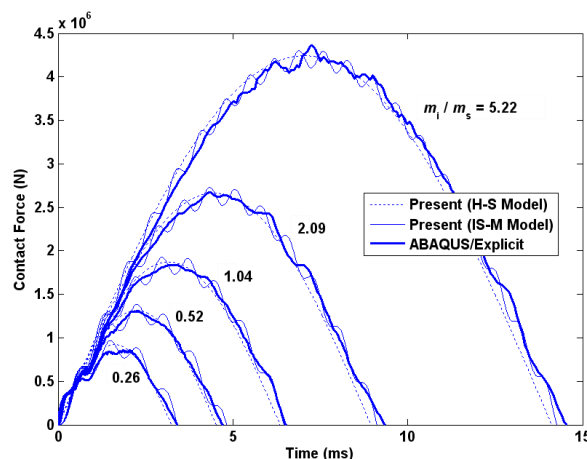


Fig. 7 Comparison of the history of the impact force caused by the impact of a rigid impactor on the FML/core/FML sandwich shell with Ti/C 2.1 [0.90] (MVF = 0.7) skins, and the FGM core with the structure Symmetric Ti-TiB-Ti for different values of mass ratio $m_i/m_s, h_{core}/h=0.3, N=1, L/R=1$.

شکل 7 مقایسه تاریخچه نیروی ضربه ناشی از برخورد ضربه زننده صلب به پوسته ساندویچی FML/هسته/FML با رویه‌های Ti/C 2/1 [0/90/0] (MVF=0/7) و هسته FGM با ساختار متقارن Ti-TiB-Ti به ازای مقادیر مختلف نسبت جرمی $L/R=1, N=1, h_{core}/h=0.3, m_i/m_s$

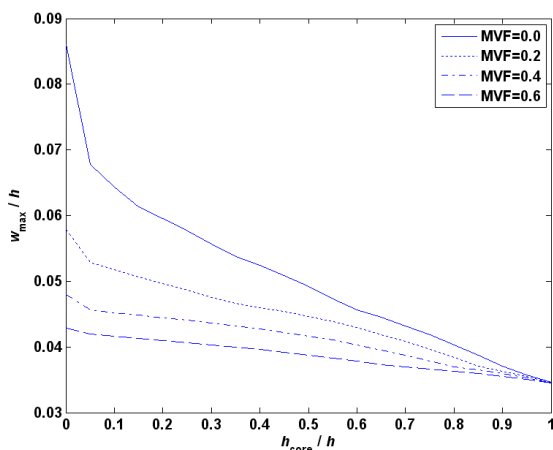


Fig. 11 The maximum buoyancy of the inner surface of the shell under the contact point in terms of core volume fraction (h_{core}/h) for different values of MVF in the skins ($m_i=1282.7$ kg, $v_0=1$ m/s and $N=10$).

شکل 11 حداکثر خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس برحسب کسر حجمی هسته (h_{core}/h) به ازای مقادیر مختلف MVF در رویه‌ها ($m_i=1282.7$ kg, $v_0=1$ m/s, $N=10$) و $v_0=1$ m/s.

با توجه به شکل 10، با افزایش MVF از 0.0 تا 0.6، حداکثر نیروی تماس در $h_{core}/h=0$ حدود 2.01 برابر افزایش یافته است. همچنین با توجه به شکل 11، با افزایش MVF از 0.0 تا 0.6، حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس در $h_{core}/h=0$ حدود 1.84 برابر کاهش یافته است. با افزایش h_{core}/h اثر MVF بر حداکثر نیروی تماس و حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس کاهش می‌یابد و در $h_{core}/h=1$ این اثر به صفر می‌رسد.

3-7- اثر نمای قانون توانی (N) هسته P-FGM

در شکل‌های 12 و 13 تغییرات به ترتیب حداکثر نیروی تماس و حداکثر خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس برحسب نمای قانون توانی (N)، به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی هسته (h_{core}/h)، مورد بررسی قرار گرفته است.

