

## Forward Problem Solution of Magnetic Fields Outside of Human Head Using New Four Layer Eccentric Spherical Model

Bijan Zakeri<sup>1\*</sup>, Taghi Moghimi Kandelousy<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Electrical and Computer, Noshirvani University of Technology, Babol, Iran  
E-mails: zakeri@nit.ac.ir; tmoghimik@gmail.com

\* corresponding author

### Short Abstract

In this paper, the magnetic field outside of the human head was obtained by the method of the forward problem solution and using a new four layer eccentric spherical conductor model for the human head. The use of numerical methods for human head has little accuracy due to dimensions of the human head and the low frequency of brain waves. Using the concentric models due to the difference in the actual geometric shape of different layers of the human head and the concentric spheres causes errors in estimating the source location. The three layer model can cause errors due to ignoring the difference in the conductivity between the brain and the cerebrospinal fluid around the brain. Therefore, the results related to an eccentric four layer spherical model in this paper are more accurate than the results related to the three layer spherical models. The spherical model has isotropic layers, that is, the electrical conductivity coefficients of each layer are the same at all points of that layer. The equations were obtained analytically using a dipole as a source. According to our results, it was observed that the magnetic field graph of the new model has little changes compared with to the other models.

### Keywords

Forward problem solution, magnetic field, four layer eccentric spherical model, human head, electrical dipole.

### 1- Short Introduction (4-5 lines)

So far, many simulations have been done for the magnetic fields produced by the human brain to obtain information about its electrical activity. The final goal of these simulations is to solve the direct or inverse problem for the magnetic field, and in other words, to determine the nature and location of the electrical activity of these organs by measuring the magnetic fields outside the brain. In this paper, the human head was modeled as a four layer spherical model.

### 2- Proposed Work and Methodology (including comprision, simulation/experimental results and discusion)

In this paper, the work done in the past to find the magnetic field created outside the head by analytical method was reviewed. A new eccentric four layer model is presented for the human head and it is obtained analytically and by using the magnetic potential vector of the magnetic field equations outside the head. By using simulations, the effect of changing different parameters on the magnetic field diagram can be determined so that the new model can be fully checked and confirmed.

### 3- Conclusion (4-5 lines)

In this paper, we obtained expressions for the magnetic field outside a eccentric multilayer isotropic conductor caused by the current dipole with different moments inside it. Also, how the general magnetic fields change in relation to the degree of non-concentricity of the internal non-concentric layer, in relation to the electric dipole distance from the coordinate origin, and in relation to the age of the people were investigated. The results of the simulations showed that the diagram of the magnetic field outside the head related to the eccentric 4 layer model is similar to the magnetic field diagram related to the eccentric 3 layer model and the 3 and 4 layer cocentric models. Therefore, the new model presented in this article was approved.

### 4- References (2-3 references)

- [1] J. Vorwerk, et al, "A guideline for head volume conductor modeling in EEG and MEG", *NeuroImage* 100: 590-607, 2014.
- [2] C.H. Wolters, et al, "Influence of tissue conductivity anisotropy on EEG/MEG field and return current computation in a realistic head model: a simulation and visualization study using high-resolution finite element modeling," *NeuroImage* 30.3: 813-826, 2006.
- [3] M. Alcocer-Sosa, D. Gutiérrez, "Third-order harmonic expansion of the magnetoencephalography forward and inverse problems in an ellipsoidal brain model," *International journal for numerical methods in biomedical engineering* 33.4, 2017.

## حل مسأله مستقیم میدان‌های مغناطیسی بیرون سر انسان با استفاده از مدل جدید چهار لایه غیرهم مرکز کروی

بیژن ذاکری

دانشیار، دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل، ایران

تقی مقیمی کندلوسی

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی برق-مخابرات، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل، ایران

### چکیده

در این مقاله به روش حل مسأله مستقیم و با استفاده از مدل جدید هادی کروی غیر هم مرکز چهار لایه برای سر انسان، میدان مغناطیسی در بیرون سر انسان به دست آمد. به کارگیری روش‌های عددی برای سر انسان با توجه به ابعاد و فرکانس پائین امواج مغزی از دقت کمی برخوردار است. به کارگیری مدل‌های هم‌مرکز با توجه به تفاوت شکل هندسی واقعی لایه‌های مختلف و کره‌های هم‌مرکز باعث ایجاد خطا در تخمین مکان منبع می‌شود. مدل سه لایه به دلیل نادیده گرفتن تفاوت قابلیت هدایت مغز و مایع مغزی اطراف مغز می‌تواند باعث ایجاد خطا شود. بنابراین نتایج مربوط به مدل کروی چهار لایه غیرهم‌مرکز در این مقاله نسبت به نتایج مربوط به مدل کروی سه لایه دقیق‌تر است. مدل کروی دارای لایه‌های هم‌گن است یعنی ضرایب هدایت الکتریکی هر لایه در تمام نقاط آن لایه یکسان است. معادلات به روش تحلیلی و با استفاده از یک دوقطبی به عنوان منبع، بدست آمد. با توجه به نمودارهای به دست آمده از این معادلات مشاهده شد میدان مغناطیسی مربوط به مدل جدید مورد تایید است.

### کلمات کلیدی

حل مسأله مستقیم، میدان مغناطیسی، مدل کروی غیرهم‌مرکز چهار لایه، سر انسان، دوقطبی الکتریکی.

نام نویسنده مسئول: بیژن ذاکری

ایمیل نویسنده مسئول: zakeri@nit.ac.ir

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۳۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۱/۰۵

### ۵- مقدمه

از طرف دیگر، منبع جریان درون مغز نیز باید به یک منبع شناخته شده تقریب زده شود که مفهوم دوقطبی جریان در اینجا یک تقریب رایج است [۳]. در مرجع [۴] مسأله معکوس شناسایی منبع جریان در داخل مغز با استفاده از اندازه‌گیری میدان مغناطیسی بررسی شد. در این مقاله سر انسان به صورت کره‌های هم‌مرکز ۳ لایه مدل شد. در مرجع [۵] بیان شد که استفاده از مدل‌های مغز ساده با تعداد لایه‌های کم موجب ایجاد خطا در تعیین پارامترهای دوقطبی (مکان و ممان دوقطبی)، می‌شود. بنابراین لازم است که از مدل‌های کروی دقیقتر، و در نتیجه پیچیده‌تر با لایه‌های بیشتر، استفاده شود. همچنین برای اینکه بتوان قابلیت هدایت‌های مختلف مربوط به لایه‌های مختلف مغز را در نظر گرفت، به کره‌های غیرهمگون چند لایه نیاز است. در مرجع [۵] روش ارائه شده در مرجع [۶] برای افزایش سرعت محاسبات، برای مدل‌های سر کروی چند لایه غیرهمگون بسط داده شد. در مرجع [۵] فرض شد که دوقطبی در داخلی‌ترین لایه کره قرار دارد. برای حالتی که دوقطبی در لایه‌های دیگر قرار دارد، در مرجع [۷] بحث شد. در مرجع [۸] عبارت تحلیلی برای میدان مغناطیسی در داخل کره‌های هادی هم‌مرکز غیرهمسانگرد با تعداد لایه‌های دلخواه، ناشی از یک دوقطبی جریان در داخل آن، بدست آمد. در این مقاله با استفاده از راه‌حل‌های موجود میدان الکتریکی به شکل هارمونیک کروی برداری به دست آمد. سپس با استفاده از یک نوع تجزیه خاص و پتانسیل بردار مغناطیسی یک عبارت به شکل سری برای میدان مغناطیسی بدست آمد. بین

تاکنون شبیه‌سازی‌های زیادی برای میدان‌های مغناطیسی تولید شده توسط مغز انسان، انجام شد تا اطلاعاتی درباره فعالیت الکتریکی آن بدست آید. هدف نهایی این شبیه‌سازی‌ها حل مسأله مستقیم یا معکوس برای میدان مغناطیسی، و به عبارتی تعیین ماهیت و محل فعالیت الکتریکی این اعضا با استفاده از اندازه‌گیری میدان‌های مغناطیسی در بیرون مغز می‌باشد. حل مسأله مستقیم برای میدان مغناطیسی روی سر انسان با شکل واقعی آن، خیلی پیچیده است. باین‌وجود، با مطالعه میدان‌های تولید شده توسط دوقطبی‌های الکتریکی در داخل هادی‌های حجمی با اشکال منظم (مثل کره یا بیضی گون برای سر انسان)، می‌توان با تقریب خوبی مسأله را برای میدان مغناطیسی حل نمود. حل مسئله مستقیم در اینجا نیازمند استفاده از مدل‌هایی برای محدود کردن فضای مسئله است. جهت توضیح بیشتر لازم به ذکر است که مغز متشکل از بافت‌های مختلفی چون ماده خاکستری، ماده سفید، مایعات مغزی و... بوده و همچنین دو لایه مجسمه و پوست سر نیز در مسیر اندازه‌گیری قرار دارند. از آنجاکه هر یک از این قسمت‌های نامبرده دارای رسانایی مختص به خود هستند [۱]، بنابراین ما با یک محیط غیرهمگن سر و کار داریم [۲]. علاوه بر این شکل مغز و سر انسان نیز دارای توپولوژی هندسی خاصی است که بسته به رویکرد تحلیلی یا عددی در حل مسئله، می‌توان آن را به یک شکل هندسی منظم (مانند کره‌ها یا بیضی‌های هم‌مرکز) تقریب زد یا از مدل واقعی (منتج از MRI) استفاده نمود.

