تحقیقات مالی
Journal of Financial Research

دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
دورهٔ ۱۷، شمارهٔ ۲
پاییز و زمستان ۱۳۹۴
ص. ۳۴۰- ۳۲۵

کاربرد رویکرد بهینه‌سازی استوار در تشکیل پرتفوی سهام مبتنی بر شاخص با درنظرگرفتن عدم قطعیت پارامترها

سعید فلاح‌پور[۱]، فرید تندنویس[۲]

چکیده: فرایند تشکیل پرتفویی از سهم‌های تشکیل‌دهندهٔ شاخص به گونه‌ای که عملکرد آن شاخص را بازسازی کند، ردیابی شاخص نامیده می‌شود. پرتفوی ردیاب شاخص به طور نسبی از تنوع خوبی برخوردار است و حجم معاملات و هزینهٔ معاملاتی پایینی دارد. این پژوهش مدل برنامه‌ریزی صفر و یک را به منظور تحلیل مسئلهٔ ردیابی شاخص بررسی می‌کند. در این مدل تعداد دارایی‌های مورد نظر برای تشکیل پرتفوی را مدیر سرمایه‌گذاری تعریف می‌کند. به منظور درنظرگرفتن عدم قطعیت ضریب همبستگی بین دارایی‌ها به عنوان ورودی مدل، که دربرگیرندهٔ خطای پیش‌بینی است، از رویکرد بهینه‌سازی استوار استفاده می‌شود. نتایج آزمون خارج از نمونه بر اساس شاخص پنجاه شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار تهران در سال ۱۳۹۲ نشان می‌دهد که درنظرگرفتن این عدم قطعیت با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار عملکرد مدل را بر مبنای معیارهای نسبت اطلاعاتی و خطای ردیابی بهبود می‌بخشد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی استوار، خطای ردیابی، ردیابی شاخص، نسبت اطلاعاتی.

۱. استادیار گروه مالی و بیمه، دانشکدهٔ مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران
۲. دانشجوی کارشناسی‌ارشد مهندسی مالی، دانشکدهٔ مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۲/۱۰
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹٤/۰۱/۱۷
نویسندهٔ مسئول مقاله: فرید تندنویس
E-mail: Farid_ftnk@yahoo.com

Arhive of SID
www.SID.ir

مقدمه

مسئلهٔ تشکیل پرتفویی از سهم‌های یک شاخص که بتواند عملکرد شاخص را بازسازی کند، بدون اینکه تمامی دارایی‌های تشکیل‌دهندهٔ آن شاخص خریداری شود، با عنوان مسئلهٔ ردیابی شاخص معرفی شده‌است. از زمانی که اولین صندوق مبتنی بر شاخص در سال ۱۹۷۰ معرفی شد، این صندوق‌ها سهم خود را در بازار سرمایه افزایش داده‌اند. ردیابی شاخص یکی از روش‌هایی است که برای مدیریت غیرفعال پرتفوی استفاده می‌شود. به‌طور کلی، مدیران صندوق‌های سرمایه‌گذاری از دو رویکرد فعال یا غیرفعال در مدیریت پرتفوی استفاده می‌کنند. در راهبرد فعال، مدیر از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار است و سعی می‌کند در طول زمان سهم‌هایی را شناسایی کند که عملکرد بهتری نسبت به سایر سهم‌ها خواهند داشت. فرض اساسی در این روش آن است که تجربه‌ها و قضاوت‌های شخصی مدیران سرمایه‌گذاری در مورد انتخاب سهم‌هایی با عملکرد مناسب، همچنین تعیین زمان مناسب برای خرید و فروش، ارزش افزوده ایجاد می‌کند. در رویکرد غیرفعال، مدیر از انعطاف‌پذیری کمتری برخوردار است و سعی می‌کند بر مبنای مجموعه‌ای از ضوابط ازپیش‌تعیین‌شده عمل کند. یکی از رایج‌ترین ضوابط در مدیریت غیرفعال صندوق‌های سرمایه‌گذاری این است که صندوق باید با سرمایه‌گذاری در برخی سهم‌های یک شاخص از بازار به طور نسبی، بازدهی به اندازهٔ آن شاخص داشته باشد.