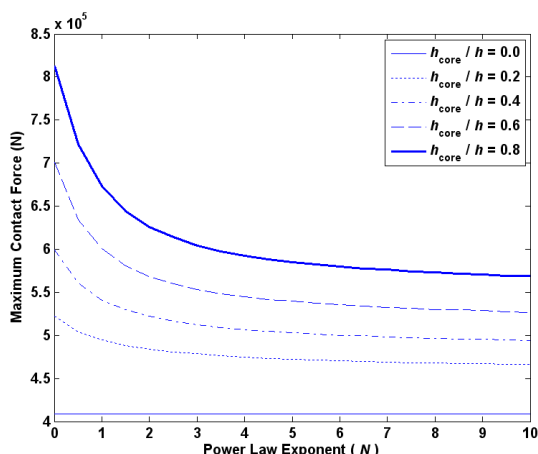


Fig. 12 Maximum contact force in terms of power law (N) for different values of core volume fraction (h_{core}/h) (metal volume fraction in skins $MVF = 0.2$, $m_i = 1282.7$ kg, $v_0 = 1$ m/s).

شکل 12 حداکثر نیروی تماس برحسب نمای قانون توانی (N) به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی هسته (h_{core}/h) (کسر حجمی فلز در رویه‌ها $MVF=0.2$ ، $v_0=1$ m/s, $m_i = 1282.7$ kg).

تا 0.6، تغییرات شیب در مقادیر h_{core}/h کمتر از 0.1 کاهش یافته، منحنی‌های تغییرات حداکثر نیروی تماس و حداکثر خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس برحسب h_{core}/h ، به صورت هموار در آمده‌اند.

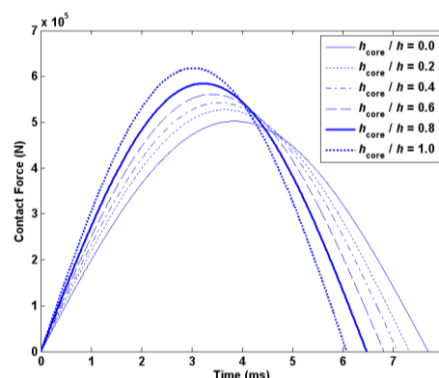


Fig. 8 Comparison of the history of the impact force for different values of core volume fraction h_{core}/h (volume fraction of metal in the skins $MVF=0.5$, $N=10$).

شکل 8 مقایسه تاریخچه نیروی ضربه به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی هسته (h_{core}/h) (کسر حجمی فلز در رویه‌ها $MVF=0.5$ ، $N=10$).

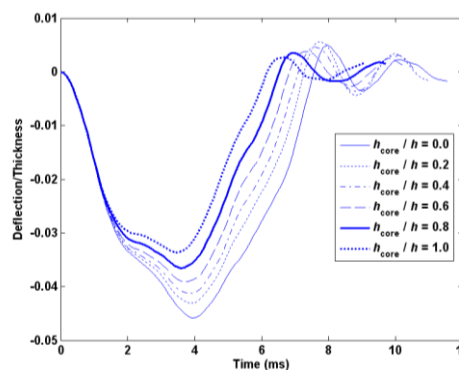


Fig. 9 Comparison of the history of the crust under the contact point for different values of the core volume fraction h_{core}/h (metal volume fraction in the skins $MVF = 0.5$, $N = 10$).

شکل 9 مقایسه تاریخچه خیز پوسته در زیر نقطه تماس به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی هسته (h_{core}/h) (کسر حجمی فلز در رویه‌ها $MVF=0.5$ ، $N=10$).

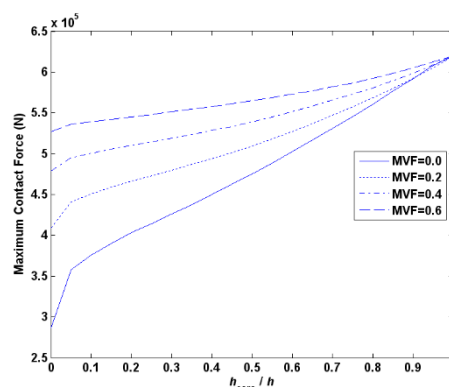


Fig. 10 Maximum contact force in terms of core volume fraction (h_{core}/h) for different values of MVF in skins ($m_i = 1282.7$ kg, $v_0 = 1$ m/s and $N = 10$).