مدل کروی چهار لایه غیرهم‌مرکز نسبت به نتایج مربوط به مدل کروی سه لایه خیلی دقیق‌تر است.

در این مقاله سر انسان به صورت یک مدل چهارلایه کروی مدل شد. با توجه به اینکه در واقعیت مغز انسان نسبت به لایه‌های دیگر سر انسان کمی غیرهم‌مرکز است و سایر لایه‌های سر انسان یعنی مایع مغزی اطراف مغز و جمجمه و پوست سر تقریباً با هم هم‌مرکز هستند بنابراین برای اینکه این مدل به واقعیت نزدیک‌تر باشد، داخلی‌ترین لایه آن که نشان دهنده مغز است، نسبت به ۳ لایه دیگر غیرهم‌مرکز در نظر گرفته شد. در مدل سه لایه تمام بخش‌های داخل مغز انسان به صورت یک هادی با ضریب هدایت الکتریکی یکسان در نظر گرفته می‌شود ولی بین سطح بیرونی مغز و جمجمه یک لایه‌ای به نام مایع مغزی وجود دارد که ضریب هدایت الکتریکی آن با مغز تفاوت دارد پس مدل سه لایه با واقعیت تفاوت دارد. بنابراین در مدل چهار لایه ارائه شده در این مقاله فرض شد که داخلی‌ترین لایه آن مربوط به مغز و لایه بعدی مربوط به مایع مغزی و دو لایه بیرونی تر مربوط به جمجمه و پوست سر هستند. در این مقاله نورون‌های مغزی که به عنوان منبع تولید میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی مغز هستند، به صورت یک دوقطبی الکتریکی در نظر گرفته شد. همچنین با توجه به فرکانس پائین امواج مغزی در این مقاله از روش تحلیلی شبه استاتیکی برای بدست آوردن میدان مغناطیسی استفاده شد.

مهم‌ترین کاربرد این مقاله، استفاده از آن در رشته پزشکی در زمینه آشکارسازی فعالیت‌های نورونی مغز وسط نوعی خاص از تصویربرداری مغزی به نام مغزنگاری مغناطیسی یا MEG، است. روش‌های تصویربرداری که مبتنی بر تغییرات متابولیک و همودینامیک در بافت مغز هستند، به‌طور غیرمستقیم فعالیت‌های نورونی را منعکس می‌کنند (مانند PET و fMRI). این روش‌ها درجه‌های متفاوتی از تهاجم همچون اثرات رادیواکتیو و میدان مغناطیسی بزرگ را دارا هستند که اگر تکرار شود برای سلامتی انسان مضرات زیادی دارد. روش MEG کاملاً مستقیم و البته غیرتهاجمی فعالیت سلول‌های نورونی را منعکس می‌کنند و به این دلیل جایگاه ویژه‌ای در میان روش‌های موجود در مطالعات مغزشناختی دارند. همچنین روش MEG از نظر رزولوشن زمانی و مکانی بهترین و مناسب‌ترین روش تصویربرداری مغزی است.

در این مقاله در ابتدا کارهایی که در گذشته برای یافتن میدان مغناطیسی ایجاد شده در بیرون سر به روش تحلیلی صورت گرفته، مرور شد. در بخش دوم مقاله مدل جدید چهارلایه غیرهم‌مرکز برای سر انسان ارائه می‌شود و به روش تحلیلی و با استفاده از پتانسیل الکتریکی لایه‌های مختلف و اعمال شرایط مرزی بین لایه‌ها بردار پتانسیل مغناطیسی بدست می‌آید و با استفاده از آن روابط میدان مغناطیسی در بیرون سر بدست می‌آید. این روابط برای دوقطبی‌های با ممان‌های مختلف بدست می‌آید. در بخش سوم مقاله به تحلیل خطای ناشی از تقریب به‌کار رفته برای انجام شبیه‌سازی‌ها و در واقع اثبات همگرایی معادلات ارائه شده برای میدان مغناطیسی پرداخته می‌شود. در بخش چهارم نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده برای مولفه‌های مختلف میدان مغناطیسی و همچنین میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی با ممان‌های مختلف ارائه می‌شود و نمودارهای مختلفی ارائه می‌شود که اثر تغییر پارامترهای مختلف بر نمودار میدان مغناطیسی مشخص شود تا مدل جدید به‌طور کامل بررسی و تایید شود. در بخش پنجم هم نتیجه‌گیری انجام می‌شود.

#### ۶- مدل ارائه شده

سر انسان را به عنوان یک هادی حجمی کروی مدل کردیم. مدل جدیدی که در اینجا برای یافتن میدان مغناطیسی ناشی از نورون‌های مغز انسان در بیرون سر ارائه شد، یک مدل کروی ۴ لایه غیرهم‌مرکز است. شعاع این لایه‌ها برابر  $R_1$ ،  $R_2$ ،  $R_3$  و  $R_4$  است ( $R_4 > R_3 > R_2 > R_1$ )، و ضریب هدایت الکتریکی آن‌ها به ترتیب برابر  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$ ،  $\sigma_3$  و  $\sigma_4$  است. مرکز داخلی‌ترین لایه (که نشان دهنده

یک مدل کروی چند لایه با لایه‌های هم‌مرکز، و شکل واقعی سر انسان تفاوت‌هایی وجود دارد و این تفاوت‌ها باعث بوجود آمدن خطا در تخمین مکان منابع در داخل مغز و نحوه توزیع پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی در بیرون سر انسان، می‌شود. برای اولین بار آقای Cuffin از مدل‌های سه لایه کروی با لایه‌های غیرهم‌مرکز برای پتانسیل الکتریکی و میدان مغناطیسی در بیرون سر انسان، استفاده نمود [۹]. در مرجع [۱۰] معادلاتی برای پتانسیل الکتریکی تولید شده توسط منابع دوقطبی در سیستم EEG با استفاده از یک مدل چند لایه غیر هم مرکز سر انسان، به‌دست آمد.

در مرجع [۱۱] از روش تحلیلی برای بررسی جذب امواج صفحه‌ای یک آنتن دیپل توسط سر انسان، استفاده شد. در اینجا از یک مدل کروی ۶ لایه‌ای هم مرکز برای سر انسان استفاده شد. در این مقاله بخش داخلی سر انسان دقیق‌تر مدل شد و به ۳ قسمت تقسیم شد. در مرجع [۱۲] از یک روش المان محدود جدید برای حل مساله اسکترینگ از یک کره تک لایه ناهمگن استفاده شد. در این مقاله توابع پایه جدید برای روش المان محدود استفاده شد و نتایج آن با نتایج مربوط به روش المان محدود با توابع پایه‌ی استاندارد مقایسه شد. در مرجع [۱۳] هم برای بررسی جذب امواج ایجاد شده از موبایل‌ها توسط سر انسان، از یک مدل کروی ۶ لایه‌ای هم مرکز برای سر انسان استفاده شد. اما در اینجا از روش عددی تفاضل محدود استفاده شد. در مرجع [۱۴] فرمول تحلیلی برای تعیین مکان و ممان تک دیپل بر مبنای اندازه‌گیری‌های EEG و MEG همزمان با استفاده از مدل کروی ۳ لایه هم مرکز ارائه شد. در مرجع [۱۵] فرمول تحلیلی برای تعیین مکان و ممان تک دیپل با استفاده از اندازه‌گیری MEG (و EEG) با استفاده از مدل سه لایه بیضوی برای سر انسان، ارائه شد. در مرجع [۱۶] هم از مدل بیضوی برای سر انسان استفاده شد، ولی فرمول اصلی ارائه شده در مرجع [۱۷] فقط برای جمله چهار قطبی بسط هارمونیک بیضوی صحیح است. در مرجع [۱۸] از یک مدل کروی غیر هم مرکز برای سر انسان برای بررسی جذب امواج توسط سر انسان، ارائه شد. در مدل این مقاله هم مغز انسان و هم چشم‌ها در نظر گرفته شد. منبع تحریک یک منبع در نزدیکی یا یک موج صفحه‌ای است. در مرجع [۱۹] میدان‌ها در مدل‌های چند لایه کروی و با استفاده از روش دو پتانسیل محاسبه شد. مدل این مقاله یک مدل ۱۰ لایه غیر هم مرکز مربوط به سر انسان و دو تا چشم، است. میدان اعمال شده یک موج صفحه‌ای است. در مرجع [۲۰] میدان‌های الکتریکی ناشی از یک دیپل داخل هادی حجمی تک لایه به روش تحلیلی و به صورت تمام موج بدست آمد، که در آن دیپل به عنوان مدلی از نورون‌های مغز انسان و کره به عنوان مدلی از مغز انسان گرفته شد. در مرجع [۲۱] با استفاده از میدان مغناطیسی در بیرون سر نحوه ارتباط مغز-اریانه بررسی و تحلیل شد.

