Journal of Structural and Construction Engineering, 10(6), 2023, pp. 149-169

Journal of Structural and Construction Engineering

www.jsce.ir

Non-harmonic resonance of viscoelastic beam under time decreasing dynamic transverse load, with compressive axial load

Armin Hatefniya[1], Nasrin Jafari[2]

1- MSc of Structural Engineering, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
2- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

ABSTRACT

In this article, the analysis of a simply supported viscoelastic Bernoulli beam under a dynamic transverse loading combined with a compressive axial load was discussed. The applied dynamic transverse load was considered a non-harmonic load with an exponential decreasing function over time, and the applied axial load was considered constant compressive. This study investigated the effect of a specific decreasing transverse load and introduced, formulated, and proved the phenomenon of non-harmonic resonance of the viscoelastic beam, for the first time. The stress-strain relationship of the linear viscoelastic material was expressed according to the Boltzmann integral law. The relaxation function of the viscoelastic material was defined based on two terms of the Prony series. The displacement field was approximated by the product of two functions, a known spatial function and a time function with unknown coefficients. Using the principle of virtual work, the formulation of the viscoelastic beam was extracted. Then, utilizing the Laplace transform, the unknown coefficients of the time function were calculated. Finally, the displacement field of the viscoelastic beam was expressed in the time and space domains. To validate the results, Abaqus software was used for beam modeling. In the numerical results section, the effect of different viscoelastic material parameters and different loads on the displacement of the viscoelastic beam was investigated. Also, the occurrence time of the non-harmonic resonance, and the ratio of the maximum displacement at the resonance time to the displacement at time zero were calculated.

ARTICLE INFO

Receive Date: 29 July 2022
Revise Date: 12 October 2022
Accept Date: 23 November 2022

Keywords:
Axial compressive load
Boltzmann integral
Dynamic transverse load
Non-harmonic resonance
Time function
Viscoelastic Bernoulli Beam

doi: https://doi.org/10.22065/jsce.2022.353305.2887

*Corresponding author: Nasrin Jafari
Email address: jafarin@iut.ac.ir

Journal of Structural and Construction Engineering
JSCE
نشریه علمی-پژوهشی مهندسی سازه و ساخت

نشریه مهندسی سازه و ساخت
(علمی – پژوهشی)
www.jsce.ir

ISSE

عرضی دینامیکی کاهشی در طول تشدید غیرهارمونیک تیر ویسکوالاستیک تحت بار زمان، توأم با بار محوری فشاری

آرمین هاتف نیا[1]، نسرین جعفری[2]*

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده

در این مقاله به تحلیل تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت یک بارگذاری عرضی دینامیکی توأم با بار محوری فشاری پرداخته شد. بار عرضی دینامیکی اعمالی به صورت یک بار غیر هارمونیک، دارای تابع نمایی و کاهشی در طول زمان، و بار محوری اعمالی به صورت فشاری و ثابت در نظر گرفته شد. این مطالعه برای اولین بار تأثیر یک بار عرضی نمایی کاهشی خاص را مورد بررسی قرار داد و پدیده تشدید غیر هارمونیک تیر ویسکوالاستیک را معرفی، فرمول بندی و اثبات کرد. رابطه‌ی تنش-کرنش ماده ویسکوالاستیک خطی درنظرگرفته شده، طبق انتگرال بولتزمن بیان شد. تابع آسودگی ماده ویسکوالاستیک بر اساس دو جمله از سری پرونی تعریف شد. میدان جابجایی بر حسب حاصل ضرب دو تابع، یک تابع مکانی معلوم و یک تابع زمانی دارای ضرایب مجهول تقریب زده شد. با استفاده از رابطه ی کار مجازی، فرمول بندی تیر ویسکوالاستیک استخراج شد و سپس به کمک تبدیل لاپلاس، ضرایب مجهول تابع زمان محاسبه گردید. در نهایت میدان جابجایی تیر ویسکوالاستیک بصورت صریح در حوزه زمان و مکان بیان شد. به منظور صحت سنجی نتایج، از مدلسازی تیر مربوطه توسط نرم افزار آبکوس استفاده شد. در قسمت نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف ماده ویسکوالاستیک و بارگذاری‌های مختلف بر روی جابجایی تیر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفت. همچنین زمان وقوع پدیده تشدید غیر هارمونیک، و نسبت دامنه بیشترین جابجایی در لحظه تشدید به جابجایی در لحظه صفر محاسبه گردید.

کلمات کلیدی: انتگرال بولتزمن، بار عرضی دینامیکی ، بار محوری فشاری، تابع زمان، تشدید غیرهارمونیک، تیر برنولی ویسکوالاستیک

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	https://doi.org/10.22065/jsce.2022.353305.2887	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	10.22065/jsce.2022.353305.2887	۱۴۰۲/۰۶/۳۱	۱۴۰۱/۰۹/۰۲	۱۴۰۱/۰۹/۰۲	۱۴۰۱/۰۷/۲۰	۱۴۰۱/۰۵/۰۷

*نویسنده مسئول: نسرین جعفری
پست الکترونیکی: jafarin@iut.ac.ir

۱- مقدمه

تاکنون در مقالات متعددی، تحلیل های استاتیکی، کمانش و ارتعاش برای تیر برنولی ویسکوالاستیک بررسی شده است. رنسیس و همکاران [۱] یک مدل المان محدود برای تیر برنولی ویسکوالاستیک با رویکرد نموی ارائه دادند که در آن تغییرات کرنش خزشی در طول یک گام زمانی بعنوان نیروهای فرضی برای گام بعدی در نظر گرفته می‌شد. وانگ و همکاران [۲] بر اساس روابط موجود در تئوری های تیر برنولی و تیموشنکو، رابطه‌ای بین خمش و برش این دو نوع تیر با خواص ویسکوالاستیک تحت بار شبه استاتیکی بدست آوردند، سپس به کمک تبدیل لاپلاس و معکوس آن، رابطه‌ای برای خیز بین آنها در حوزه زمان ارائه دادند. کوجاتورک و شیمشک [۳] به بررسی ارتعاش عرضی یک تیر برنولی ویسکوالاستیک با تکیه گاه‌های میانی تحت بار هارمونیک متحرک پرداختند. صالحی و انصاری [۴] به بررسی کمانش تیرهای برنولی و تیموشنکو با خواص ویسکوالاستیک خطی پرداختند. ایشان هر دو شکل دیفرانسیلی و انتگرالی معادلات حاکم بر تیرها را بدست آوردند. اما فقط به حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تکنیک عددی تفاضل محدود با فرض مدل ویسکوالاستیک ماده به صورت جامد کلوین پرداختند. استارکووا و انیسکویچ [۵] به بررسی محدودیت‌های رفتار مواد ویسکوالاستیک خطی پرداختند. ایشان داده های تجربی را در زمینه کشش و خزش کششی با نرخ‌های مختلف کرنش ثابت و تحت شرایط مختلف اعم از تنش، دما و رطوبت استخراج کردند. ارول و همکاران [۶] به تحلیل استاتیکی تیر برنولی ویسکوالاستیک به روش اجزا محدود پرداختند. ایشان رفتار وابسته به زمان مواد را به کمک سری پرونی بیان کردند و برای تشکیل فرمول بندی المان محدود از توابع شکل خطی استفاده کردند. آروین و همکاران [۷] به بررسی عددی ارتعاش آزاد و اجباری تیر ساندویچی کامپوزیت با هسته ویسکوالاستیک پرداختند. ایشان تئوری مرتبه بالاتر تیر ساندویچی با وجوه مرکب و هسته ویسکوالاستیک را با در نظر گرفتن جابجایی‌های عرضی مستقل در دو وجه و تغییرات خطی در عمق هسته تیر، با فرضیات برنولی استخراج کردند. پایت و ردی [۸] به فرمول بندی المان محدود شبه استاتیکی غیرخطی برای تیرهای برنولی و تیموشنکوی ویسکوالاستیک پرداختند. ایشان از مدل‌های المان محدود با فرم ضعیف برای خمش شبه استاتیکی غیرخطی و از اصل کار مجازی برای توسعه روابط استفاده کردند. همچنین خواص مکانیکی تیرهای ویسکوالاستیک را خطی در نظر گرفتند. یاو و همکاران [۹] به تحلیل شبه استاتیکی تیر برنولی ویسکوالاستیک توسط مشتق کسری مدل ویسکوالاستیک کلوین تحت بار جانبی پله‌ای پرداختند. لی و همکاران [۱۰] به تحلیل رفتار وابسته به زمان تیرهای چند لایه با لایه میانی ویسکوالاستیک پرداختند. ایشان برای یک مدل ساده، مواد ویسکوالاستیک را بوسیله مدل استاندارد خطی جامد و برای مدول الاستیک هر لایه، تغییرات خطی را بواسطه ضخامت تحت یک بار یکنواخت توزیع شده ثابت نشان دادند. مارتین [۱۱] یک روش تکرار تغییرات اصلاح شده را برای تحلیل تیر برنولی ویسکوالاستیک معرفی کرد. او از انتگرال ارثی برای رابطه تنش-کرنش مواد ویسکوالاستیک استفاده کرد. همچنین از روش گالرکین و شکل اصلاح شده روش تکرار متغیر برای حل معادلات حوزه زمان استفاده نمود. یو و همکاران [۱۲] روش جدیدی برای حل معادلات تشکیل دهنده تیرهای برنولی ویسکوالاستیک مرتبه کسری ارائه دادند. ایشان معادله سازنده تیر برنولی ویسکوالاستیک را با استفاده از یک چند جمله‌ای لژاندر در حوزه زمان به یک معادله ماتریسی تبدیل کردند. همچنین جابجایی تیر را تحت بارهای عرضی پله‌ای و هارمونیک مورد بررسی قرار دادند. وانگ و همکاران [۱۳] تیر برنولی ویسکوالاستیک را از لحاظ جابجایی، تغییر شکل و تنش تحت بار شبه استاتیکی و شرایط مرزی مختلف بررسی کردند. ایشان مدل‌های رئولوژیکی ساختاری کسری مختلف تیر برنولی ویسکوالاستیک را بر اساس مدل مشتق کسری کلوین-ویت ایجاد کردند. پنگ وو و همکاران [۱۴] به تحلیل دقیق تیرهای دو سر مفصل چندلایه با لایه میانی ویسکوالاستیک جهت پیش بینی رفتار مکانیک آن پرداختند. ایشان خاصیت ویسکوالاستیک لایه میانی را توسط مدل جامد خطی استاندارد شبیه‌سازی نمودند و رابطه سازنده آن را بصورت انتگرال کانولوشن بیان کردند. جولی [۱۵] ارتعاش آزاد تیر ویسکوالاستیک خطی یک سر گیردار را با فرض تئوری برنولی بررسی کرد. او به بررسی تأثیر پارامترهای ماده و هندسه تیر بر ارتعاش آزاد تیر برنولی ویسکوالاستیک پرداخت. فیلیپی و کارِرا [۱۶] به بررسی تیر ویسکوالاستیک به روش اجزا محدود بر اساس مفروضات سینماتیکی مختلف پرداختند. ایشان رابطه تنش- کرنش و خواص ماده ویسکوالاستیک را به ترتیب براساس انتگرال بولتزمن و سری پرونی تعریف کردند. همچنین ایشان معادلات حاکم را در حوزه لاپلاس به دست آوردند و سپس از طریق یک روش وارونگی عددی روابط را در حوزه زمان استخراج کردند.