شکل 10 حداکثر نیروی تماس برحسب کسر حجمی هسته (h_{core}/h) به ازای مقادیر مختلف MVF در رویه‌ها ($m_i = 1282.7$ kg, $v_0 = 1$ m/s و $N=10$).

می‌شود [25]. به‌عنوان مثال، در مرجع [25] ضربه بر روی یک تیر ساندویچی با هسته FGM مورد بررسی قرار گرفته است.

برای محاسبه ماتریس سفتی در پوسته‌ها یا هسته‌های FGM، ابتدا ماده FG به تعداد کافی زیرلایه ایزوتروپیک با خواص معادل، در امتداد ضخامت پوسته یا هسته تقسیم شده است. برای اطمینان از کافی بودن تعداد این زیرلایه‌ها، مطالعه همگرایی جواب (در مورد فرکانس طبیعی یا خیز پوسته) صورت پذیرفته است. سپس خواص ماده ایزوتروپیک متناظر با هر لایه جایگذاری شده، درایه‌های ماتریس سفتی نظیر هر لایه محاسبه شده است. از این ماتریس‌ها در محاسبه انتگرال‌های مربوط به منته‌های تنش استفاده شده است.

8- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با ارتقای دقت تئوری‌های موجود، تئوری پوسته‌های استوانه‌ای جدید توسعه داده شده است که می‌تواند رفتار دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای را بهتر پیش‌گویی کند. همچنین، پس از مطالعه پژوهش‌های گذشته راجع به انواع مدل‌های ضربه مورد استفاده برای مطالعه ضربه عرضی روی سازه‌های کامپوزیتی، در این پژوهش بر اساس مدل‌های ضربه موجود، به ارائه مدل‌های جدید، ساده و مهندسی برای محاسبه تاریخچه نیروی تماس ناشی از ضربه عرضی بر روی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی پرداخته شده است.

بر اساس نتایج و بحث‌های ذکر شده، مهم‌ترین نتایج و دستاوردهای کاربردی مبتنی بر نوآوری‌های پژوهش حاضر را می‌توان به‌طور مختصر در موارد زیر خلاصه کرد:

- مدل H-S نسبت به مدل IS-M در پیش‌گویی حداکثر نیروی تماس از قابلیت اعتماد بیشتری برخوردار است. ولی مدل IS-M نسبت به مدل H-S در پیش‌گویی مدت‌زمان تماس از قابلیت اعتماد بیشتری برخوردار است.
- مدل IS-M از مدل H-S ساده‌تر است و کارایی آن در محاسبات با حجم بالا مانند فرآیندهای بهینه‌سازی، جایی که زمان صرف شده برای پردازش اطلاعات از اولی‌تین بالاتر برخوردار است، مناسب‌تر است. بعلاوه، یکی از ویژگی‌های مدل IS-M در مقایسه با مدل H-S، این است که علاوه بر محاسبه نیروی تماس، امکان محاسبه هم‌زمان خیز پوسته در نقطه زیرین محل برخورد نیز وجود دارد.
- هر چه مقدار نسبت جرمی m_i/m_s بیشتر می‌شود، ماهیت شبه استاتیکی بر رفتار ضربه غالب شده، اختلاف بین نتایج دو مدل H-S و IS-M با نتایج حلگر صریح² آباکوس کاهش می‌یابد.
- در نظر گرفتن عبارتهای $(1+z/R)$ سبب افزایش همه مقادیر حداکثر کرنش تا بیش از 2% (مربوط به کرنش محیطی به ازای $N=1$) شده است.
- با افزایش h_{core}/h حداکثر نیروی تماس حدود 1.23 برابر افزایش یافته و همچنین حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس حدود 1.36 برابر کاهش یافته است.
- با افزایش MVF حداکثر نیروی تماس در حدود 2.01 برابر افزایش یافته است. همچنین حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس حدود 1.84 برابر کاهش یافته است. با افزایش h_{core}/h