مدل سر انسان که در این مقاله ارائه شد یک مدل کروی چند لایه دومرکزی است که از دو دسته کره تشکیل شده است که کره‌های هر دسته با همدیگر هم‌مرکز هستند، ولی مراکز دو دسته با هم متفاوت هستند. مدل ارائه شده در این مقاله تنها مدل کروی غیر هم‌مرکز با تعداد لایه‌های دلخواه است که تاکنون بررسی شده است. معادلات بدست آمده در این مقاله برای هر تعداد دلخواه از لایه‌ها معتبر است و این مدل حالت کلی مدل‌های کروی است که تاکنون در مقالات دیگر ارائه شده است.

مدل‌هایی که تاکنون برای بدست آوردن میدان مغناطیسی بیرون سر انسان ارائه شد یا به صورت هم‌مرکز بود یا برای حالت غیرهم مرکز ۳ لایه بود. اگر مدل هم‌مرکز باشد با توجه به تفاوتی که بین شکل هندسی واقعی لایه‌های مختلف سر انسان و کره‌های هم‌مرکز وجود دارد، به‌کارگیری این مدل‌ها باعث بوجود آمدن خطا در تخمین مکان منبع می‌شود. همچنین استفاده از مدل کروی سه‌لایه به دلیل نادیده گرفتن توزیع غیر یکنواخت قابلیت هدایت قسمت‌های مختلف مغز انسان، می‌تواند باعث ایجاد خطا شود. بنابراین نتایج مربوط به

استفاده از بردار پتانسیل مغناطیسی  $A$  به صورت زیر است:

$$B = \nabla \times A \quad (1)$$

بردار پتانسیل مغناطیسی به صورت زیر بدست می آید [۲۲]:

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J^s}{\rho} dv - \frac{\mu}{4\pi} \sum_j (\sigma_j^i - \sigma_j^o) \iint \frac{V}{\rho} ds_j \quad (2)$$

که در آن  $J^s$  ممان دوقطبی جریان در واحد حجم،  $\sigma_j^i$  و  $\sigma_j^o$  به ترتیب ضرایب هدایت الکتریکی در داخل و بیرون سطح، و  $V$  پتانسیل روی سطح است. همچنین، در رابطه (۲) داریم:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_s}{r'}\right)^n \frac{\epsilon_m(n-m)! \cos(m(\varphi' - \varphi_s))}{(n+m)!} \cdot \frac{P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta_s)}{(n+m)!} \quad (3)$$

که در آن مقدار  $\epsilon_m$  به ازای  $m=0$  برابر ۱ و به ازای  $m \neq 0$  برابر ۲ است. اندیس  $s$  در این رابطه نشان دهنده منبع است.  $P_n^m$  تابع لژاندر وابسته است. چون در داخل مغز نمی تواند بار خالص ساخته شود، جریان های نوروئی باید به فرم حلقه بسته باشد. بار از طریق جریان های حجمی از طریق محیط رسانای خارج سلولی برمی گردد. بنابراین چگالی جریان را می توان به دو جریان اولیه (که در عصبها جاری می شود) و جریان حجمی (که از طریق محیط خارج سلولی جاری می شود)، تقسیم کرد. هر دو جریان در تولید میدان مغناطیسی نوروئی سهیم هستند، ولی در علوم عصب شناسی بیشتر جریان اولیه مطلوب است. اغلب برای سادگی جریان اولیه به صورت یک دیپل جریان، یعنی یک منبع جریان شبه نقطه ای با یک جهت و اندازه، تقریب زده می شود. بنابراین در اینجا چون جریان حجمی نداریم پس  $J^s = 0$  است.

بنابراین فقط کافی است بخش دوم رابطه (۲) محاسبه شود. همچنین انتگرال گیری سطح در بخش دوم رابطه (۲) فقط باید بر روی سطوح کره های شیفت یافته (که مرکز آن در مبدا قرار ندارد) انجام شود [۲۳]. بنابراین برای به دست آوردن  $A$  و در نتیجه  $B$ ، باید ابتدا رابطه پتانسیل روی سطوح کره های شیفت یافته را به دست آوریم. در مدل ارائه شده در اینجا فقط داخلی ترین کره یعنی کره با شعاع  $R_1$  کره شیفت یافته است. بنابراین باید رابطه پتانسیل الکتریکی روی سطح این کره (که در ناحیه ی دوم قرار دارد)، را به دست آوریم. معادلات کلی پتانسیل های الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی با ممان  $P_x$  در نواحی مختلف کره های چند لایه به صورت زیر است:

$$V_i(r) = \frac{P_x \cos \varphi}{4\pi \sigma_i} \sum_{j=1}^{\infty} P_j^1(\cos \theta) \left( \frac{A_{i,j}}{r^{j+1}} + B_{i,j} r^j \right) \quad i = 1.2.3.4 \quad (4)$$

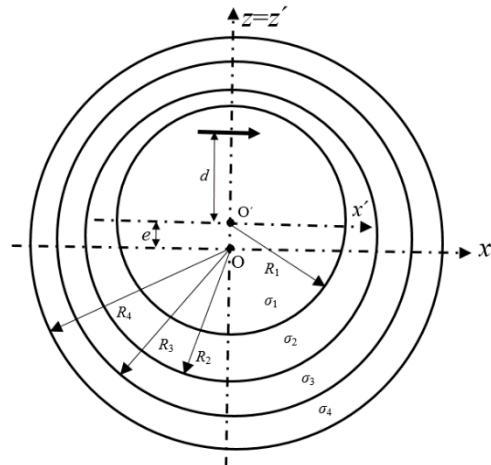
که در آن  $P_j^1$  تابع لژاندر وابسته مرتبه اول درجه  $j$  است. در این معادلات فقط  $A_{1,j} = d^{j-1}$  معلوم است و سایر ضرایب  $A_{i,j}$  و  $B_{i,j}$  مجهول هستند. برای به دست آوردن این ضرایب مجهول باید از شرایط مرزی زیر بر روی مرز بین نواحی مختلف، استفاده کرد:

$$V_i(r) = V_{i+1}(r) \quad \sigma_i \frac{\partial V_i}{\partial r} = \sigma_{i+1} \frac{\partial V_i}{\partial r} \quad i = 1.2.3 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_4(r)}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

همان طور که بیان شد، برای بدست آوردن میدان مغناطیسی در بیرون سر فقط لازم است پتانسیل الکتریکی روی سطح داخلی ترین لایه که در ناحیه دوم است، را داشته باشیم. بنابراین با توجه به رابطه (۴)، باید پتانسیل  $V_2(R_1)$  را به دست آوریم. با استفاده از رابطه (۵) و اعمال شرایط مرزی بر روی سطح کره با شعاع  $R_1$ ، خواهیم داشت:

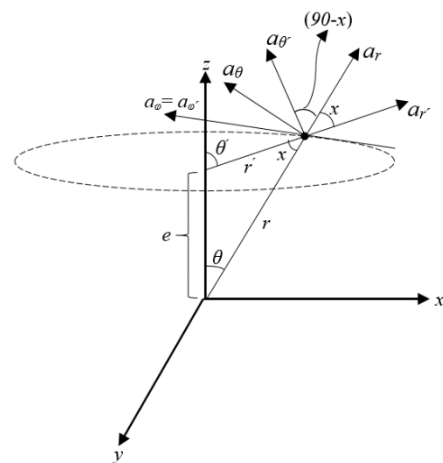
مغز انسان است) در دستگاه دکارتی در نقطه  $O'(0,0,e)$  قرار دارد و مرکز ۳ لایه بعدی در مبدا مختصات (نقطه  $O$ ) قرار دارد. بنابراین داخلی ترین لایه نسبت به سه لایه بعدی خودش غیرهم مرکز است. این مدل در شکل ۱ دیده می شود.



شکل ۱- مدل کروی غیرهم مرکز سر انسان برای یافتن میدان

مغناطیسی در بیرون سر

همان طور که از شکل ۱ مشاهده می کنید، مختصات نقطه ای که در داخلی ترین لایه (لایه اول) و لایه دوم قرار دارند در دستگاه دکارتی به صورت  $(x', y', z')$  نشان داده می شود، و مختصات نقطه ای که در لایه های سوم و چهارم قرار دارند در دستگاه دکارتی به صورت  $(x, y, z)$  هستند. با توجه به شکل ۱، بین مختصات نقاط در این دو ناحیه روابط  $x=x', y=y', z=z'+e$  برقرار است. برای نقاط در دستگاه مختصات کروی در لایه های اول و دوم از پارامترهای  $(r', \theta', \varphi')$  و در لایه های سوم و چهارم از پارامترهای  $(r, \theta, \varphi)$  استفاده می شود. چون محورهای  $x'$  و  $y'$  به ترتیب با مختصات  $x$  و  $y$  موازی هستند، بنابراین در دستگاه کروی  $\varphi = \varphi'$  است. یک دوقطبی الکتریکی با ممان  $P_x$  (که با علامت فلش در شکل ۱ دیده می شود) را به عنوان یک مدلی از نوروئی مغزی که منبع تولید میدان های الکتریکی و مغناطیسی هستند، روی محور  $z$  و به فاصله  $d$  از نقطه  $O'$  در داخل مدل قرار دادیم. زاویه بین بردارهای یکه مختلف دو دستگاه مختصات کروی با مراکز  $O$  و  $O'$ ، در شکل ۲ دیده می شود.