نشریه علمی - پژوهشی مهندسی سازه و ساخت، دوره ۱۰، شماره ۶، سال ۱۴۰۲، صفحه ۱۴۹ تا ۱۶۹

اما برای حالتی که در تیری تحت بارگذاری عرضی دینامیکی همزمان با بار محوری ثابت، یک تشدید غیر هارمونیک رخ می‌دهد تا کنون تحقیقی صورت نگرفته است. تنها تحقیق انجام شده در این زمینه مربوط به مرجع [۱۷] است که در آن، جعفری به بررسی تشدید غیرهارمونیک تیر برنولی، تیر تیموشنکو و ورق نسبتاً ضخیم ویسکوالاستیک، صرفاً تحت بار عرضی دینامیکی کاهشی نمایی پرداخته است. لذا مقاله حاضر به تحلیل تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل، تحت بار عرضی دینامیکی توأم با بار محوری فشاری ثابت پرداخته است. در این مطالعه برای اولین بار تأثیر یک بار عرضی دینامیکی غیر هارمونیک، که به صورت تابع نمایی و دارای روند کاهشی در طی زمان می‌باشد، توآم با یک بار محوری فشاری بر روی جابجایی تیر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفت. همچنین پدیده تشدید غیر هارمونیک تیر برنولی ویسکوالاستیک معرفی، فرمول بندی و اثبات شد. به علاوه زمان وقوع پدیده تشدید غیرهارمونیک، و نسبت دامنه بیشترین جابجایی در لحظه تشدید به جابجایی در لحظه صفر محاسبه شد. رابطه‌ی تنش- کرنش طبق انتگرال بولتزمن بیان شد. با تعریف تابع آسودگی بصورت دو جمله از سری پرونی و ثابت فرض کردن مدول بالک، روابط مدول الاستیسیته و ضریب پواسون در حوزه زمان تعیین شد. با تقریب میدان جابجایی بر حسب حاصل ضرب دو تابع، یک تابع مکانی معلوم و یک تابع زمانی دارای ضرایب مجهول، و با استفاده از رابطه‌ی کار مجازی فرمول بندی تیر برنولی ویسکوالاستیک در حوزه زمان استخراج شد. سپس به کمک تبدیل لاپلاس و متحد قراردادن جملات، ضرایب مجهول تابع زمان محاسبه شد و میدان جابجایی تیر برنولی ویسکوالاستیک بصورت صریح در حوزه زمان استخراج شد. برای صحت سنجی نتایج از مدلسازی تیر توسط نرم افزار آبکوس استفاده گردید. در قسمت نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف ماده ویسکوالاستیک و بارگذاری بر روی جابجایی تیر ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفت.

در قسمت ۲ ابتدا به استخراج میدان جابجایی تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بار عرضی استاتیکی و بار محوری ثابت پرداخته می‌شود. سپس میدان جابجایی تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بار عرضی دینامیکی و بار محوری ثابت استخراج می‌شود. در قسمت ۳ صحت سنجی و تحلیل نتایج ارائه می‌شود. و در نهایت در قسمت ۴ به جمع بندی و نتیجه‌گیری مقاله پرداخته می‌شود.

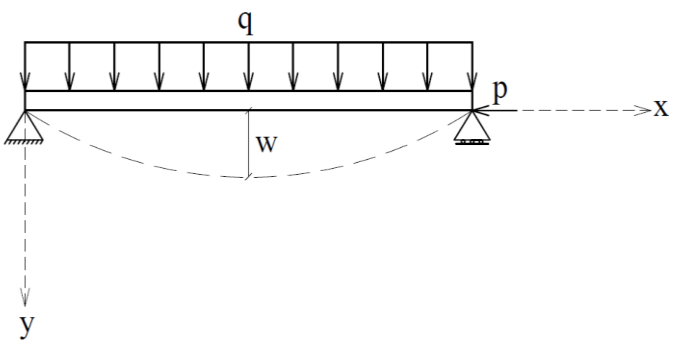
۲- فرمول بندی

۲-۱- تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بار عرضی استاتیکی و بار محوری فشاری ثابت

معادله تیر برنولی تحت بارهای ثابت عرضی و محوری فشاری را می توان بصورت معادله (۱) نوشت [۱۸]:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، M لنگر خمشی، p بار محوری فشاری، m وزن در واحد طول، w خیز تیر و q بار عرضی می‌باشد (شکل ۱).



شکل۱ : تیر تحت بارگذاری عرضی و محوری فشاری .

لنگر خمشی با توجه به رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$M = \int_A \sigma(x,y,t)\, y \mathrm{d}A \qquad (۲)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش مواد ویسکوالاستیک خطی براساس انتگرال بولتزمن به صورت رابطه (۳) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\sigma(x,y,t)=E(t)\varepsilon(0)+\int_0^t E(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \tag{۳}$$

در رابطه (۳)، $E(t)$ مدول الاستیسیته وابسته به زمان می‌باشد.

در تیر برنولی رابطه بین کرنش ε و خیز w بصورت رابطه (۴) نوشته می‌شود:

$$\varepsilon(x,y,t)=-y\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \tag{۴}$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی تیر به صورت تکیه گاه های مفصلی، و با استفاده از روش جداسازی متغیرها، خیز تیر را می‌توان توسط رابطه (۵) بیان کرد:

$$w(x,t)=F(t)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{۵}$$

در رابطه (۵)، $F(t)$ تابع زمان می‌باشد. از آنجایی که هدف این مقاله استخراج صریح تابع زمان می‌باشد، به منظور سادگی محاسبات، تابع مکان به فرم کامل خود یعنی $\sum\sin\frac{\pi x}{l}$ اعمال نشده و فقط ترم اول سری مکانی، $\sin\frac{\pi x}{l}$، در نظر گرفته شده است.

مدول الاستیسیته وابسته به زمان بصورت رابطه (۶) درنظر گرفته می‌شود:

$$E(t)=E_0\omega(t) \tag{۶}$$

در رابطه (۶)، $\omega(t)$ تابع آسودگی ماده ویسکوالاستیک و E_0 مدول الاستیسیته در زمان صفر، $E_0=E(t=0)$، می‌باشد.

تابع آسودگی را می‌توان براساس دو جمله از سری پرونی بصورت زیر نوشت [۲۰]:

$$\omega(t)=c_1+c_2e^{-\lambda t},\qquad c_1+c_2=1,\qquad \lambda=1/t_s \tag{۷}$$

در رابطه (۷)، c_1 و c_2 پارامترهای ثابت و t_s زمان آسودگی ماده ویسکوالاستیک می‌باشد.

با جایگذاری روابط (۶-۲) در رابطه (۱)، رابطه (۸) حاصل می‌شود:

$$\frac{E_0I\pi^4}{l^4}\omega(t)F(0)+\frac{E_0I\pi^4}{l^4}\int_0^t\omega(t-\tau)\dot{F}(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{\pi^2}{l^2}pF(t)+m\ddot{F}(t)=q \tag{۸}$$

در رابطه (۸)، $I=\int_A y^2\mathrm{d}A$ ممان اینرسی تیر می‌باشد.