راهبرد فعال هزینهٔ ثابت و هزینه‌های معاملاتی بالایی دارد. همچنین، مشخص است که در راهبرد فعال، سرمایه‌گذار هم در معرض ریسک شرکت و هم در معرض ریسک بازار قرارمی‌گیرد، اما پرتفویی که با استفاده از روش غیرفعال مدیریت می‌شود فقط متأثر از ریسک بازار است. همچنین، در طول بازه‌های زمانی طولانی‌تر، معمولاً شاخص بازدهی مناسبی را برای سرمایه‌گذار ایجاد خواهد کرد. با این توضیحات می‌توان با استفاده از رویکرد غیرفعال و ردیابی شاخص، هزینه‌های معاملاتی را پایین آورد و ریسک تحمیل‌شده به سرمایه‌گذار را تقلیل داد.

یکی از ساده‌ترین راه‌ها برای تکرار عملکرد شاخص با پرتفویی از اوراق بهادار این است که تمام اوراق بهادار آن شاخص را در وزن متناسب با وزن شاخص خریداری و نگهداری کرد. این رویکرد با نام تکرار کامل[1] شناخته می‌شود. واضح است که در این شرایط عملکرد پرتفوی کاملاً منطبق بر عملکرد شاخص خواهد بود. اما با توجه به تعدیلاتی که روی شاخص اتفاق می‌افتد، ترکیب دارایی‌های یک پرتفوی ردیاب کامل دچار دگرگونی می‌شود و این مسئله هزینه‌های معاملاتی بالایی را به مدیر پرتفوی تحمیل می‌کند. به این ترتیب یکی از مهم‌ترین مزیت‌های

1. Full replication

Archive of SID

www.SID.ir

مدیریت غیرفعال (هزینهٔ معاملاتی پایین) ارزش خود را از دست خواهد داد. با کاهش تعداد سهم‌های پرتفوی ردیاب، عملکرد پرتفوی و شاخص فاصله خواهد گرفت. میزان این اختلاف با معیار خطای ردیابی[1] اندازه‌گیری می‌شود. از این‌رو، یکی از روش‌هایی که برای ردیابی شاخص در نظر گرفته شده، استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی جهت کمینه‌کردن خطای ردیابی مورد انتظار است. روش‌هایی همچون استفاده از مدل میانگین- واریانس مارکویتز یا استفاده از مدل‌های عاملی راه‌حل‌های جایگزین دیگری برای این منظور است.

در این مقاله، به منظور بررسی این فرضیه که درنظرگرفتن عدم قطعیت پارامترهای مدل با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار عملکرد پرتفوی تشکیل‌شده را بهبود می‌بخشد، مدلی به منظور تشکیل پرتفوی مبتنی بر شاخص معرفی می‌شود که بر اساس میزان شباهت سهم‌ها، به گروه‌بندی دارایی‌ها می‌پردازیم و از هر گروه یک نماینده انتخاب می‌کنیم. با توجه به اینکه میزان شباهت از طریق ضریب همبستگی بین دارایی‌ها محاسبه شده و این ضریب، به عنوان ورودی مدل، دارای عدم قطعیت است، به منظور درنظرگرفتن این عدم قطعیت از رویکرد بهینه‌سازی استوار استفاده می‌شود.

پیشینهٔ پژوهش

پیشینهٔ نظری

به‌طور کلی، در دنیای نظری مسائل بهینه‌سازی، فرض بر این است که پارامترهای ورودی مدل قطعیت دارد. اما واضح است که برای به‌کاربردن روش‌های بهینه‌سازی در دنیای واقعی فرض قطعیت پارامترها فرض صحیحی نیست (بن-تال، قائویی و نیموروفسکی، ۲۰۰۹)، زیرا:

- برخی داده‌های ورودی (مثل بازده دارایی‌ها در مسائل مالی)، در زمان تحلیل مسئله باید پیش‌بینی شود. مقدار حقیقی پارامتر مورد نظر ممکن است از مقدار پیش‌بینی‌شده نوسان کند. این داده‌ها در برگیرندهٔ خطای پیش‌بینی است.
- برخی داده‌های ورودی (مثل پارامترهای مربوط به فرایندهای فناوری) به‌طور دقیق اندازه‌گیری نمی‌شود. در واقع، این پارامترها حول مقداری اسمی نوسان می‌کند. این داده‌ها در برگیرندهٔ خطای اندازه‌گیری است.