شکل ۲- زوایای بین بردارهای یکه مختلف مربوط به دو دستگاه کروی مختلف با مراکز مختلف

معادلات مربوط به میدان مغناطیسی  $B$  تولید شده توسط یک دوقطبی با

$$\alpha = e/R_2 \quad (۱۷)$$

$$k_i = \sigma_i/\sigma_{i+1} \quad i = 1,2,3 \quad (۱۸)$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3^{2j+1}(jk_2 + j + 1) & R_2^{2j+1}(j + 1)(k_2 - 1) \\ R_3^{2j+1}j(k_2 - 1) & R_2^{2j+1}(jk_2 + j + k_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_4^{2j+1}(jk_3 + j + 1) & R_3^{2j+1}(j + 1)(k_3 - 1) \\ R_4^{2j+1}j(k_3 - 1) & R_3^{2j+1}(jk_3 + j + k_3) \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

قانون تعامد برای توابع لژاندر وابسته در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\int_0^\pi P_k^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{2(m+k)!}{(2k+1)(k-m)!} & k = l \end{cases} \quad (۲۰)$$

با استفاده از روابط (۳)، (۱۲) و (۲۰)، و با انگرال‌گیری در بخش دوم سمت راست رابطه ی (۲)، رابطه A به دست می‌آید. سپس با استفاده از رابطه (۱)، مولفه‌های میدان مغناطیسی تولید شده توسط کره شیفته یافته (کره ی با شعاع  $R_1$ ) به دست می‌آیند. با توجه به رابطه (۲)، چون فقط  $A_r$  داریم بنابراین با توجه به رابطه (۱) برای میدان مغناطیسی  $B_r=0$  است، و خواهیم داشت:

$$B_{\theta'} = -\frac{\mu(1-k_1)P_x \sin \varphi}{4\pi \sin \theta'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos \theta')(d^{n-1} + R_1^{2n+1}B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1]r'^{n+1}} \quad (۲۱)$$

$$B_{\varphi'} = \frac{\mu(1-k_1)P_x \cos \varphi}{4\pi \sin \theta'} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1) \cos \theta' P_n^1(\cos \theta')](d^{n-1} + R_1^{2n+1}B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1]r'^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[nP_{n+1}^1(\cos \theta')](d^{n-1} + R_1^{2n+1}B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1]r'^{n+1}} \right) \quad (۲۲)$$

برای این که بتوانیم مولفه شعاعی میدان مغناطیسی در بیرون سر انسان (که در دستگاه مختصات با مرکز مبدا مختصات است)، یعنی  $B_r(r, \theta, \varphi)$  را به دست آوریم باید تصویر مولفه‌های میدان مغناطیسی در روابط (۲۱) و (۲۲) را در جهت بردار  $\vec{a}_r$  به دست آوریم. در مثالی که در شکل ۲ دیده می شود روابط مثلثاتی زیر وجود دارد:

$$x = 180 - \theta - (180 - \theta') = \theta' - \theta \quad (۲۳)$$

$$\frac{\sin x}{e} = \frac{\sin \theta}{r'} = \frac{\sin \theta'}{r} \quad (۲۴)$$

$$r' = \sqrt{r^2 + e^2 - 2e \cdot r \cdot \cos \theta} \quad (۲۵)$$

$$e = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r' \cdot r \cdot \cos(\theta' - \theta)}$$

با استفاده از تصویر بردار  $\vec{B}(r', \theta', \varphi')$  با مولفه های  $B_{\theta'}$  و  $B_{\varphi'}$  در جهت بردار  $\vec{a}_r$  یک  $\vec{a}_r$ ، و با توجه به رابطه (۲۴)، رابطه  $B_r(r, \theta, \varphi)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_r(r, \theta, \varphi) = \left| \text{Proj}_{\vec{a}_r} \vec{B}(r', \theta', \varphi') \right| = \frac{\vec{B}(r', \theta', \varphi') \cdot \vec{r}}{|\vec{a}_r|^2} = \vec{B}(r', \theta', \varphi') \cdot \vec{a}_r = (B_{\theta'} \vec{a}_{\theta'} + B_{\varphi'} \vec{a}_{\varphi'}) \cdot \vec{a}_r = B_{\theta'} \cos(90 - x) = B_{\theta'} \sin x = B_{\theta'} \frac{e \cdot \sin \theta'}{r} \quad (۲۶)$$

با قرار دادن رابطه (۲۱) در معادله آخر رابطه (۲۶)، رابطه (۲۷) برای مولفه شعاعی میدان مغناطیسی به دست می‌آید:

$$V_1(R_1) = V_2(R_1) \Rightarrow \frac{1}{\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d^{n-1}}{R_1^{n+1}} + B_{1,n} R_1^n \right) = \frac{1}{\sigma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_{2,n}}{R_1^{n+1}} + B_{2,n} R_1^n \right) \quad (۷)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial V_1(R_1)}{\partial r'} = \sigma_2 \frac{\partial V_2(R_1)}{\partial r} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-(n+1)d^{n-1}}{R_1^{n+2}} + n B_{1,n} R_1^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-(n+1)A_{2,n}}{R_1^{n+2}} + n B_{2,n} R_1^{n-1} \right) \quad (۸)$$

با توجه به روابط (۷) و (۸) و مرتب کردن روابط بالا، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$d^{n-1} + B_{1,n} R_1^{2n+1} = k_1 A_{2,n} + k_1 B_{2,n} R_1^{2n+1} \quad (۹)$$

$$-(n+1)d^{n-1} + n B_{1,n} R_1^{2n+1} = -(n+1)A_{2,n} + n B_{2,n} R_1^{2n+1} \quad (۱۰)$$

که در آن  $k_1 = \sigma_1/\sigma_2$  است. اگر رابطه (۹) را در  $n$  ضرب کنیم و از رابطه (۱۰) کم کنیم، ضریب مجهول  $B_{1,n}$  حذف می‌شود و رابطه ی زیر بین ضرایب مجهول  $A_{2,n}$  و  $B_{2,n}$  به دست می‌آید:

$$(2n+1)d^{n-1} = (nk_1 + n + 1)A_{2,n} + n(k_1 - 1)B_{2,n} R_1^{2n+1} \Rightarrow A_{2,n} = \frac{2n+1}{nk_1 + n + 1} d^{n-1} - \frac{n(k_1 - 1)R_1^{2n+1}}{nk_1 + n + 1} B_{2,n} \quad (۱۱)$$

با قرار دادن رابطه (۱۱) در رابطه (۴)، رابطه  $V_2(R_1)$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$V_2(R_1) = \frac{P_x \cos \varphi}{4\pi \sigma_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_j^1(\cos \theta')(2n+1)(d^{j-1} + B_{2,j} R_1^{2j+1})}{(nk_1 + n + 1)b^{n+1}} \quad (۱۲)$$

برای اینکه بتوانیم با استفاده از شرایط مرزی ضرایب مجهول  $B_{2,j}$  در رابطه (۱۲) را بدست آوریم، باید پتانسیل الکتریکی  $V_2$  در ناحیه دوم را به صورت زیر، طبق مرجع [۱۰]، در سیستم مختصاتی با مرکز مبدا مختصات نوشت:

$$V_2(r) = \frac{P_x \cos \varphi}{4\pi \sigma_2} \sum_{k=1}^{\infty} P_k^1(\cos \theta) \left[ \left( \frac{e}{r} \right)^{k+1} (k-1)! \sum_{j=1}^k \frac{A_{2,j}}{e^{j+1}(j-1)!(k-j)!} + \left( \frac{r}{e} \right)^k \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}(j+1)! e^j B_{2,j}}{(j-k)!} \right] \quad (۱۳)$$

با اعمال شرایط مرزی در روابط (۵) و (۶) با استفاده از معادلات موجود در روابط (۴)، (۱۲) و (۱۳)، دستگاه چند معادله چند مجهولی به صورت رابطه (۱۴) به دست می‌آید که با حل آن ضرایب مجهول  $B_{2,j}$  به دست می‌آیند.

$$\sum_{j=1}^s \frac{j B_{2,j} R_1^{2j+1} D_{j,a}}{D_{j,b} e^{j+1}(j-1)!(s-j)!} - \left( \frac{1}{\alpha} \right)^{2s+1} \frac{s^2}{[(s+1)!]^2} \cdot \frac{(c_{11} + c_{12}) \sum_{j=s}^{\infty} \frac{(-1)^{j-s}(j+1)! e^j B_{2,j}}{(j-s)!}}{(c_{21} + c_{22})} = - \sum_{j=1}^s \frac{d^{j-1}(2j+1)R_1^{2j+1}}{D_{j,b} e^{j+1}(j-1)!(s-j)!} \quad (۱۴)$$

که در آن داریم:

$$D_{j,a} = (1 - k_1) R_1^{2j+1} \quad (۱۵)$$

$$D_{j,b} = (jk_1 + j + 1) R_1^{2j+1} \quad (۱۶)$$

$$V_z(R_1) = \frac{P_z}{4\pi\sigma_z} \sum_{j=1}^{\infty} P_j^0(\cos\theta') (j \cdot d^{j-1} + B_{2,j} R_1^{2j+1}) \quad (33)$$

با اعمال شرایط مرزی در روابط (۵) و (۶) با استفاده از معادلات موجود در روابط (۳۲) و (۳۳)، معادله (۳۴) بدست می‌آید که با حل آن ضرایب مجهول  $B_{2,j}$  تعیین می‌شوند.