بار فشاری ثابت بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$p=\alpha_1p_e,\qquad p_e=\frac{\pi^2E_0I}{l^2},\qquad 0\le\alpha_1\le1 \tag{۹}$$

در رابطه (۹)، p_e برابر با بار اویلر در لحظه صفر و α_1 مقداری ثابت می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۸)، رابطه (۱۰) حاصل می‌شود:

$$\omega(t)F(0)+\int_0^t\omega(t-\tau)\dot{F}(\tau)\mathrm{d}\tau-\alpha_1F(t)+\frac{\ddot{F}(t)}{\Omega^2}=q_0 \tag{۱۰}$$

که در آن:

$$q_0=\frac{ql^4}{E_0 I\pi^4},\qquad \Omega^2=\frac{E_0 I\pi^4}{ml^4} \tag{۱۱}$$

رابطه (۱۰) یک معادله ناهمگن می‌باشد. با در نظر گرفتن حل همگن این رابطه دو ریشه نمایی $e^{-s_1 t}$ و $e^{-s_0 t}$ بدست می‌آید. s_1 در پیوست-۱ محاسبه شده است. همچنین s_0 با توجه به مقدار بدست آمده توسط جعفری و ازهری [۲۱] در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه پاسخ حل معادله غیرهمگن (۱۰) بصورت رابطه (۱۲) در نظر گرفته می‌شود:

$$F(t)=Ae^{-s_1 t}+Be^{s_0 t}+C \tag{۱۲}$$

که در آن:

$$s_1=\frac{\lambda(-\alpha_1+c_1)}{1-\alpha_1},\qquad \alpha_1\le c_1 \tag{۱۳}$$

$$s_0=i\omega_0-\alpha_0,\qquad \omega_0=\Omega\sqrt{1-\alpha_1},\qquad \alpha_0=\frac{c_2\lambda}{2(1-\alpha_1)} \tag{۱۴}$$

با قرار دادن $t=0$ در رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$(A+B+C)-\alpha_1(A+B+C)+\frac{1}{\Omega^2}(As_1^2+Bs_0^2)=q_0 \tag{۱۵}$$

از آنجایی که $\lambda \ll \Omega$ و $\alpha_0 \ll \Omega$، با صرفنظر کردن از ترم های $\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right)^2$ و $\left(\frac{\alpha_0}{\Omega}\right)^2$، رابطه (۱۵) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$(A+B+C)-\alpha_1(A+B+C)+B\left(\alpha_1-1-\frac{ic_2\lambda}{\Omega\sqrt{1-\alpha_1}}\right)=q_0 \tag{۱۶}$$

از رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود:

$$B=0,\qquad A+C=\frac{q_0}{1-\alpha_1} \tag{۱۷}$$

همچنین با در نظر گرفتن $t=\infty$ در رابطه (۱۰)، دو ترم اول آن را می‌توان بصورت زیر نوشت [۲۲]:

$$\omega(t)F(0)+\int_0^t \omega(t-\tau)\dot{F}(\tau)\mathrm{d}\tau=\omega(\infty)F(\infty) \tag{۱۸}$$

در نتیجه:

$$Cc_1-C\alpha_1=q_0 \tag{۱۹}$$

با توجه به روابط (۱۹-۱۷) مقادیر ضرایب A و C مطابق زیر بدست می‌آید:

$$A=\frac{-q_0c_2}{(c_1-\alpha_1)(1-\alpha_1)},\qquad C=\frac{q_0}{(c_1-\alpha_1)} \tag{۲۰}$$

با جایگذاری ضرایب در رابطه (۱۲)، تابع زمان به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$F(t)=\frac{-q_0c_2}{(c_1-\alpha_1)(1-\alpha_1)}e^{-s_1 t}+\frac{q_0}{(c_1-\alpha_1)}=\frac{q_0}{(c_1-\alpha_1)}\left(\frac{-c_2}{1-\alpha_1}e^{-s_1 t}+1\right) \tag{۲۱}$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۲۱) در رابطه (۵)، رابطه خیز تیر بدست می‌آید:

$$w(x,t)=\frac{1}{\pi^4}\frac{ql^4}{E_0 I(c_1-\alpha_1)}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\frac{-c_2}{1-\alpha_1}e^{-s_1 t}+1\right) \tag{۲۲}$$

همانطور که ذکر شد تمرکز این مقاله بر روی تابع زمان و استخراج صریح آن است. به همین دلیل در رابطه (۵) به یک ترم از تابع مکان برای تیر دو سر مفصل اکتفا شد. حال اگر در رابطه (۵) تعداد کافی ترم مکانی در نظر گرفته می‌شد ضریب $\frac{5}{384}$ به جای $\frac{1}{\pi^4}$ در رابطه (۲۲) حاصل می‌شد. بنابراین برای افزایش دقت در تابع مکان، با جایگذاری ضریب $\frac{5}{384}$ به جای $\frac{1}{\pi^4}$، رابطه (۲۲) را می توان به صورت رابطه (۲۳) نوشت:

$$w(x,t)=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{E_0 I}\sin\frac{\pi x}{l}\times\frac{1}{c_1-\alpha_1}\left(\frac{-c_2}{1-\alpha_1}e^{-s_1 t}+1\right) \tag{۲۳}$$

۲-۲- تیر برنولی تحت بار عرضی نمایی کاهشی $qe^{-s_1 t}$ و بار محوری فشاری ثابت

در این قسمت به فرمول بندی تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بار عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت پرداخته می‌شود. با توجه به رابطه (۱۳)، در این قسمت با دخالت دادن ضریب s_1 در بار نمایی کاهشی، به بررسی تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بار عرضی نمایی کاهشی $qe^{-s_1 t}$ پرداخته می‌شود.

با جایگذاری روابط (۲) و (۶) در رابطه (۱)، رابطه (۲۴) حاصل می‌شود:

$$\frac{E_0 I\pi^4}{l^4}\omega(t)F(0)+\frac{E_0 I\pi^4}{l^4}\int_0^t\omega(t-\tau)\dot{F}(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{\pi^2}{l^2}pF(t)+m\ddot{F}(t)=qe^{-s_1 t} \tag{۲۴}$$

با جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۲۴)، رابطه (۲۵) به دست می‌آید:

$$\omega(t)F(0)+\int_0^t\omega(t-\tau)\dot{F}(\tau)\mathrm{d}\tau-\alpha_1 F(t)+\frac{\ddot{F}(t)}{\Omega^2}=q_0 e^{-s_1 t} \tag{۲۵}$$

رابطه (۲۵) یک معادله ناهمگن است و پاسخ حل همگن آن همانند پاسخ حل همگن رابطه (۱۰) می‌باشد. از آنجایی که پایه جواب خصوصی رابطه (۲۵) با توجه به تابع سمت راست این معادله، $q_0 e^{-s_1 t}$، از دسته جواب معادله همگن می‌باشد، بایستی جواب خصوصی در کمترین توان از t ضرب شود. در نتیجه پاسخ حل معادله غیرهمگن (۲۵)، بصورت رابطه (۲۶) در نظر گرفته می‌شود:

$$F(t)=Ate^{-s_1 t}+Be^{-s_1 t}+Ce^{s_0 t}+D \tag{۲۶}$$

با لاپلاس گرفتن از رابطه (۲۶)، حاصل می‌شود:

$$\int_0^\infty\omega(t)F(0)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_0^\infty\int_0^t\omega(t-\tau)\dot{F}(\tau)\mathrm{d}\tau e^{-st}\mathrm{d}t-\int_0^\infty\alpha_1 F(t)e^{-st}\mathrm{d}t+\int_0^\infty\frac{\ddot{F}(t)}{\Omega^2}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty q_0 e^{-s_1 t}e^{-st}\mathrm{d}t \tag{۲۷}$$

رابطه (۲۷) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\omega^* sF^*-\alpha_1 F^*+\frac{\ddot{F}^*}{\Omega^2}=\frac{q_0}{s+s_1} \tag{۲۸}$$

با جایگذاری F^* و $\ddot{F}^*$ در رابطه (۲۸)، رابطه (۲۹) حاصل می‌شود:

$$(\omega^* s-\alpha_1)\left(\frac{A}{(s+s_1)^2}+\frac{B}{s+s_1}+\frac{C}{s-s_0}+\frac{D}{s}\right)+\frac{1}{\Omega^2}\left(\frac{As_1^{\,2}}{(s+s_1)^2}-\frac{2As_1}{s+s_1}+\frac{Bs_1^{\,2}}{s+s_1}+\frac{Cs_0^{\,2}}{s-s_0}\right)=\frac{q_0}{s+s_1} \qquad (۲۹)$$

از آنجایی که $\Omega \gg \lambda$ و $\Omega \gg \alpha_0$، با صرفنظر کردن از ترم های $\left(\frac{\lambda}{\Omega}\right)^2$ و $\left(\frac{\alpha_0}{\Omega}\right)^2$، رابطه (۳۰) به دست می‌آید:

$$\left(\frac{s+c_1\lambda}{s+\lambda}-\alpha_1\right)\left(\frac{A}{(s+s_1)^2}+\frac{B}{s+s_1}+\frac{C}{s-s_0}+\frac{D}{s}\right)+C\left(\alpha_1-1-\frac{ic_2\lambda}{\Omega\sqrt{1-\alpha_1}}\right)\frac{1}{s-s_0}=\frac{q_0}{s+s_1} \qquad (۳۰)$$

با بسط دادن رابطه (۳۰) که بسط آن در پیوست -۲ آورده شده است ومتحد قراردادن جملات، ضرایب تابع زمان به صورت رابطه (۳۱) حاصل می‌شود:

$$A=\frac{q_0\lambda c_2}{(-1+\alpha_1)^2},\qquad B=\frac{q_0}{(1-\alpha_1)},\qquad C=0,\qquad D=0 \qquad (۳۱)$$

با جایگذاری ضرایب در رابطه (۲۶)، تابع زمان به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$F(t)=\frac{q_0\lambda c_2}{(-1+\alpha_1)^2}te^{-s_1t}+\frac{q_0}{(1-\alpha_1)}e^{-s_1t}=\frac{q_0}{(1-\alpha_1)}e^{-s_1t}\left(\frac{\lambda c_2}{1-\alpha_1}t+1\right) \qquad (۳۲)$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۳۲) در رابطه (۵)، رابطه خیز تیر به دست می‌آید:

$$w(x,t)=\frac{ql^4}{\pi^4E_0I(1-\alpha_1)}e^{-s_1t}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\frac{\lambda c_2}{1-\alpha_1}t+1\right) \qquad (۳۳)$$

به منظور افزایش دقت در تابع مکان، با جایگذاری $\frac{5}{384}$ به جای $\frac{1}{\pi^4}$ رابطه (۳۴) بدست می‌آید:

$$w(x,t)=\left(\frac{5}{384}\frac{ql^4}{E_0I}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\times\left(\frac{e^{-s_1t}}{1-\alpha_1}\left(\frac{\lambda c_2}{1-\alpha_1}t+1\right)\right) \qquad (۳۴)$$

۳- نتایج

در این بخش نمودارهای جابجایی-زمان خیز وسط دهانه تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارهای عرضی و فشاری ثابت و همچنین تحت بار عرضی نمایی کاهشی و فشاری ثابت، با توجه به روابط (۲۳) و (۳۴) استخراج شده‌اند.