با توجه به توضیحات ارائه‌شده، درنظرگرفتن عدم قطعیت پارامترهای مدل‌های بهینه‌سازی برای به‌کاربردن آن‌ها در واقعیت، مسئلهٔ مهمی است.

---

1. Tracking error

Archive of SID

www.SID.ir

اگر پارامترهای مدل از مقدار اسمی خود نوسان کند، امکان دارد جواب بهینه‌ای که بر اساس مقدار اسمی پارامترها محاسبه شده است، شرایط بهینگی را از دست بدهد یا برخی محدودیت‌ها را نقض کند و از محدودهٔ جواب‌های موجه خارج شود (کورنوجلوس و توتونچی، ۲۰۰۷). موضوع بهینه‌سازی در شرایط عدم قطعیت را دانتزیک (۱۹۵۵) در دههٔ ۱۹۵۰ با ارائهٔ بهینه‌سازی تصادفی و کارنس و کوپر (۱۹۵۹) با ارائهٔ بهینه‌سازی در شرایط محدودیت‌های احتمالی مطرح کردند. این دو رویکرد (بهینه‌سازی تصادفی و بهینه‌سازی در شرایط محدودیت‌های احتمالی) بر فرض «مشخص‌بودن توزیع احتمال پارامترهای تصادفی مدل» بنا شده است. به عبارتی، از اطلاعات موجود برای این پارامترها، برای تبدیل مدل تصادفی به مدل قطعی استفاده می‌شود. مدل قطعی نهایی به صورت برنامه‌ریزی خطی، غیرخطی و جزآن است. امروزه، بهینه‌سازی تصادفی به منزلهٔ یکی از ابزارهای توان‌مند مدل‌سازی عدم قطعیت تحت شرایطی توسعه یافته است که اطلاعات کافی و مشروح در مورد توزیع احتمال پارامترهای مدل مشخص باشد. اما واضح است که در مسائل دنیای واقعی، تصمیم‌گیرنده چنین اطلاعات دقیقی در اختیار ندارد (برتسیماس و تیله، ۲۰۰۶). این مسئله نیاز به روش‌های کمّی را آشکار می‌سازد که عدم قطعیت پارامترهای مدل را بدون نیاز به بررسی توزیع احتمال آن‌ها در نظر می‌گیرد. این رویکرد در متون موضوعی با عنوان بهینه‌سازی استوار بررسی شده است.

بهینه‌سازی استوار

بهینه‌سازی استوار زمانی استفاده می‌شود که تحلیلگر به دنبال جوابی است که به ازای تمامی مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت خوب رفتار کند (شدنی باقی بماند). برخلاف برنامه‌ریزی تصادفی که بر اساس نظریهٔ احتمالات با عدم قطعیت پارامترها رفتار می‌کند، این رویکرد به تمامی مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت، اهمیت یکسان می‌دهد (به عبارتی، این رویکرد، فرضی در مورد توزیع پارامترهای مدل نمی‌نماید). عدم قطعیت پارامترهای مدل در این رویکرد با مجموعهٔ عدم قطعیت توضیح داده می‌شود که دربرگیرندهٔ تمامی مقادیر ممکن برای پارامترهای مدل است (کورنوجلوس و توتونچی، ۲۰۰۷). سیفی، حنفی‌زاده و نوایی (۱۳۸۳) به بررسی یکی از رویکردهای بهینه‌سازی استوار در تشکیل پرتفوی بهینهٔ سهام پرداخته‌اند. فلاح‌پور و تندنویس (۱۳۹۳) نیز رویکرد دیگری در باب بهینه‌سازی استوار و تشکیل پرتفوی بهینهٔ سهام را بررسی کردند.

با توجه به اینکه مدل بررسی‌شده در این مقاله مدل بهینه‌سازی ترکیبی است، رویکرد بهینه‌سازی استوار برای مدل‌های ترکیبی تحلیل می‌شود (برتسیماس و سیم، ۲۰۰۳). بهینه‌سازی

Archive of SID

www.SID.ir

ترکیبی یکی از مهم‌ترین گروه‌های مسائل بهینه‌سازی عدد صحیح و متغیرهای آن {۱ و ۰} است. به‌عبارتی، مدل اولیه عبارت است از:

رابطهٔ ۱) $\min z = c'x$

Subject to

$x \in X$

$x = \{0, 1\}$

همان‌طور که گفتیم، در رویکرد بهینه‌سازی استوار برای هر کدام از پارامترهای دارای عدم قطعیت یک مجموعهٔ عدم قطعیت تعریف می‌شود. بردار $c = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ به‌عنوان پارامترهای ورودی مدل در نظر گرفته می‌شود. در این بخش فرض می‌کنیم که هر کدام از c_jها مقداری در بازه $[c_j, c_j + d_j]$ است که $d_j \geq 0$ را به خود تخصیص می‌دهد. هدف تحلیل این مسئله این است که جواب x را به گونه‌ای پیدا کند که مقدار تابع هدف به ازای این جواب را در شرایطی کمینه کند که حداکثر Γ تعداد از ضرایب c_j از مقدار اسمی خود نوسان کند.

رابطهٔ ۲) $$Z^* = min_x c'x + max_{\{s|s\subset N, |s|\leq \Gamma\}} \sum_{j\in S} d_j . x_j$$

مجموعهٔ s نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ اندیس است که d_j آن‌ها مقداری بیش از صفر به خود تخصیص می‌دهد. به عبارتی، مجموعهٔ اندیس پارامترهای دارای عدم قطعیت است. $|s|$ نشان‌دهندهٔ تعداد اعضای مجموعهٔ s است. در این مدل به Γ تعداد از پارامترها اجازهٔ نوسان داده می‌شود.

در ادامهٔ این بخش به بررسی روش حل مدل می‌پردازیم. بدون اینکه کلیت مسئله از بین برود، فرض می‌شود اندیس‌های j، به ترتیب اندازه مشخص شده است. به عبارتی $d_1 \geq d_2 \geq d_3, \dots$. همچنین، مقدار d_{n+1} را برابر صفر در نظر می‌گیریم. جواب بهینهٔ مدل با تحلیل حد اکثر n+۱ مسئله به صورت زیر محاسبه می‌شود.

رابطهٔ ۳) $$Z^* = min_{j=\{1,2,\dots,n+1\}} G^l$$

که برای مجموعهٔ $l = \{1, 2, \dots, n+1\}$ مقدار G^l به صورت زیر محاسبه می‌شود.

رابطهٔ ۴) $$G^l = \Gamma . d_l + \min\left(c'x + \sum_{j=1}^{l} (d_j - d_l) . x_j \right)$$

Archive of SID

www.SID.ir

برای اینکه مدل (۲) قابل‌استفاده باشد باید مقدار مطلوبی برای پارامتر محافظه‌کاری مدل (Γ) در نظر بگیریم. با توجه به سطح اطمینان تصمیم‌گیرنده، مقدار پارامتر مذکور بر اساس رابطهٔ (۵) محاسبه می‌شود. در این رابطه Φ بیانگر تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد، و ε-۱ بیانگر سطح اطمینان مورد نظر تصمیم‌گیرنده است.

$$\Gamma = 1 + \Phi^{-1}(1-\varepsilon)\sqrt{n}$$ رابطهٔ ۵)

پیشینهٔ تجربی

در متون موضوعی، می‌توان روش‌های ارائه‌شده برای ردیابی شاخص را به سه مجموعهٔ متفاوت تقسیم کرد. یکی از این روش‌ها که در متون موضوعی ردیابی شاخص مورد توجه زیادی بوده است، کمینه‌کردن واریانس اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی به عنوان معیار خطای ردیابی، با استفاده از مدل بهینه‌سازی درجهٔ دوم است (جیسن و فون‌دیک، ۲۰۰۲؛ مید و سالکین، ۱۹۹۰). معیار خطای ردیابی یکی از معیارهای رایج سنجش و ارزیابی عملکرد پرتفوی مبتنی بر شاخص در متون موضوعی است. معمولاً با انحراف استاندارد اختلاف بازده شاخص و بازده پرتفوی محاسبه می‌شود. مید و سالکین (۱۹۹۰) چهار رویکرد متفاوت را بر اساس دو مشخصهٔ طبقه‌بندی دارایی‌ها و شیوهٔ وزن‌دهی به آن‌ها معرفی کردند. گایورنسکی، کریلو و فون‌در ویجست (۲۰۰۵) معیارهای دیگری را خطای ردیابی مطرح کردند و به بررسی عملکرد مدل‌هایی پرداختند که بر اساس این معیارها ساخته شده‌اند. برخی دیگر از پژوهشگران نیز به بررسی پیچیدگی محاسباتی مدل برنامه‌ریزی درجهٔ دوم پرداختند و با استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری، به جواب‌های نزدیک به بهینه دست یافتند (بیزلی، مید و چانگ، ۲۰۰۳). هزینه‌های معاملاتی و بازسازی پرتفوی نیز با استفاده از روش‌های ابتکاری در مقالهٔ دیگری بررسی شده است (گیلی و کلزی، ۲۰۰۲). رودلف، والتر و زیمرمن (۱۹۹۹) نیز با استفاده از مدل خطی به کمینه‌سازی خطای ردیابی پرداختند و با استفاده از قدرمطلق اختلافات به جای واریانس، چهار معیار خطی را معیار اندازه‌گیری خطای ردیابی معرفی کردند.