$$\sum_{j=1}^s \frac{B_{2,j} R_1^{2j+1} D_{j,a}}{D_{j,b} e^{j+1} (j-1)! (s-j)!} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2s+1} \frac{(s^2+s)}{[(s+1)!]^2} \cdot \frac{(c_{11}+c_{12})}{(c_{21}+c_{22})} \cdot \sum_{j=s}^{\infty} \frac{(-1)^{j-s} (j)! e^j B_{2,j}}{(j-s)!} \quad (34)$$

$$= - \sum_{j=1}^s \frac{d^{j-1} (2j+1) R_1^{2j+1}}{D_{j,b} e^{j+1} (j-1)! (s-j)!}$$

با توجه به این که در رابطه (۳۲) پتانسیل الکتریکی تابع  $\varphi$  نیست، بنابراین بردار  $A$  هم تابع  $\varphi$  نیست. بنابراین در این حالت فقط  $B_{\varphi'}$  خواهیم داشت. در نتیجه در این حالت میدان مغناطیسی در بیرون مدل فقط مولفه  $\varphi$  دارد که مشابه حالت دوقطبی با ممان  $P_x$  از رابطه (۳۵) بدست می‌آید:

$$B_{\varphi z} = \frac{\mu(1-k_1)P_z}{4\pi r \sin\theta} \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1) \cos\theta P_n^1(\cos\theta)] (n \cdot d^{n-1} + R_1^{2n+1} B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1](\sqrt{r^2+e^2-2e \cdot r \cdot \cos\theta})^n} \right) \quad (35)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[nP_{n+1}^1(\cos\theta)] (n \cdot d^{n-1} + R_1^{2n+1} B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1](\sqrt{r^2+e^2-2e \cdot r \cdot \cos\theta})^n}$$

### ۷- تحلیل خطا

از نظر تئوری در روابط مربوط به مولفه‌های مختلف میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان‌های مختلف که در بخش ۶ بدست آمد، مقدار  $n$  تا بینهایت ادامه دارد. بین مقادیر بدست آمده برای  $n_{max} = 25$  و مقادیر بدست آمده برای  $n_{max} = 50$  و بیشتر، خطای کمی وجود دارد. برای بدست آوردن خطا از معیاری به نام معیار تفاضل نسبی یا RDM از رابطه (۳۶) استفاده کردیم [۲۴]:

$$RDM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{180} (B_i^{25} - B_i^{50})^2}{\sum_{i=1}^{180} (B_i^{25})^2}} \quad (36)$$

در رابطه (۳۶)، اندیس  $i$  زاویه  $\theta$  است،  $B_i^{25}$  میدان مغناطیسی بدست آمده به ازای  $n_{max} = 25$  و  $B_i^{50}$  میدان مغناطیسی بدست آمده به ازای  $n_{max} = 50$  است.

خطاهای بین مقادیر بدست آمده برای  $n_{max} = 25$  و مقادیر بدست آمده برای  $n_{max} = 50$  برای میدان‌های مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی‌های  $P_x$  و  $P_y$  و همچنین میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_z$ ، در جدول ۱ دیده می‌شود.

جدول ۱- خطاهای بین مقادیر بدست آمده برای  $n_{max}=25$  و مقادیر به دست آمده برای  $n_{max}=50$  برای میدان مغناطیسی

$B_{\varphi z}$	$B_{toty}$	$B_{totx}$	میدان مغناطیسی
۰/۰۳۰۶۰	۰/۰۳۱۷۵	۰/۰۳۰۷۸	درصد خطا

همان‌طور که از جدول ۱ مشاهده می‌نمایید مقدار درصد خطا خیلی کم است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که روابط بدست آمده برای میدان‌های مغناطیسی برای همه دوقطبی‌های با ممان‌های مختلف همگرا است. بنابراین در شبیه‌سازی‌های انجام شده در بخش ۸ مقدار  $n_{max}$  برابر ۲۵ انتخاب شد.

$$B_r(r, \theta, \varphi) = - \frac{\mu(1-k_1)eP_x \sin\varphi}{4\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos\theta)(d^{n-1} + R_1^{2n+1} B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1]r^{n+1}} \quad (27)$$

در نهایت، با قرار دادن رابطه (۲۵) در رابطه (۲۷)، مولفه شعاعی میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  در بیرون مدل از رابطه (۲۸) بدست می‌آید:

$$B_{rx}(r, \theta, \varphi) = - \frac{\mu(1-k_1)eP_x \sin\varphi}{4\pi r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos\theta)(d^{n-1} + R_1^{2n+1} B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1](\sqrt{r^2+e^2-2e \cdot r \cdot \cos\theta})^{n+1}} \quad (28)$$

برای بدست آوردن مولفه  $\varphi$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  در بیرون مدل یعنی  $B_{\varphi}(r, \theta, \varphi)$ ، با توجه به اینکه در این مدل  $\varphi = \varphi'$  است، بنابراین  $B_{\varphi}(r, \theta, \varphi) = B_{\varphi'}(r', \theta', \varphi')$  بنابراین  $B_{\varphi}(r, \theta, \varphi)$  با استفاده از روابط (۲۲)، (۲۴) و (۲۵) از رابطه (۲۹) بدست می‌آید:

$$B_{\varphi x}(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu(1-k_1)P_x \cos\varphi}{4\pi r \sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1) \cos\theta P_n^1(\cos\theta) - nP_{n+1}^1(\cos\theta)](d^{n-1} + R_1^{2n+1} B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1](\sqrt{r^2+e^2-2e \cdot r \cdot \cos\theta})^n} \quad (29)$$

برای بدست آوردن مولفه  $\theta$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  در بیرون مدل یعنی  $B_{\theta}$ ، باید از تصویر بردار  $\vec{B}(r', \theta', \varphi')$  با مولفه‌های  $B_{\theta'}$  و  $B_{\varphi'}$  در جهت بردار یکجهت  $\vec{a}_{\theta}$  استفاده کرد. بنابراین، با توجه به شکل ۲ و با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۵)، خواهیم داشت:

$$B_{\theta}(r, \theta, \varphi) = \left| Proj_{\vec{a}_{\theta}}^{\vec{B}} \right| = \frac{\vec{B} \cdot \vec{a}_{\theta}}{|\vec{a}_{\theta}|} = \vec{B} \cdot \vec{a}_{\theta} \quad (30)$$

$$= (B_{\theta'} \vec{a}_{\theta'} + B_{\varphi'} \vec{a}_{\varphi'}) \cdot \vec{a}_{\theta} = B_{\theta'} \cos(x) = B_{\theta'} \cos(\theta' - \theta)$$

$$= B_{\theta'} \frac{r^2 + r'^2 - e^2}{2rr'} = B_{\theta'} \frac{r - e \cdot \cos\theta}{r'}$$

در نهایت با قرار دادن رابطه (۲۱) در رابطه (۳۰) و مرتب کردن آن، و همچنین رابطه (۲۵)، مولفه  $\theta$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  در بیرون مدل از رابطه (۳۱) بدست می‌آید:

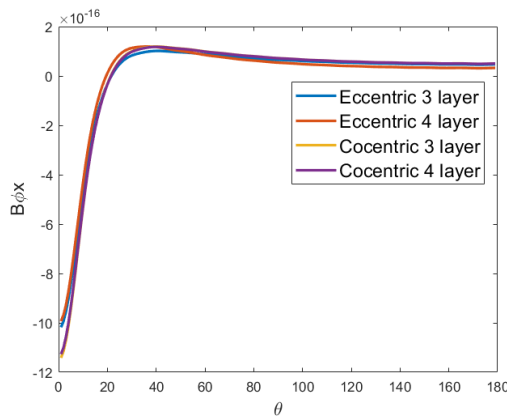
$$B_{\theta x}(r, \theta, \varphi) = \frac{-\mu(1-k_1)P_x \sin\varphi (r - e \cdot \cos\theta)}{4\pi r \sin\theta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n^1(\cos\theta)(d^{n-1} + R_1^{2n+1} B_{2,n})}{[n(k_1+1)+1](\sqrt{r^2+e^2-2e \cdot r \cdot \cos\theta})^{n+1}} \quad (31)$$

پتانسیل الکتریکی تولید شده توسط دوقطبی با ممان  $P_y$  را می‌توان به روش مشابهی که برای دوقطبی با ممان  $P_x$  انجام شد، بدست آورد، با این تفاوت که در رابطه (۴) باید به جای عبارت  $P_x \cos\varphi$  عبارت  $P_y \sin\varphi$  را قرار داد [۱۰]. بنابراین روابط مربوط به مولفه‌های مختلف میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_y$  در بیرون مدل مشابه مولفه‌های متناظر آن مربوط به دوقطبی با مولفه  $P_x$  می‌باشد.