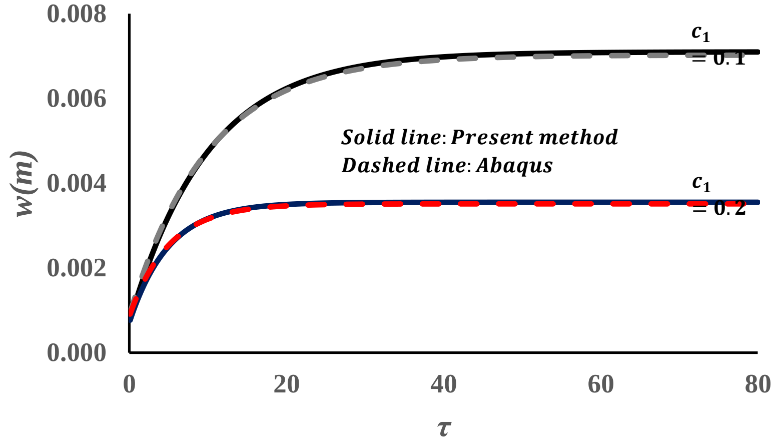
تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل بصورت قوطی شکل (گرم نورد شده) در نظر گرفته شد و مقطع $0.4\times0.4m$ با ضخامت $0.01m$ و طول $4m$ برای آن در نظر گرفته شد. سایر اطلاعات به شرح زیر است:

$$K=8\times10^9\,\frac{N}{m^2},\qquad q=2\times10^3\,\frac{N}{m},\qquad t_s=1s$$

۳-۱- صحت سنجی

جهت صحت سنجی روابط (۲۳) و (۳۴) برای تیر برنولی ویسکوالاستیک از تحلیل تیر توسط نرم افزار آبکوس استفاده گردید. نرم افزار آبکوس برای تحلیل مکانی از روش اجزا محدود استفاده می کند. همچنین این نرم افزار، برای تحلیل زمانی در یک بازه زمانی مشخص، بازه زمانی را به چند نمو زمانی تقسیم می‌کند و به کمک روشهای تکرار به حل هر نمو زمانی می‌پردازد. در مدلسازی آبکوس برای حالت بارگذاری عرضی و فشاری ثابت از ۸ المان و برای بار عرضی نمایی کاهشی و فشاری ثابت از ۲ المان برای مش بندی تیر برنولی ویسکوالاستیک استفاده شده است. همچنین خواص ماده برای مدل ویسکوالاستیک در لحظه بی نهایت و حالت *Long term* به نرم افزار معرفی شده‌اند .

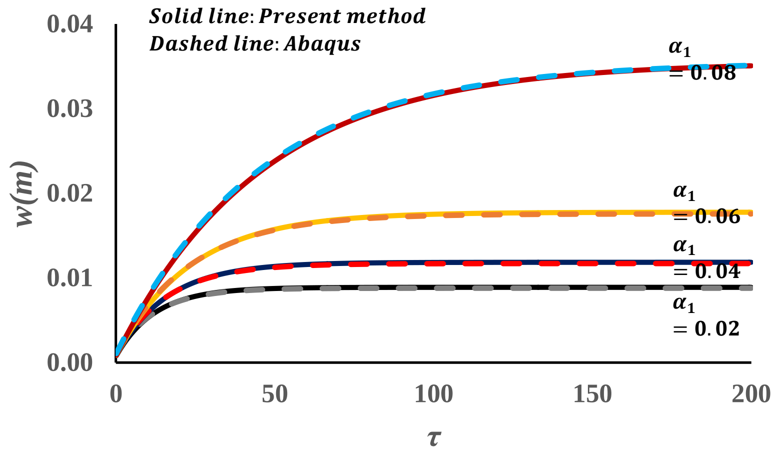
شکل ۲ نشان دهنده نمودارهای جابجایی-زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارگذاری عرضی ثابت به ازای c_1 های مختلف می‌باشد.



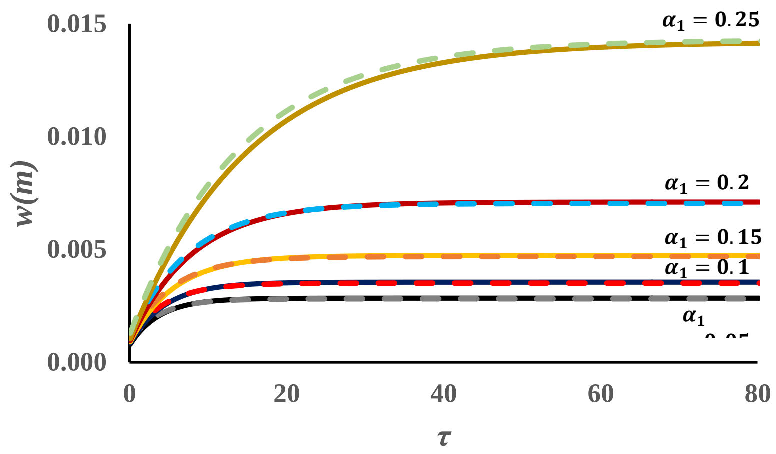
شکل ۲ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی ثابت.

همان طور که مشاهده می‌شود نمودارهای جابجایی–زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی ثابت، بدست آمده از رابطه (۲۳) و مدل سازی با آبکوس، کاملاً با هم مطابقت دارند.

شکل‌های ۳ و ۴ نشان دهنده نمودارهای جابجایی-زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارگذاری عرضی و فشاری ثابت به ازای c_1 های ۰/۱ و ۰/۳ و α_1 های مختلف می‌باشند.



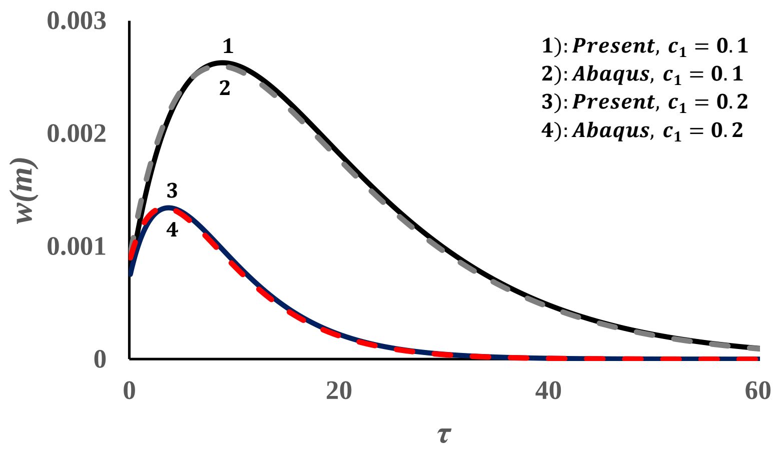
شکل ۳ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.1$.



شکل۴ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.3$.

همان طور که مشاهده می شود نمودارهای جابجایی–زمان بدست آمده از رابطه (۲۳) برای تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی و فشاری ثابت، مطابقت بسیار خوبی با نتایج به دست آمده از تحلیل با نرم افزار ابکوس دارند.

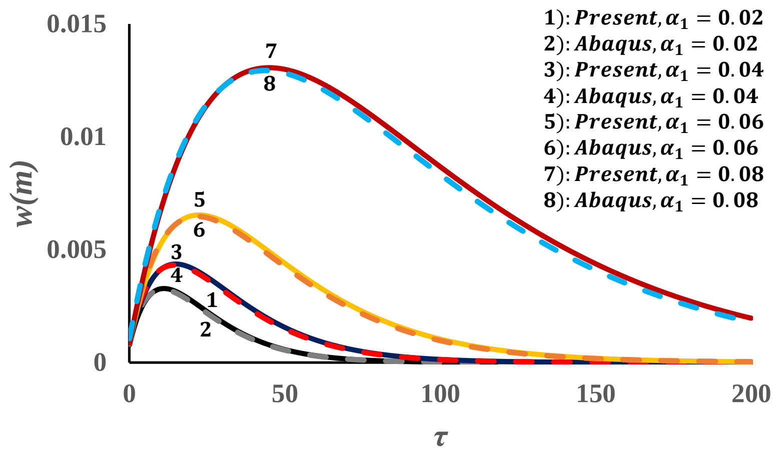
شکل ۵ نشان دهنده نمودارهای جابجایی-زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی به ازای c_1 های مختلف می‌باشد.