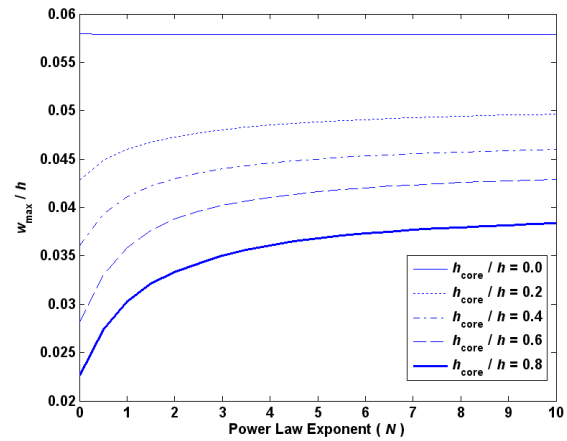


Fig. 13. The maximum internal surface tension of the shell under the contact point in terms of power law (N) for different values of the core volume fraction (h_{core}/h) (MVF=0.2, $m_i=1282/7$ kg, $v_0 = 1$ m/s).

شکل 13 حداکثر خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس برحسب نمای قانون توانی (N) به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی هسته (h_{core}/h) (کسر حجمی فلز در رویه‌ها $v_0 = 1$ m/s, $m_i = 1282.7$ kg, MVF=0.2).

با توجه به شکل 12، با افزایش کسر حجمی هسته (h_{core}/h) از 0.0 تا 0.8، حداکثر نیروی تماس در $N=0$ حدود 1.99 برابر و در $N=10$ حدود 1.39 برابر افزایش یافته است. همچنین با توجه به شکل 13، با افزایش کسر حجمی هسته (h_{core}/h) از 0.0 تا 0.8، حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس در $N=0$ حدود 2.56 برابر و در $N=10$ حدود 1.51 برابر کاهش یافته است. با افزایش مقدار N ، شیب منحنی‌های حداکثر نیروی تماس و حداکثر خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس، به ازای مقادیر h_{core}/h بزرگ‌تر از صفر، به ترتیب افزایش و کاهش یافته، به‌طوری که در $N=10$ شیب این منحنی‌ها به نزدیک صفر رسیده است.

در مدل‌سازی پوسته‌های ساندویچی FML/هسته/FML با هسته FGM، فرض شده است جنس ماده هسته سفت¹ باشد و همراه با رویه‌های بالا و پایین تغییر شکل کلی بدهد. به عبارت دیگر تغییر شکل موضعی رویه‌های بالا و پایین در اثر ضربه، تفاوت‌های ملاحظه‌ای باهم ندارند، برخلاف آنچه در مورد سازه‌های ساندویچی با هسته نرم اتفاق می‌افتد. همچنین فرض شده است که اتصال کامل بین هسته و رویه‌های Ti/C برقرار است. به منظور کاهش جهش در تنش‌های بین لایه‌ای، خواص ماده هسته در محل اتصال به رویه‌ها، هم‌جنس با لایه فلزی رویه در تماس با هسته، یعنی تیتانیوم (Ti)، در نظر گرفته شده است. لذا توزیع ماده هسته از سطح داخل به سمت سطح خارج پوسته به این صورت است که یک پوسته استوانه‌ای از جنس Ti/C به‌عنوان رویه پایینی در سطح داخل قرار گرفته و هسته از جنس ماده FG به صورت یک پوسته استوانه‌ای روی آن قرار گرفته است. این پوسته FGM دارای ساختار متقارن است. به نحوی که خواص ماده آن، از سطح داخل (تیتانیوم Ti) تدریجاً به سمت سطح میانی (سرامیک TiB) تغییر می‌کند و از این سطح نیز تا سطح خارجی، خواص ماده تدریجاً به تیتانیوم تغییر می‌یابد. آنگاه یک پوسته استوانه‌ای نازک دیگر، با لایه چینی یکسان با رویه پایینی، به‌عنوان رویه بالایی روی هسته استوانه‌ای قرار گرفته است. از هسته‌های FGM در سیستم‌های محافظ حرارتی (TPS2) با ساختار ساندویچی استفاده