برای بدست آوردن پتانسیل الکتریکی تولید شده توسط دوقطبی با ممان  $P_z$  باید رابطه (۴) را به صورت زیر اصلاح کرد [۹]:

$$V_i(r) = \frac{P_z}{4\pi\sigma_i} \sum_{j=1}^{\infty} P_j^0(\cos\theta) \left( \frac{A_{i,j}}{r^{j+1}} + B_{i,j} r^j \right) \quad i = 1.2.3.4 \quad (32)$$

که در آن  $P_j^0$  چند جمله‌ای لژاندر از درجه  $j$  است و  $A_{1,j} = jd^{j-1}$  است. در اینجا هم برای بدست آوردن رابطه پتانسیل الکتریکی روی سطح داخلی مرزی بر روی سطح کره به شعاع  $R_1$ ، یک دستگاه دو معادله- دو مجهولی بدست می‌آید که با حل آن، (مشابه حالت دوقطبی  $P_x$ ) این رابطه به صورت زیر به دست می‌آید:

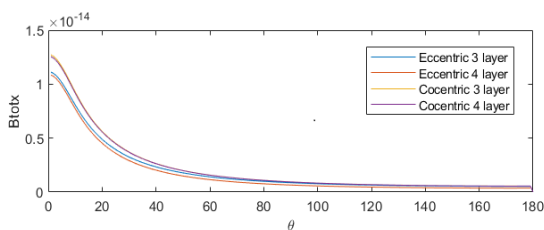


شکل ۵- مولفه  $\theta$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای چهار مدل مختلف سر انسان

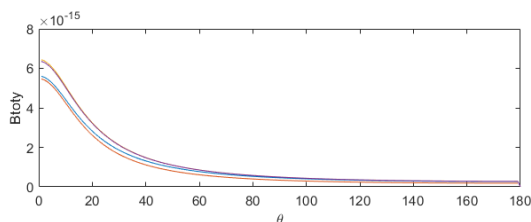
بنابراین شعاع لایه‌های مدل ۳ لایه به ترتیب از داخلی‌ترین تا بیرونی‌ترین لایه برابر  $7/36$ ،  $7/76$  و  $8$  سانتیمتر، و ضرایب هدایت الکتریکی آن‌ها به ترتیب  $0.33 \text{ S/m}$ ،  $8.3 \text{ mS/m}$  و  $0.33 \text{ S/m}$  انتخاب شد. همچنین شعاع لایه‌های مدل ۴ لایه به ترتیب از داخلی‌ترین تا بیرونی‌ترین لایه برابر  $7/2$ ،  $7/36$ ،  $7/76$  و  $8$  سانتیمتر، و ضرایب هدایت الکتریکی آن‌ها به ترتیب  $1.8 \text{ S/m}$ ،  $0.33 \text{ S/m}$ ،  $8.3 \text{ mS/m}$  و  $0.33 \text{ S/m}$  انتخاب شد. میدان مغناطیسی در فاصله ۹ سانتیمتری از مبدا مختصات به دست آمد. نمودار مولفه شعاعی میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای این چهار مدل، در شکل ۳ دیده می‌شود.

همان‌طور که از شکل‌های ۳ تا ۵ دیده می‌شود، در تمام مولفه‌های میدان‌های مغناطیسی اختلاف کمی بین نمودار مربوط به مدل جدید ارائه شده در این مقاله (یعنی مدل ۴ لایه غیرهم‌مرکز که به رنگ قرمز در این نمودارها دیده می‌شود) با نمودار مدل ۳ لایه غیرهم‌مرکز وجود دارد که این نشان می‌دهد که مدل جدید مورد تایید است و مدل درستی است.

نمودارهای مربوط به میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی‌های با ممان  $P_x$  و  $P_y$ ، یعنی میدانهای  $B_{\theta x}^2 + B_{\theta y}^2 + B_{\theta z}^2$  و  $B_{totx} = \sqrt{B_{rx}^2 + B_{\theta x}^2 + B_{\phi x}^2}$  و  $B_{toty} = \sqrt{B_{ry}^2 + B_{\theta y}^2 + B_{\phi y}^2}$  در شکل ۶ دیده می‌شوند.



(الف)

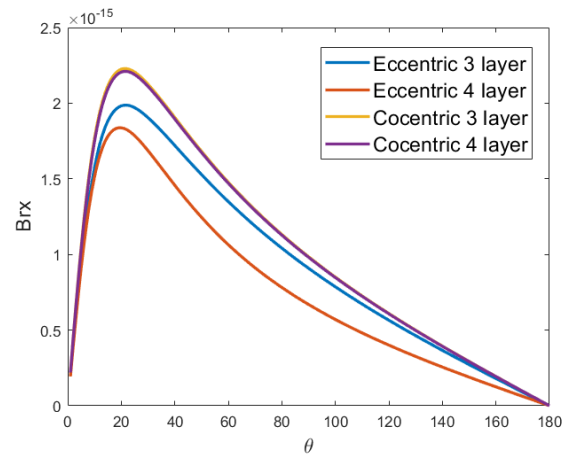


(ب)

شکل ۶- میدان مغناطیسی کلی برای چهار مدل مختلف سر انسان: (الف) ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  و (ب) ناشی از دوقطبی با ممان  $P_y$

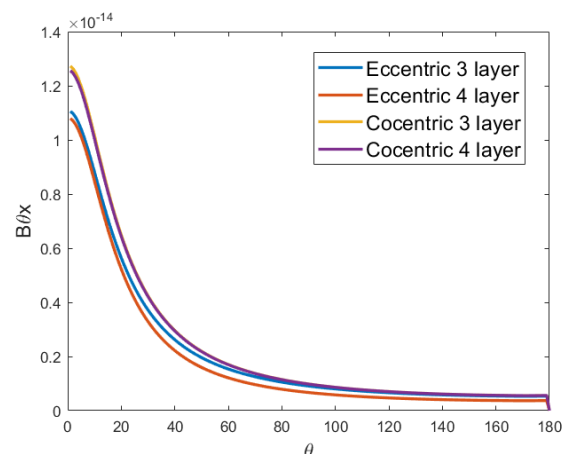
### ۸- نتایج شبیه‌سازی‌ها

برای تایید مدل ارائه شده در این مقاله، نمودار مولفه‌های مختلف میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان‌های مختلف که با استفاده از مدل ما به دست می‌آید، با ۳ مدل دیگر مقایسه شد. مدل اول، غیرهم‌مرکز ۳ لایه بود که رابطه مولفه‌های مختلف میدان مغناطیسی آن توسط روابط مرجع [۱۰] و به روش این مقاله بدست آمد. دو مدل دیگر هم‌مرکز ۴ لایه و ۳ لایه بودند، که نمودار آن‌ها با استفاده از مدل‌های ۴ لایه و ۳ لایه ی غیرهم‌مرکز و میل دادن پارامتر  $e$  (فاصله مرکز کره غیرهم‌مرکز با کره‌های هم‌مرکز) به سمت صفر، بدست آمد. مدل ۳ لایه، به ترتیب از داخلی‌ترین تا بیرونی‌ترین لایه شامل لایه‌های مغز، جمجمه و پوست سر است. در مدل ۴ لایه یک لایه جدید به نام لایه مایع مغزی (CSF) که اطراف مغز هست و ضریب هدایت الکتریکی آن با مغز تفاوت دارد، اضافه شد. بنابراین مدل چهارلایه، به ترتیب از داخلی‌ترین تا بیرونی‌ترین لایه شامل لایه‌های مغز، مایع مغزی، جمجمه و پوست سر است. مقادیر شعاع و ضریب هدایت الکتریکی لایه‌های مختلف برای فرد بالغ مشابه مقادیر موجود در مرجع [۱۰] انتخاب شد.



شکل ۳- مولفه شعاعی میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای چهار مدل مختلف سر انسان

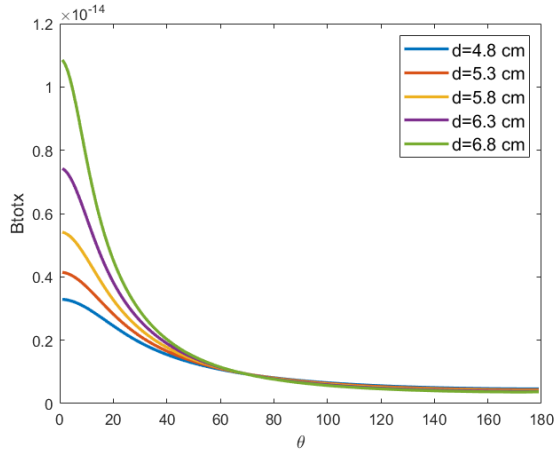
نمودار مولفه  $\theta$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای این چهار مدل، در شکل ۴ دیده می‌شود.



شکل ۴- مولفه  $\theta$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای چهار مدل مختلف سر انسان

نمودار مولفه  $\theta$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای این چهار مدل، در شکل ۵ دیده می‌شود.

نمودار مربوط به میزان تغییرات میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی جریان با ممان  $P_x$  نسبت به میزان فاصله دوقطبی الکتریکی نسبت به مبدا برای مدل ۴ لایه غیرهم‌مرکز، در شکل ۹ دیده می‌شود. همانطور که از شکل ۹ مشاهده می‌کنید، در نقاطی که زاویه  $\theta$  کوچک است، یعنی در نقاطی که به منبع (دوقطبی الکتریکی) نزدیک است، نمودارها به فاصله منبع از مبدا وابستگی شدیدی دارند و با تغییر فاصله منبع از مبدا نمودارها از هم فاصله می‌گیرند. ولی وقتی از منبع دور می‌شویم این اختلاف کم می‌شود و نمودارها به هم نزدیک می‌شوند.