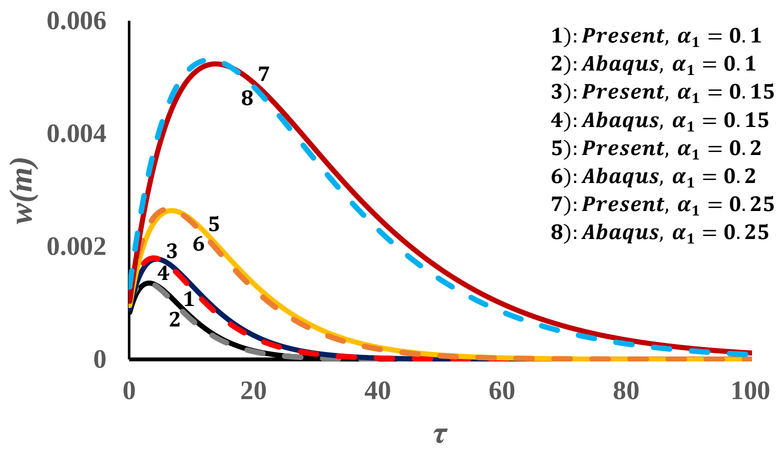
شکل۵ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی.

مقایسه نتایج روش حاضر بدست آمده از رابطه (۳۴) و مدلسازی با ابکوس، صحت و دقت فرمول ارایه شده را تأیید و اثبات کرد.

شکل های ۶ و ۷ نشان دهنده نمودارهای جابجایی-زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت به ازای c_1 های ثابت ۰/۱ و ۰/۳ و α_1 های مختلف می‌باشند.



شکل۶ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.1$.

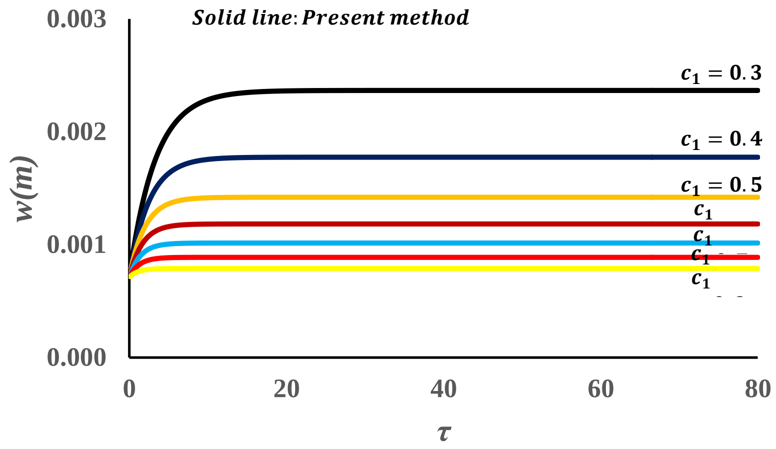


شکل۷ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.3$.

همان طور که نتایج شکل‌های ۶ و ۷ نشان می دهد نمودارهای جابجایی–زمان بدست آمده از رابطه (۳۴) و آبکوس برای تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت مطابقت بسیار خوبی با یکدیگر دارند.

۲-۳- تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی استاتیکی و بار محوری فشاری ثابت

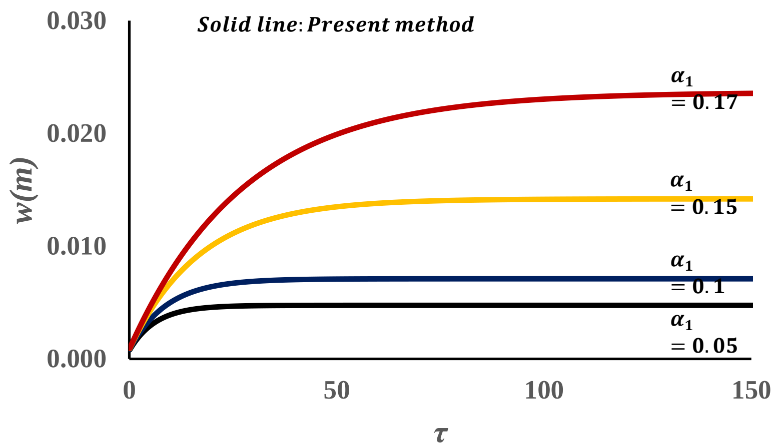
شکل ۸ نشان دهنده نمودارهای جابجایی-زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارگذاری عرضی ثابت به ازای c_1 های مختلف می‌باشد.



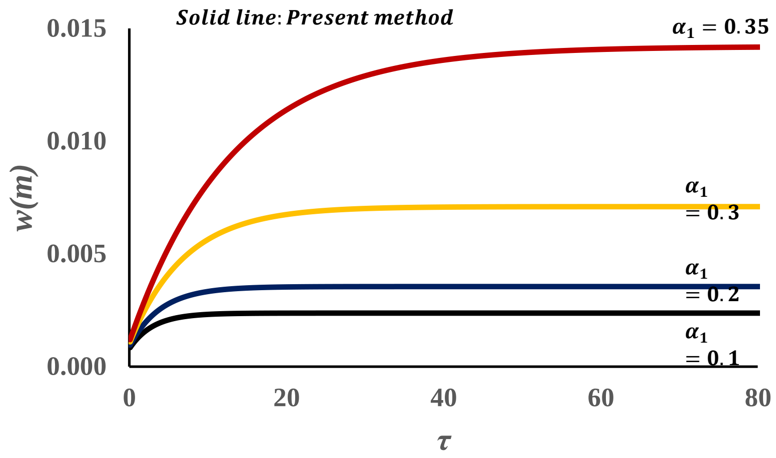
شکل۸ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی ثابت.

همان گونه که شکل ۸ نشان می‌دهد با افزایش مقدار c_1 که به معنای افزایش خواص الاستیک ماده می باشد، از دامنه جابجایی کاسته می‌شود. همچنین تیر ویسکوالاستیک سریعتر به زمان آسودگی و جابجایی نهایی خود میل می‌کند و پس از آن مقدار جابجایی تیر ویسکوالاستیک ثابت باقی می‌ماند.

شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان دهنده نمودارهای جابجایی-زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارگذاری عرضی و محوری فشاری ثابت به ازای c_1های ثابت ۰/۲ و ۰/۴ و α_1 های مختلف می‌باشند.



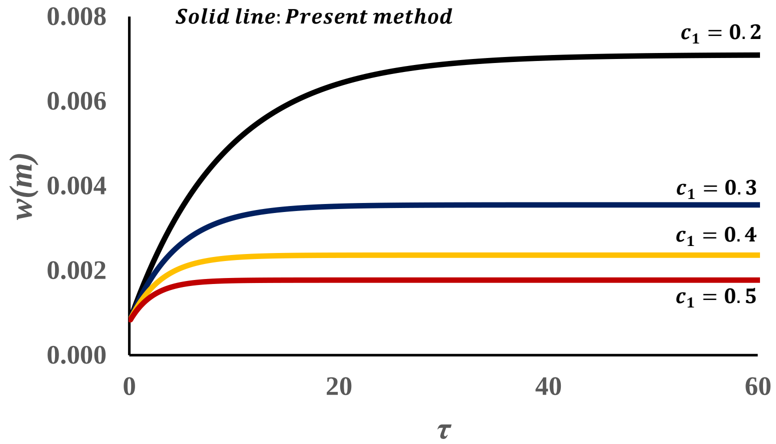
شکل۹ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.2$.



شکل۱۰ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.4$.

از شکل‌های ۹ و ۱۰ نتیجه شد که در حالت کلی در تیر برنولی ویسکوالاستیک با c_1 ثابت، افزایش مقدار α_1 سبب افزایش دامنه جابجایی می‌شود. در نتیجه بازه زمانی بیشتری مورد نیاز است تا تیر ویسکوالاستیک به زمان آسودگی و جابجایی نهایی خود برسد.

در شکل ۱۱ نمودارهای جابجایی–زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت α_1 ثابت و c_1های متفاوت آورده شده است.



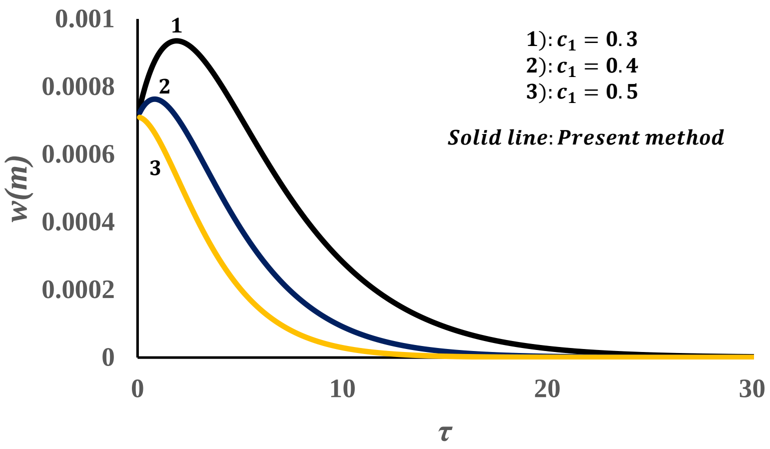
شکل۱۱ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی و بار محوری فشاری ثابت، $\alpha_1 = 0.1$.

همان طور که نتایج شکل ۱۱ نشان می دهد، تحت α_1 ثابت با افزایش مقدار c_1 دامنه جابجایی کاهش می‌یابد. همچنین تیر ویسکوالاستیک سریعتر به زمان آسودگی و در نتیجه جابجایی نهایی خود می‌رسد.

۳-۳- تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت

در این قسمت به تحلیل نتایج تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت پرداخته شد.

شکل ۱۲ نشان دهنده نمودارهای جابجایی–زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک دو سر مفصل تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی به ازای c_1های مختلف می‌باشد.