² Explicit

¹ - Hard Core

- [15] Zhao, G., Hooman, M., Yarigarravesh, M., Algarni, M., Opulencia, M.J.C., Alsaikhan, F., Jalil, A.T., Mohamed, A., AboRas, K.M., Rahman, M.L. and Sarjadi, M.S., "Vibration analysis of size dependent micro FML cylindrical shell reinforced by CNTs based on modified couple stress theory". *Arabian Journal of Chemistry*, 15(10), p.104115, 2022.
- [16] Suresh S., Mortensen A., "Fundamentals of functionally graded materials", London, UK: IOM Communications Limited, 1998.
- [17] Rao S.S., "Mechanical vibrations", 2nd edition, Addison Wesley, 1990.
- [18] Gong S.W., "A study of impact on composite laminated shells", Ph.D. Dissertation, National University of Singapore, 1995.
- [19] Chandrashekhara K., Schroeder T., "Nonlinear impact analysis of laminated cylindrical and doubly curved shells", *Journal of Composite Materials*, Vol. 29, pp. 2160-2179, 1995.
- [20] Kistler L.S., Waas A.M., "Impact response of cylindrically curved laminates including a large deformation scaling study", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 21, No. 1-2, pp. 61-75, 1998.
- [21] Ganapathy S., Rao K.P., "Interlaminar stresses in laminated composite plates cylindrical spherical shell panels damaged by low velocity impact", *Composite Structures*, Vol. 38, No. 1-4, pp. 157-168, 1997.
- [22] Matemilola S.A., Stronge W.J., "Impact response of composite cylinders", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 21, pp. 2669-2684, 1997.
- [23] Christoforou A.P., Swanson S.R., "Analysis of simply-supported orthotropic cylindrical shells subjected to lateral impact loads", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, Issue 2, pp. 376-382, 1990.
- [24] Shivakumar K.N., Elber W., Ilg W., "Prediction of impact force and duration due to low-velocity impact on circular composite laminates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 674-680, 1985.
- [25] Apetre N.A., Sankar B.V., Ambur D.R., "Low-velocity impact response of sandwich beams with functionally graded core", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 2479-2496, 2006.
- [26] Choi I.H., Hong C.S., "New approach for simple prediction of impact force history on composite laminates", *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 10, pp. 2067-2072, 1994.
- [27] Choi I.H., Lim C.H., "Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law", *Composite Structures*, Vol. 66, pp. 125-132, 2004.
- [28] Yang S.H., Sun C.T., "Indentation law for composite laminates", In *Composite Material: Testing and Design*, pp. 425-449, ASTM STP 787, Philadelphia PA, 1982.
- [29] Greszczuk L.B., "Impact Dynamics", John Wiley & Sons, pp. 55-94, New York, 1982.
- [30] Pashah S., Massenzio M., Jacquelin E., "Prediction of structural response for low velocity impact", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 35, pp. 119-132, 2008.
- [31] Soedel W., "Vibrations of shells and plates", 3rd Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker, Inc., New York, 2004.
- [32] Zhou D.W., Stronge W.J., "Low velocity impact denting of HSSA lightweight sandwich panel", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, pp. 1031-1045, 2006.
- [33] Swanson S.R., "Limits of quasi-static solutions in impact of composite structures", *Composites Engineering*, Vol. 2, No. 4, pp. 261-267, 1992.
- [34] Abrate S., "Impact on composite structures", Cambridge University Press, US, 1998.
- [35] Khalili S.M.R., Mittal R.K., Mohammad Panah N., "Analysis of fiber reinforced composite plates subjected to transverse impact in the presence of initial stresses", *Composite Structures*, Vol. 77, pp. 263-268, 2007.