شکل ۹- میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای مدل ۴ لایه غیرهم‌مرکز برای مقادیر مختلف فاصله دوقطبی الکتریکی از مبدا

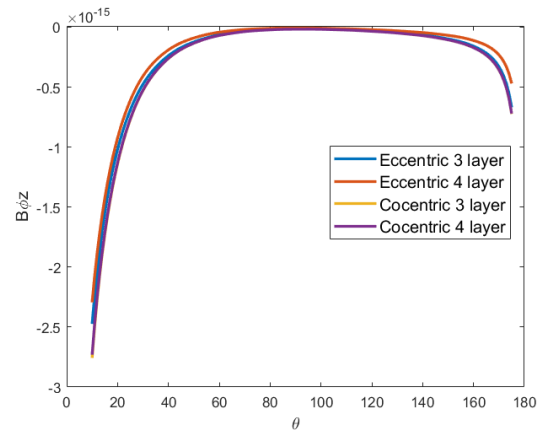
برای بررسی بیشتر و تایید مدل ارائه شده در این مقاله، مدل این مقاله برای افراد با شرایط مختلف که ضرایب هدایت الکتریکی مغز آنها با هم تفاوت دارد، اعمال می‌شود و با هم مقایسه می‌شوند. مقادیر شعاع و ضریب هدایت الکتریکی لایه‌های مختلف برای افراد با شرایط مختلف (بالغ، بچه معمولی، و بچه نارس متولد شده) طبق جدول ۲ انتخاب شد. نمودارهای میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی جریان با ممان  $P_x$  برای افراد با شرایط مختلف، که با استفاده از پارامترهای جدول ۲ به دست آمد، در شکل ۱۰ دیده می‌شود. از نمودارها می‌بینید که برای سه حالت مختلف نمودارها شبیه هم هستند و فقط در نقاط ابتدایی ارتفاع نمودارها در حالت‌های مختلف با هم تفاوت دارد.

جدول ۲- مقادیر پارامترهای مدل کروی برای سر افراد با سنین مختلف [۲۵]

ضریب هدایت الکتریکی (S/m)	شعاع بیرونی لایه (mm)	لایه سر انسان
۰/۳۳	۷۶	مغز بالغ
۰/۵۱	۷۶	مغز بچه معمولی
۰/۵۹	۷۶	مغز بچه نارس
۱/۷۹	۸۰	مایع مغزی
۰/۰۱	۸۸	جمجمه
۰/۴۳	۹۲	پوست

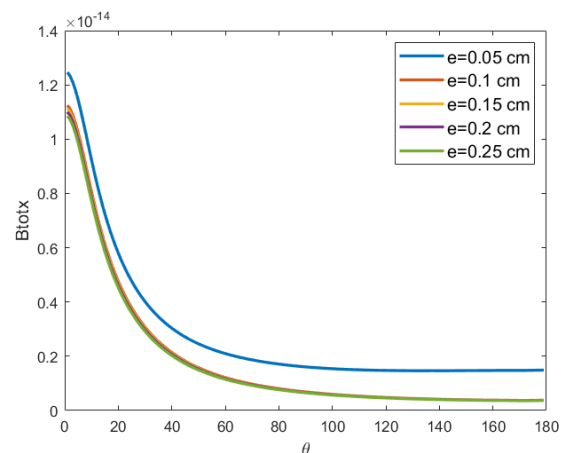
در این شکل هم توافق خوبی بین نمودار مربوط به مدل جدید ارائه شده در این مقاله با نمودار مدل ۳ لایه غیرهم‌مرکز وجود دارد و اختلاف بین نمودارها حتی نسبت به شکل‌های ۳ و ۴ کمتر است. با توجه به اینکه دوقطبی روی محور  $z$  ها ( $\theta=0$ ) قرار دارد. بنابراین میدان مغناطیسی کلی باید در  $\theta=0$  حداکثر مقدار خودش را داشته باشد، که این موضوع را می‌توانید به خوبی در تمام نمودارهای شکل ۶ مشاهده نمایید.

نمودار مولفه  $\phi$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_z$  برای این چهار مدل، در شکل ۷ دیده می‌شود. با توجه به اینکه مدل همگن است، برای حالتی که مدل هم‌مرکز باشد و دوقطبی دارای ممان  $P_z$  باشد میدان مغناطیسی در بیرون سر صفر می‌شود. در مدل ما که یکی از لایه‌های مدل غیرهم‌مرکز است، هم میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_z$  باید کوچک باشد و مقدار آن نزدیک به صفر باشد، که این مورد در شکل ۷ هم دیده می‌شود.



شکل ۷- مولفه  $\phi$  میدان مغناطیسی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_z$  برای چهار مدل مختلف سر انسان

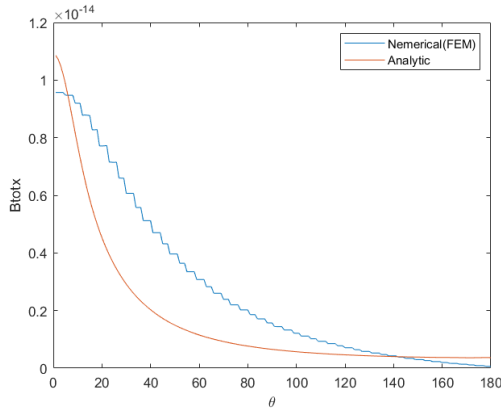
همچنین نمودار مربوط به میزان تغییرات میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی جریان با ممان  $P_x$  نسبت به میزان غیرهم‌مرکز بودن کره داخلی برای مدل ۴ لایه غیرهم‌مرکز، در شکل ۸ دیده می‌شود. همانطور که از شکل ۸ دیده می‌شود، غیر از حالت  $e=0.05$  cm که تقریباً مدل از حالت غیرهم‌مرکز بودن خارج می‌شود و تقریباً هم‌مرکز می‌شود، در بقیه حالات نمودار میدان مغناطیسی کلی نزدیک به هم هستند و برای حالت‌های مختلف که مدل غیرهم‌مرکز است، میدان مغناطیسی کلی شکل‌های مشابه هم دارند.



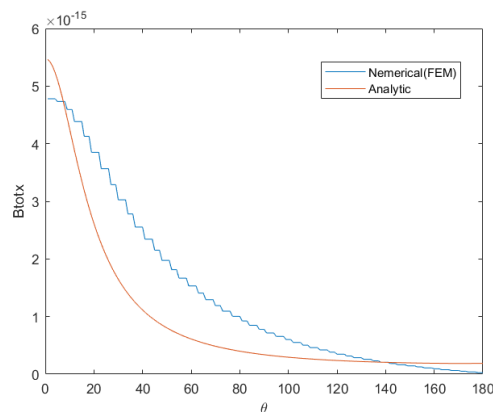
شکل ۸- میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای مدل ۴ لایه غیرهم‌مرکز برای مقادیر مختلف غیرهم‌مرکز بودن



برای هر دو حالت تطبیق خوبی بین نتایج تحلیلی و عددی وجود دارد.



شکل ۱۲: مقایسه روش تحلیلی با مدل ۴ لایه غیر هم مرکز و روش عددی FEM برای دیپل با ممان  $P_x$



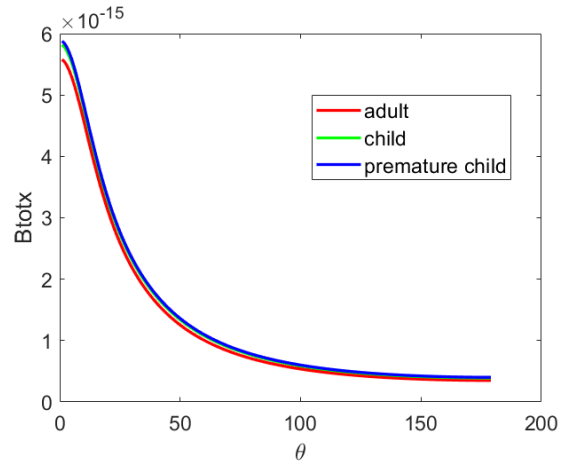
شکل ۱۳: مقایسه روش تحلیلی با مدل ۴ لایه غیر هم مرکز و روش عددی FEM برای دیپل با ممان  $P_y$

### ۱۰- نتیجه گیری

در این مقاله عبارتهایی برای مولفه‌های مختلف میدان مغناطیسی و همچنین میدان مغناطیسی کلی در بیرون یک هادی ناهمگن چند لایه غیر هم مرکز (که به عنوان یک مدلی برای سر انسان می تواند بکار رود) ناشی از دوقطبی جریان با ممان‌های مختلف در داخل آن، بدست آوردیم. همچنین نحوه تغییرات میدان‌های مغناطیسی کلی نسبت به میزان غیرهم‌مرکز بودن لایه غیرهم‌مرکز داخلی، نسبت به فاصله دوقطبی الکتریکی از مبدا مختصات، و نسبت به سن افراد، بررسی شد. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان داد که نمودار میدان مغناطیسی بیرون سر مربوط به مدل ۴ لایه غیرهم‌مرکز که به عنوان مدل جدید برای یافتن میدان مغناطیسی در این مقاله استفاده شد، شبیه نمودار میدان مغناطیسی مربوط به مدل ۳ لایه غیرهم‌مرکز و مدل‌های ۳ و ۴ لایه هم‌مرکز (که در مقالات گذشته از آنها استفاده شد)، می‌باشد و اختلاف کمی بین این نمودارها وجود دارد. بنابراین مدل جدید ارائه شده در این مقاله مورد تایید قرار گرفت.