شکل۱۲ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی.

در شکل ۱۲ قابل مشاهده است که بار نمایی کاهشی علیرغم روند نزولی که در طی زمان دارد، سبب یک تشدید غیر هارمونیک در تیر ویسکوالاستیک می‌شود و پس از لحظه تشدید، جابجایی در طی زمان روند نزولی به خود می‌گیرد.

همانند حالت قبل با افزایش مقدار ترم الاستیک ماده ویسکوالاستیک و خواص الاستیک آن، از دامنه جابجایی تیر کاسته می‌شود. همچنین شیب نزولی نمودار بیشتر شده و جابجایی سریعتر به صفر میل می‌کند.

جهت استخراج زمان بحرانی به وقوع پیوستن تشدید غیرهارمونیک بایستی از رابطه (۳۴) نسبت به زمان مشتق گرفته و برابر صفر قرار داده شود. با مشتق گرفتن از رابطه (۳۴) نسبت به زمان بدون بعد، رابطه (۳۵) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$w_t'(x,t)=\left(\frac{5}{384}\frac{ql^4}{E_0 I}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\left(\frac{c_2 e^{-\frac{\tau_{cr}(c_1-\alpha_1)}{1-\alpha_1}}}{(1-\alpha_1)^2}-\frac{e^{-\frac{\tau_{cr}(c_1-\alpha_1)}{1-\alpha_1}}(c_1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)^2}\left(1+\frac{c_2\tau_{cr}}{1-\alpha_1}\right)\right) \quad (۳۵)$$

با مساوی صفر قرار دادن و ساده سازی رابطه (۳۵) مقدار زمان بحرانی به وقوع پیوستن تشدید غیرهارمونیک از رابطه زیر به صورت بدون بعد حاصل می‌شود:

$$\tau_{cr}=\frac{(1-\alpha_1)(c_2-c_1+\alpha_1)}{c_2(c_1-\alpha_1)} \quad (۳۶)$$

جدول ۱ نشان دهنده مقادیر زمان به وقوع پیوستن تشدید برای c_1 های متفاوت می‌باشد.

جدول۱- زمان به وقوع پیوستن تشدید برای c_1 های متفاوت

c_1	τ_{cr}
۰/۱	۸/۸۸
۰/۲	۳/۷۵
۰/۳	۱/۹۰
۰/۴	۰/۸۳
۰/۵	۰

با توجه به جدول ۱ با افزایش مقدار c_1، زمان به وقوع پیوستن تشدید کوچکتر می‌شود و تشدید زودتر اتفاق می‌افتد. بطوریکه سرانجام در $c_1=0.5$ بیشینه مقدار جابجایی در لحظه صفر رخ می‌دهد که به تبع آن، در c_1 با مقادیر بزرگتر هم بیشینه مقدار جابجایی در لحظه صفر رخ خواهد داد.

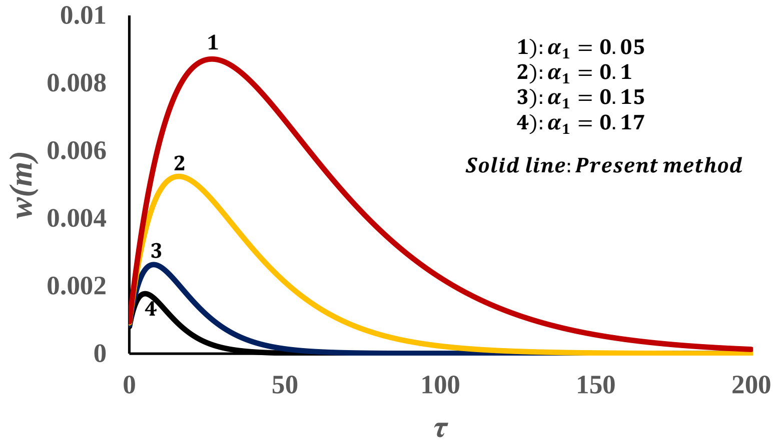
جدول ۲ نشان دهنده مقادیر جابجایی در لحظه صفر و لحظه تشدید و همچنین نسبت جابجایی در لحظه تشدید به جابجایی در لحظه صفر به ازای c_1 های متفاوت می‌باشد.

جدول ۲- مقادیر جابجایی در لحظه صفر و تشدید برای c_1 های متفاوت

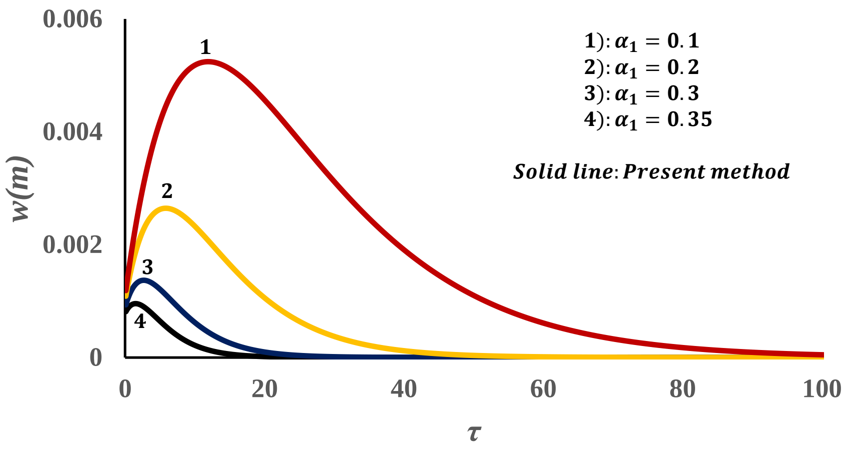
نسبت جابجایی‌ها	جابجایی در لحظه تشدید(متر)	جابجایی در لحظه صفر(متر)	c_1
۳/۶۹۰۱	۰/۰۰۲۶۲	۰/۰۰۰۷۱	۰/۱
۱/۸۸۷۳	۰/۰۰۱۳۴	۰/۰۰۰۷۱	۰/۲
۱/۳۰۹۸	۰/۰۰۰۹۳	۰/۰۰۰۷۱	۰/۳
۱/۰۷۰۴	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۷۱	۰/۴
۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۵
۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۶
۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۷
۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۸
۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۷۱	۰/۹

از جدول ۲ نتیجه شد که با افزایش مقدار c_1 از مقدار نسبت جابجایی در لحظه تشدید به لحظه صفر کاسته می‌شود. این کاهش مقدار جابجایی بین دو لحظه تشدید و صفر تا آنجا ادامه پیدا می‌کند که در نهایت نسبت جابجایی لحظه تشدید به لحظه صفر برابر با یک می‌شود. در واقع از آنجایی که با افزایش مقدار c_1 خاصیت الاستیک ماده ویسکوالاستیک افزایش پیدا می‌کند و خاصیت الاستیک ماده غالب بر خاصیت ویسکوز آن می‌شود، بیشینه مقدار جابجایی در لحظه صفر به وقوع می‌پیوندد که این موضوع به وضوح در جدول ۲ قابل مشاهده می‌باشد.

شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان دهنده نمودارهای جابجایی–زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت می‌باشند.



شکل ۱۳ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.2$.



شکل ۱۴ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت، $c_1 = 0.4$.

از شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نتیجه گرفته شد که در یک مقدار ثابت c_1، با افزایش α_1 دامنه جابجایی و حداکثر مقدار آن که در لحظه تشدید به وقوع می‌پیوندد، افزایش پیدا می‌کند و بازه زمانی بیشتری جهت میل کردن جابجایی به صفر مورد نیاز است.

جدول ۳ نشان دهنده مقادیر زمان به وقوع پیوستن تشدید برای $c_1 = 0.1$ تحت α_1 های متفاوت می‌باشد.

جدول ۳- زمان به وقوع پیوستن تشدید برای $c_1 = 0.1$ تحت α_1 های متفاوت

τ_{cr}	α_1
۱۱/۱۶	۰/۰۲
۱۴/۹۳	۰/۰۴
۲۲/۴۵	۰/۰۶
۴۴/۹۷	۰/۰۸

از جدول ۳ نتیجه شد که در یک مقدار ثابت c_1، با افزایش α_1 زمان به وقوع پیوستن تشدید بزرگتر می‌شود و تشدید دیرتر اتفاق می‌افتد.

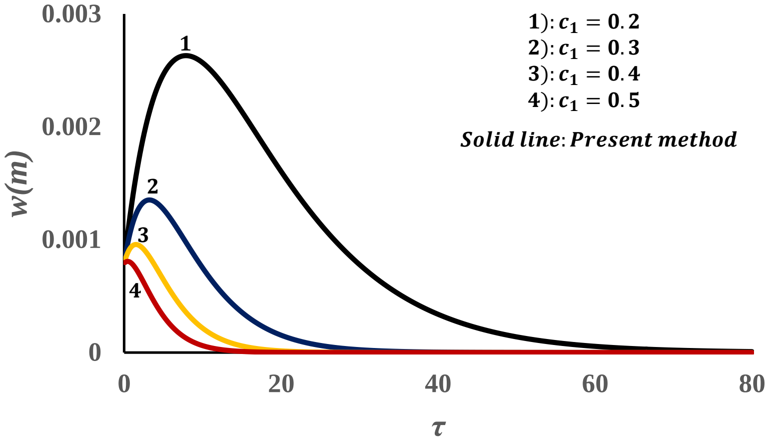
جدول ۴ نشان دهنده مقادیر جابجایی در لحظه صفر و تشدید و همچنین نسبت جابجایی در لحظه تشدید به جابجایی در لحظه صفر برای $c_1 = 0.1$ تحت α_1 های متفاوت می‌باشد.