MVF بر حداکثر نیروی تماس و حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس کاهش می‌یابد و در $h_{core}/h = 1$ این اثر به صفر می‌رسد.

- با افزایش کسر حجمی هسته (h_{core}/h) حداکثر نیروی تماس افزایش یافته است. همچنین حداکثر خیز پوسته در زیر نقطه تماس کاهش یافته است. با افزایش مقدار N ، شیب منحنی‌های حداکثر نیروی تماس و حداکثر خیز سطح داخلی پوسته در زیر نقطه تماس، به ازای مقادیر h_{core}/h بزرگ‌تر از صفر، به ترتیب افزایش و کاهش یافته، به طوری که در $N=10$ شیب این منحنی‌ها به نزدیک صفر رسیده است.

9- مراجع

- [1] Gong S.W., Lam K.Y., "Rotating multilayered cylindrical shells to impact loading", *AIAA Journal*, Vol. 41, No. 1: Technical Notes, pp. 139-142, 2002.
- [2] Krishnamurthy K.S., Mahajan P., Mittal R.K., "Impact response and damage in laminated composite cylindrical shells", *Composite Structures*, Vol. 59, pp. 15-36, 2003.
- [3] Dubinin V.V., Bannikov S.N., "The experimental investigation of the impact of a particle or a rigid body on a cylindrical shell", *Progress in Nuclear Energy*, Vol. 43, No. 1-4, pp. 253-260, 2003.
- [4] Tsunokake H., Kobayashi H., Araki H., "Impact response of transversely isotropic circular cylindrical shells", *Structures and Materials*, Vol. 15, Structures Under Shock and Impact VIII, pp. 485-493, 2004.
- [5] Gning P.B., Tarfaoui M., Collombet F., Davies P., "Prediction of damage in composite cylinders after impact", *Journal of Composite Materials*, Vol. 39, No. 10, pp. 917-928, 2005.
- [6] Jafari A.A., Khalili S.M.R., Azarafza R., "Transient dynamic response of composite circular cylindrical shells under radial impulse load and axial compressive loads", *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, pp. 1763-1786, 2005.
- [7] Azarafza R., "Weight and dynamic optimization of multi-layer composite cylindrical shells", PhD thesis, Khajeh Nasiruddin Toosi University of Technology, Tehran, Iran, 2014, In persian.
- [8] Kumar S., Nageswara Rao B., Pradhan B., "Effect of impactor parameters and laminate characteristics on impact response and damage in curved composite laminates", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 26, No. 13, pp. 1273-1290, 2007.
- [9] Khalili S.M.R., Azarafza R., Davar A., "Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shells under radial impulse load", *Composite Structures*, Vol. 89, pp. 275-284, 2009.
- [10] Ahmadi I., Sadighi M., "Finite element analysis of low-velocity impact on functionally graded cylindrical shell", 17th Annual (International) Conference on Mechanical Engineering, Tehran University, Tehran, Iran, Paper code: ISME-2009-2520, May 19-21 2009.
- [11] Setoodeh A., Enferadi M., "Effect of structural damping on dynamic response of laminated cylindrical shell subjected to low velocity impact", 17th Annual (International) Conference on Mechanical Engineering, Tehran University, Tehran, Iran, Paper code: ISME-2009-1722, May 19-21 2009.
- [12] Rahmani O., Khalili S.M.R., Malekzadeh K., "Free vibration response of composite sandwich cylindrical shell with flexible core", *Composite Structures*, Vol. 92, pp. 1269-1281, 2010.
- [13] Bayat M.R., Rahmani O., Mousavi Mashhadhi M., "dynamic analysis of composite cylinders reinforced with carbon nanotubes under low speed impact", 24th annual international conference of mechanical engineering of Iran, Yazd, May 2015, In persian.
- [14] Mamandi A., Salimzadeh M., "Analysis of nonlinear vibrations of composite cylindrical shell with internal pressure against low speed impact using analytical methods and finite elements", *Aerospace Mechanics*, Volume 16, Number 3, pp. 59-73, 2019, In persian.