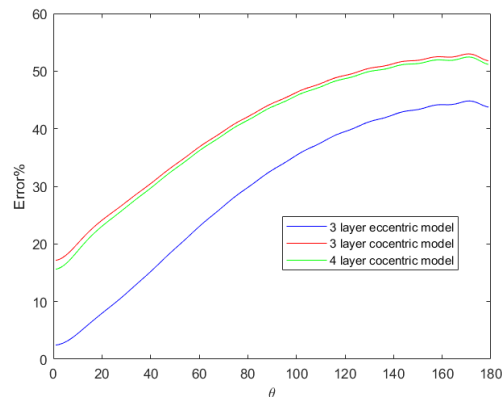
### مراجع

[1] J. Vorwerk, J. Cho, S.Rampp, H. Hamer, T. Knosche, C. Wolters, "A guideline for head volume conductor modeling in EEG and MEG", NeuroImage, vol. 100, pp. 590-607, 2014.  
 [2] C. Wolters, A. Anwander, X. Tricoche, D. Weinstein, M. Koch, R. Macleod, "Influence of tissue conductivity anisotropy on EEG/MEG field and return current computation in a realistic head model: a simulation and visualization study using high-resolution finite element modeling", NeuroImage, vol. 30, no. 3, pp. 813-826, 2006.



شکل ۱۰- میدان مغناطیسی کلی ناشی از دوقطبی با ممان  $P_x$  برای افراد با شرایط مختلف

برای بررسی بیشتر اختلاف بین مدل ۴ لایه ی غیر هم مرکز که در این مقاله ارائه شد، با مدل ۳ لایه ی غیر هم مرکز و با مدل‌های ۳ و ۴ لایه ی هم مرکز، نمودار درصد خطای میزان میدان مغناطیسی کلی ناشی از دیپل با ممان  $P_x$  در شکل ۱۱ آورده شده است. برای دیپل با ممان  $P_y$  هم نمودارها مشابه شکل ۱۱ است. همانطور که از شکل ۱۱ مشاهده می کنید اختلاف بین مدل بین مدل ۴ لایه غیر هم مرکز با سایر مدل‌ها مخصوصاً با افزایش زاویه  $\theta$  زیاد است. بنابراین اصلاح مدل از حالت ۳ لایه به چهار لایه و از حالت هم مرکز به غیرهم مرکز ضروری است.



شکل ۱۱: اختلاف بین مدل ۴ لایه غیر هم مرکز با سایر مدل‌ها

### ۹- مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج عددی

برای تایید مدل تحلیلی ارائه شده در این مقاله نتایج تحلیلی برای مدل ۴ لایه غیر هم مرکز با نتایج حاصل از شبیه سازیهای عددی که با استفاده از روش المان محدود یا FEM انجام شد، مقایسه شد. طبق بررسی ها و شبیه سازیهای فراوان انجام شده توسط اینجانب نرم افزارهایی مثل CST و HFSS و COMSOL، با توجه به مشخصات خاص مساله (یعنی ابعاد در حد چند سانتیمتر، و حالت شبه استاتیک مساله که فرکانس تقریباً صفر است)، مشخص شد که این نرم افزارها برای این منظور مناسب نیست. بنابراین شبیه سازیهای عددی با استفاده از کدنویسی و توسط نرم افزار پایتون به روش عددی انجام شد. در شکل ۱۲ نتایج تحلیلی برای مدل ۴ لایه غیر هم مرکز با نتایج عددی به روش FEM برای دیپل با ممان  $P_x$ ، و همچنین در شکل ۱۳ نتایج تحلیلی برای مدل ۴ لایه غیر هم مرکز با نتایج عددی به روش FEM برای دیپل با ممان  $P_y$  مقایسه شدند. همان‌طور که از شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشاهده می‌کنید

- [15] G. Dassios, A.S. Fokas, "Electro-magneto-encephalography for the three-shell model: a single dipole in ellipsoidal geometry", *Mathematical Methodes in the Applied Science*, vol. 35, no. 12, pp. 1415-1422, 2012.
- [16] G. Dassios, F. Kariotou, "Magnetoencephalography in ellipsoidal geometry", *Journal of Mathematical Physics*, vol. 44, pp. 220-241, 2003.
- [17] A.P. Moneda, M.P. Ioannidou, D.P. Chrissoulidis, "Radio-wave exposure of the human head: analytical study based on a versatile eccentric spheres model including a brain core and a pair of eyeballs", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 50, pp. 667-676, 2003.
- [18] M.P. Ioannidou, D.P. Chrissoulidis, "EM-wave scattering by a sphere with multiple spherical inclusions", *Journal of the Optical Society America A*, vol. 19, no. 3, pp. 505-512, 2002.
- [19] S.H. Hamada, M. Masutani, T. Kobayashi, "Time-harmonic electromagnetic field analysis in multisphere model by gumerov's method of two scalar potentials", *Electrical Engineering in Japan*, vol. 178, no. 2, pp. 168-176, 2012.
- [۲۰] ستار صمدی گرجی، بیژن ذاکری، رضا خانابایی، «مدلسازی الکترومغناطیسی امواج مغزی بر اساس تحلیل تمام موج»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۵۰، شماره ۳، صفحات ۱۳۰۵-۱۳۱۴، ۱۳۹۹.
- [۲۱] سید عابد حسینی، محمدباقر نقیعی سیستانی، محمدرضا اکبرزاده توتونچی، «ارتباط مغز-رایانه دوبعدی مبتنی بر توجه انتخابی دیداری به کمک سیگنال های MEG»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۵، شماره ۲، صفحات ۷۴-۶۵، ۱۳۹۴.
- [22] D.B. Geselowitz, "On the magnetic field generated outside an inhomogeneous volume conductor by internal current sources", *IEEE Transactions on Magnnetics*, vol.9, no.2, pp. 346-347,1970.
- [23] B.N. Cuffin, D. Cohen, "Magnetic fields of a dipole in special volume conductor shapes", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 4, pp. 372-381, 1977.
- [24] J.W. Meijs, O.W. Weier, M.J. Peters, A. D. Van Oosterom, "On the numerical accuracy of the boundary element method (EEG application)", *IEEE transactions on Biomedical Engineering*, vol. 36, no.10, pp. 1038-1049, 1989.
- [25] F. Drechsler, J. Vorwerk, J. Haueisen, L. Grasedyck, C.H. Wolters, "Validation of EEG forward modeling approaches in the presence of anisotropy in the source space", *ArXiv:2208.03081*, 2022.
- [3] M. Alcocer-Sosa, D. Gutiérrez, "Third-order harmonic expansion of the magnetoencephalography forward and inverse problems in an ellipsoidal brain model", *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, vol. 33, no. 4, pp. 281-295, 2017.
- [4] G. Dassios, A.S. Fokas, "Electro-magneto-encephalography for a three-shell model dipoles and beyond for the spherical geometry", *Inverse Problems*, vol. 25, no. 3, pp. 35-54, 2009.
- [5] Z. Zhang, "A fast method to compute surface potentials generated by dipoles within multilayer anisotropic spheres", *Physics in Medicine & Biology*, vol. 40, no. 3, pp. 335-349, 1995.
- [6] P. Berg, M. Scherg, "A fast method for forward computation of multiple-shell spherical head models", *Electroencephy and Clinical Neurophysiology*, vol. 90, no. 1, pp. 58-64, 1994.
- [7] J.C. de Munck, "The potential distribution in a layered anisotropic spheroidal volume conductor", *Journal of Applied Physics*, vol. 64, no. 2, pp. 464-470, 1988.
- [8] J.O. Nieminen, M. Stenroos, "The magnetic field inside a layered anisotropic spherical conductor due to internal sources", *Journal of Applied Physics* vol. 119, no. 2, pp. 239-250, 2016.
- [9] B.N. Cuffin, "Eccentric spheres models of the head", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* vol. 38, no. 9, pp. 871-878, 1991.
- [10] F. Vatta, P. Bruno, P. Inchingolo, "Multiregion Bicentric-Spheres Models of the Head for the Simulation of Bioelectric Phenomena", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 52, no. 3, pp. 384-389, 2005.
- [11] H. Khodabakhshi, A. Cheldavi, "Irradiation of a six-layered spherical model of human head in the near field of a half-wave dipole antenna", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 58, no. 3, pp. 680-690, 2010.
- [12] E. Khodapanah, "Calculation of electromagnetic scattering from an inhomogeneous sphere", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 67, no. 3, pp. 1772-1778, 2018.
- [13] Z.M. Lwin, M. Yokota, "Numerical analysis of SAR and temperature distribution in two dimensional human head model based on FDTD parameters and the polarization of electromagnetic wave", *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, vol.104, pp. 91-98, 2019.
- [14] T. Nara, J. Oohama, M. Hashimoto, T. Takeda, S. Ando, "Direct reconstruction algorithm of current dipoles for vector magnetoencephalography and electroencephalography" *Physics in Medicine & Biology*, vol. 52, pp. 3859-3879, 2007.