جدول ۴- مقادیر جابجایی در لحظه صفر و تشدید برای $c_1 = 0.1$ تحت α_1 های متفاوت

نسبت جابجایی‌ها	جابجایی در لحظه تشدید(متر)	جابجایی در لحظه صفر(متر)	α_1
۴/۵۴۱۶	۰/۰۰۳۲۷	۰/۰۰۰۷۲	۰/۰۲
۵/۸۹۱۸	۰/۰۰۴۳۶	۰/۰۰۰۷۴	۰/۰۴
۸/۷۰۶۶	۰/۰۰۶۵۳	۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۶
۱۶/۹۶۱۰	۰/۰۱۳۰۶	۰/۰۰۰۷۷	۰/۰۸

همانطور که نتایج جدول ۴ نشان داد در یک مقدار ثابت c_1، با افزایش مقدار α_1 نسبت جابجایی در لحظه تشدید به لحظه صفر افزایش پیدا می‌کند.

در شکل ۱۵ نمودارهای جابجایی–زمان تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت α_1 ثابت و c_1 های متفاوت آورده شده است.



شکل۱۵ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی و بار محوری فشاری ثابت، $\alpha_1 = 0.1$.

از شکل ۱۵ نتیجه شد که با افزایش مقدار c_1 دامنه جابجایی کاهش می‌یابد. در نتیجه جابجایی سریعتر به صفر میل می‌کند.

جدول ۵ نشان دهنده زمان به وقوع پیوستن تشدید برای $\alpha_1 = 0.1$ تحت c_1های متفاوت می‌باشد.

جدول۵- زمان به وقوع پیوستن تشدید برای $\alpha_1 = 0.1$ تحت c_1 های متفاوت

τ_{cr}	c_1
۷/۸۷۵	۰/۲
۳/۲۱۴	۰/۳
۱/۵۰۰	۰/۴
۰/۴۵۰	۰/۵

از جدول ۵ نتیجه شد که تحت α_1 ثابت، با افزایش مقدار c_1، زمان به وقوع پیوستن تشدید کوچکتر می‌شود و تشدید زودتر اتفاق می‌افتد.

جدول ۶ نشان دهنده مقادیر جابجایی در لحظه صفر و تشدید برای $\alpha_1 = 0.1$ تحت c_1های متفاوت می‌باشد.

جدول۶- مقادیر جابجایی در لحظه صفر و تشدید برای $\alpha_1 = 0.1$ تحت c_1 های متفاوت

نسبت جابجایی ها	جابجایی در لحظه تشدید(متر)	جابجایی در لحظه صفر(متر)	c_1
۳/۳۷۱۷	۰/۰۰۲۶۳	۰/۰۰۰۷۸	۰/۲
۱/۷۳۰۷	۰/۰۰۱۳۵	۰/۰۰۰۷۸	۰/۳
۱/۲۱۷۹	۰/۰۰۰۹۵	۰/۰۰۰۷۸	۰/۴
۱/۰۲۵۶	۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۰۰۷۸	۰/۵

همانطور که در جدول ۶ مشاهده شد تحت α_1 ثابت، با افزایش مقدار c_1 نسبت جابجایی در لحظه تشدید به لحظه صفر کاهش پیدا می‌کند.

۴-۳- تاثیر زمان آسودگی

جدول ۷ نشان دهنده نتایج زمان به وقوع پیوستن تشدید به ازای c_1 و t_sهای مختلف تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی می‌باشد.

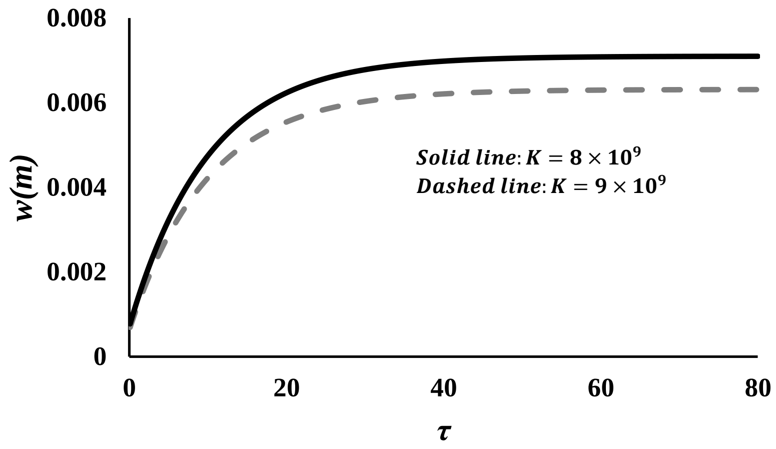
جدول ۷- زمان به وقوع پیوستن تشدید برای c_1 های متفاوت با توجه به رابطه (۳۳)

c_1	$t_s = 0.1$	$t_s = 1$	$t_s = 10$
		زمان تشدید $(\tau = {}^{t}/_{t_s})$	
۰/۱	۰/۸۸	۸/۸۸	۸۸/۸
۰/۲	۰/۳۷۵	۳/۷۵	۳۷/۵
۰/۳	۰/۱۹۰	۱/۹۰	۱۹
۰/۴	۰/۰۸۳	۰/۸۳	۸/۳
۰/۵	۰	۰	۰

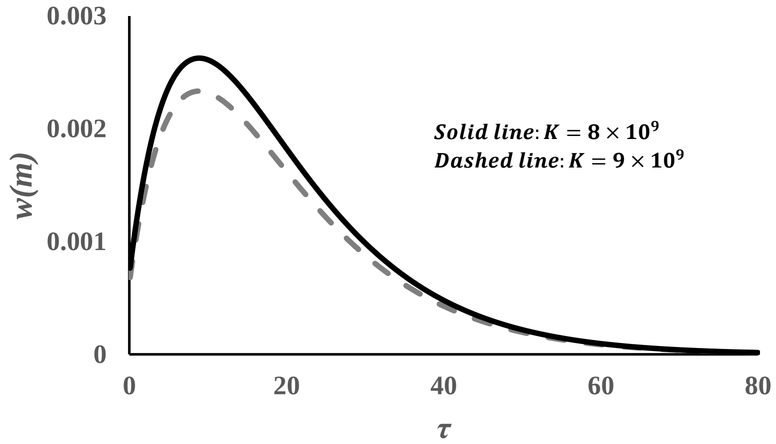
از جدول ۷ نتیجه شد که زمان به وقوع پیوستن تشدید در c_1 های مختلف، رابطه خطی با زمان آسودگی ماده ویسکوالاستیک دارد.

۵-۳- تاثیر مدول بالک

شکل‌های ۱۶ و ۱۷ و همچنین جداول ۸ و ۹ نشان دهنده جابجایی تیر برنولی ویسکوالاستیک به ازای $c_1 = 0.1$ و مدول بالک های متفاوت می‌باشند.



شکل ۱۶ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی ثابت به ازای مدول بالک مختلف و $c_1 = 0.1$.



شکل ۱۷ : تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری عرضی نمایی کاهشی به ازای مدول بالک مختلف و $c_1 = 0.1$.

جدول۸- جابجایی نهایی تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بار گذاری عرضی ثابت و به ازای مدول بالک و c_1 های مختلف

c_1	جابجایی نهایی (متر)	
	$K = 8 \times 10^9 \dfrac{N}{m^2}$	$K = 9 \times 10^9 \dfrac{N}{m^2}$
۰/۱	۰/۰۰۷۱۰	۰/۰۰۶۳۱
۰/۲	۰/۰۰۳۵۵	۰/۰۰۳۱۶
۰/۳	۰/۰۰۲۳۷	۰/۰۰۲۱۰
۰/۴	۰/۰۰۱۷۷	۰/۰۰۱۵۸
۰/۵	۰/۰۰۱۴۲	۰/۰۰۱۲۶

جدول۹- جابجایی تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بار گذاری عرضی نمایی کاهشی در لحظه تشدید و به ازای مدول بالک و c_1 های مختلف

c_1	جابجایی در لحظه تشدید (متر)	
	$K = 8 \times 10^9 \dfrac{N}{m^2}$	$K = 9 \times 10^9 \dfrac{N}{m^2}$
۰/۱	۰/۰۰۲۶۲	۰/۰۰۲۳۳
۰/۲	۰/۰۰۱۳۴	۰/۰۰۱۱۹
۰/۳	۰/۰۰۰۹۳	۰/۰۰۰۸۳
۰/۴	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۶۷
۰/۵	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۶۳

مشاهده نتایج نشان داد که با افزایش مدول بالک، K، از دامنه جابجایی تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت هر دو حالت بارگذاری عرضی ثابت و بارگذاری عرضی نمایی کاهشی کاسته می شود.

۴- جمع بندی و نتیجه گیری

این مقاله به بررسی تشدید غیرهارمونیک تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت یک بار عرضی دینامیکی به صورت تابع نمایی و دارای روند کاهشی در طول زمان توأم، با بار محوری فشاری ثابت پرداخت. نتایج و دستاوردهای این پژوهش بصورت زیر خلاصه می‌شود:

۱. زمان بحرانی اثبات و محاسبه شد که در آن زمان، خیز تیر ویسکوالاستیک چندین برابر خیز تیر در زمان صفر بود.
۲. تابع جابجایی تیر ویسکوالاستیک به طور صریح و دقیق و بدون نیاز به دنبال کردن منحنی زمان-جابجایی و با صرف هزینه محاسباتی بسیار کم محاسبه شد.
۳. برای تیر برنولی ویسکوالاستیک تحت بارگذاری نمایی کاهشی و بار فشاری ثابت زمان بحرانی به وقوع پیوستن تشدید غیرهارمونیک محاسبه شد.
۴. با افزایش مقدار c_1، زمان به وقوع پیوستن تشدید و دامنه جابجایی کاهش یافت.
۵. با افزایش مقدار α_1، زمان به وقوع پیوستن تشدید و دامنه جابجایی افزایش یافت.
۶. تاثیر زمان آسودگی، بر دامنه جابجایی و مدت زمان لازم برای رسیدن به جابجایی نهایی مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین رابطه خطی زمان آسودگی و زمان به وقوع پیوستن تشدید اثبات شد.
۷. تاثیر مدول بالک بر دامنه جابجایی مورد بررسی قرار گرفت و نتیجه شد که با افزایش مدول بالک، از دامنه جابجایی کاسته می‌شود.

پیوست-۱

برای تعیین مقدار s_1 بایستی جواب همگن معادله زیر بدست آورده شود:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{۱-۱}$$

تابع زمان را بصورت زیر تعریف شد:

$$F(t) = e^{s_1 t} \tag{۱-۲}$$

با جایگذاری رابطه (۲-۲) در رابطه (۱-۲) رابطه زیر حاصل شد:

$$\omega(t)F(0) + \int_0^t \omega(t-\tau)\dot{F}(\tau)\mathrm{d}\tau \text{-} \alpha_1 F(t) + \frac{\ddot{F}(t)}{\Omega^2} = q_0 \tag{۱-۳}$$

با لاپلاس گرفتن از رابطه (۳-۲) رابطه زیر نتیجه شد:

$$\left(\frac{s+c_1\lambda}{s+\lambda} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{s+s_1}\right) = 0 \tag{۱-۴}$$

با در نظر گرفتن $s = s_1$ در رابطه (۴-۲) مقدار s_1 حاصل شد:

$$s_1 = \frac{\lambda(-\alpha_1 + c_1)}{-1+\alpha_1}, \qquad \alpha_1 \geq c_1 \tag{۱-۵}$$

پیوست-۲

بسط رابطه (۲۹):

$$\begin{aligned}
&-\frac{Cis^4\lambda c_2}{\Omega} + Bs^4\sqrt{1-\alpha_1} + Ds^4\sqrt{1-\alpha_1} - Bs^4\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - Ds^4\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - \frac{Cis^3\lambda^2 c_2}{\Omega} - \frac{2Cis^3\lambda c_2 s_1}{\Omega} + As^3\sqrt{1-\alpha_1} \\
&\quad - Cs^3\lambda\sqrt{1-\alpha_1} + Bs^3\lambda c_1\sqrt{1-\alpha_1} + Cs^3\lambda c_1\sqrt{1-\alpha_1} + Ds^3\lambda c_1\sqrt{1-\alpha_1} - Bs^3 s_0\sqrt{1-\alpha_1} - Ds^3 s_0\sqrt{1-\alpha_1} \\
&\quad + Bs^3 s_1\sqrt{1-\alpha_1} + 2Ds^3 s_1\sqrt{1-\alpha_1} - As^3\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - Bs^3\lambda\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - Ds^3\lambda\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + Bs^3 s_0\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 \\
&\quad + Ds^3 s_0\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - Bs^3 s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - 2Ds^3 s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - \frac{2Cis^2\lambda^2 c_2 s_1}{\Omega} - \frac{Cis^2\lambda c_2 s_1^{\,2}}{\Omega} + As^2\lambda c_1\sqrt{1-\alpha_1} \\
&\quad - As^2 s_0\sqrt{1-\alpha_1} - Bs^2\lambda c_1 s_0\sqrt{1-\alpha_1} - Ds^2\lambda c_1 s_0\sqrt{1-\alpha_1} - 2Cs^2\lambda s_1\sqrt{1-\alpha_1} + Bs^2 s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1} \\
&\quad - 2Ds^2 s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1} - As^2\lambda\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + As^2 s_0\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + Bs^2\lambda s_0\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + Ds^2\lambda s_0\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 \\
&\quad - Bs^2\lambda s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - 2Ds^2\lambda s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + Bs^2 s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + 2Ds^2 s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - Ds^2 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 \\
&\quad + Ds^2 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1} - \frac{Cis\lambda^2 c_2 s_1^{\,2}}{\Omega} - As\lambda c_1 s_0\sqrt{1-\alpha_1} - Bs\lambda c_1 s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1} - 2Ds\lambda c_1 s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1} \\
&\quad - Cs\lambda s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1} + Cs\lambda c_1 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1} + Ds\lambda c_1 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1} - Dss_0 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1} + As\lambda s_0\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 \\
&\quad + Bs\lambda s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + 2Ds\lambda s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - Ds\lambda s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 + Dss_0 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 - D\lambda c_1 s_0 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1} \\
&\quad + D\lambda s_0 s_1^{\,2}\sqrt{1-\alpha_1}\alpha_1 = qs^4\sqrt{1-\alpha_1} + qs^3\lambda\sqrt{1-\alpha_1} - qs^3 s_0\sqrt{1-\alpha_1} + qs^3 s_1\sqrt{1-\alpha_1} - qs^2\lambda s_0\sqrt{1-\alpha_1} \\
&\quad + qs^2\lambda s_1\sqrt{1-\alpha_1} - qs^2 s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1} - qs\lambda s_0 s_1\sqrt{1-\alpha_1}
\end{aligned} \tag{۲-۱}$$

مراجع

[1] Rencis, J. J., Saigal, S., & Jong, K. Y. (1990). Dynamic viscoelastic beam model for finite element method. *Journal of Aerospace Engineering*, **3**(1), 19-29.

[2] Wang, C. M., Yang, T. Q., & Lam, K. Y. (1997). Viscoelastic Timoshenko beam solutions from Euler-Bernoulli solutions. *Journal of engineering mechanics*, 123(7), 746-748.

[3] KocaTürk, T., & Şimşek, M. (2004). Vibration of viscoelastic beams subjected to moving harmonic loads. *Journal of Engineering and Natural Sciences*. **22**(3), 116-128.

[4] Salehi, M., & ANSARI, F. (2006). Viscoelastic buckling of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams under time variant general loading conditions. *Iranian Polymer Journal*. **15**(3), 183-193.

[5] Starkova, O., & Aniskevich, A. (2007). Limits of linear viscoelastic behavior of polymers. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, **11**(2), 111-126.

[6] Hakan, E. R. O. L., selim SENGEL, H., & SARIOĞLU, M. T. (2008). Static analysis of viscoelastic beams through finite element method. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi*, **21**(2), 85-100.

[7] Arvin, H., Sadighi, M., & Ohadi, A. R. (2010) A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core. *Composite Structures*, **92**(4), 996-1008.

[8] Payette, G. S., & Reddy, J. N. (2010). Nonlinear quasi-static finite element formulations for viscoelastic Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, **26**(12), 1736-1755.

[9] Yao, Q. Z., Liu, L. C., & Yan, Q. F. (2011). Quasi-static analysis of beam described by fractional derivative kelvin viscoelastic model under lateral load. *In Advanced Materials Research*, **189**, 3391-3394.

[10] Li, J., Zheng, B., Yang, Q., & Hu, X. (2014). Analysis on time-dependent behavior of laminated functionally graded beams with viscoelastic interlayer. *Composite Structures*, **107**, 30-35.

[11] Martin, O. (2016). A modified variational iteration method for the analysis of viscoelastic beams. *Applied Mathematical Modelling*, **40**(17-18), 7988-7995.

[12] Yu, C., Zhang, J., Chen, Y., Feng, Y., & Yang, A. (2019). A numerical method for solving fractional-order viscoelastic Euler–Bernoulli beams. *Chaos, Solitons & Fractals*, **128**, 275-279.

[13] Wang, L., Chen, Y., Cheng, G., & Barrière, T. (2020). Numerical analysis of fractional partial differential equations applied to polymeric visco-elastic Euler-Bernoulli beam under quasi-static loads. *Chaos, Solitons & Fractals*, **140**, 110255.

[14] Wu, P., Yang, Z., Huang, X., Liu, W., & Fang, H. (2020). Exact solutions for multilayer functionally graded beams bonded by viscoelastic interlayer considering memory effect. *Composite Structures*, **249**, 112492.

[15] Diani, J. (2020). Free vibrations of linear viscoelastic polymer cantilever beams. *Comptes Rendus. Mécanique*, **348**(10-11), 797-807.

[16] Filippi, M., & Carrera, E. (2021). Stress analyses of viscoelastic three-dimensional beam-like structures with low-and high-order one-dimensional finite elements. *Meccanica*, **56**(6), 1475-1482.

[17] Jafari, N. (2022) Non-Harmonic Resonance of Viscoelastic Structures Subjected to Time-Dependent Decreasing Exponential Transversal Distributed Loads. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, In Press.

[18] Virgin, L. N. (2007). *Vibration of axially-loaded structures*. Cambridge University Press. 376 pages

[19] Neng-hui, Z., & Chang-jun, C. (1998). Non-linear mathematical model of viscoelastic thin plates with its applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **165**(1-4), 307-319

[20] Zenkour, A. M. (2004). Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *Journal of Engineering Mathematics*, **50**(1), 75-93

[21] Jafari, N., & Azhari, M. (2022). Dynamic stability analysis of Mindlin viscoelastic plates subjected to constant and harmonic in-plane compressions based on free vibration analysis of elastic plates. *Acta Mechanica*, 1-21.

[22] Jafari, N., & Azhari, M. (2021). Time-dependent static analysis of viscoelastic Mindlin plates by defining a time function. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, **25**(2), 231-248.