مجموعهٔ دوم روش‌های ردیابی شاخص در متون موضوعی، استفاده از رویکرد میانگین ـ واریانس مارکویتز است. رول (۱۹۹۲) در مقالهٔ خود به کمینه‌سازی خطای ردیابی با استفاده از رویکرد میانگین- واریانس، با اضافه‌کردن محدودیتی برای بتای پرتفوی ردیاب پرداخته‌است.

در سومین گروه روش‌های ردیابی شاخص، سعی می‌شود که با استفاده از مدل‌های عاملی به نزدیک‌کردن مشخصه‌های پرتفوی ردیاب و شاخص پرداخت. رود (۱۹۸۰) در مقالهٔ خود مدلی

Arrive of SID

www.SID.ir

ابتکاری ارائه کرد که به تشکیل پرتفویی با بتای ۱ و واریانس پس‌ماند کمینه انجامید. همان‌طور که در بخش قبل اشاره کردیم، پرتفوی ردیاب و شاخص باید با یکدیگر تطابق داشته باشد. این مسئله به این مفهوم است که این دو باید نسبت به رویدادهای اقتصادی واکنش یکسان نشان دهند. عبارت فوق بدین معناست که ریسک سیستماتیکی این دو باید با یکدیگر برابر باشد. برابربودن ریسک سیستماتیکی یک پرتفوی و شاخص بدین معناست که بتای پرتفوی باید برابر با ۱ باشد. اردوگان، گولدفارب و اینگار (۲۰۰۴) چندیدن عامل را در مدلی به منظور بیشینه‌سازی شاخص شارپ، و کمینه‌سازی هزینه‌های معاملاتی در نظر گرفتند. در این مدل به منظور پیش‌بینی دقیق‌تر بازده دارایی‌ها از مدل ارزشگذاری دارایی‌های سرمایه‌ای استفاده شده است.

روش‌شناسی پژوهش

مدل مفهومی

رویکرد دیگری که در متون موضوعی ردیابی شاخص بررسی شده است بر اساس شباهت بین دارایی‌ها به گروه‌بندی دارایی‌ها می‌پردازد و از هر گروه یک نماینده انتخاب می‌کند (کورنوجلوس و توتونچی، ۲۰۰۷). معیاری که برای اندازه‌گیری شباهت بین دارایی‌ها استفاده می‌شود، ضریب همبستگی بین دارایی‌هاست. در این مدل فرض می‌شود مدیر پرتفوی قصد دارد از q سهم از n سهم تشکیل‌دهنده شاخص را به منظور تشکیل پرتفوی انتخاب کند. مدل زیر سهم‌ها را به q گروه تقسیم و از هر گروه یک نماینده انتخاب می‌کند. در مدل بهینه‌سازی ترکیبی فوق، اگر مقدار y_j برابر با ۱ باشد، سهم j نماینده انتخاب می‌شود. همچنین، اگر مقدار متغیر x_{ij} برابر با ۱ باشد، سهم j نمایندهٔ سهم i انتخاب شده است.

رابطهٔ ۶)

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} . x_{ij}$$

Subject to

$$(1)\sum_{j=1}^{n} y_j = q$$

$$(2)\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$(3)x_{ij} \le y_j$$

$$x_{ij}, y_j \in (0,1)$$

محدودیت‌های مدل فوق به صورت زیر بررسی می‌شود:

۱. محدودیت اول تعداد سهم‌های انتخابی برای تشکیل پرتفوی را مشخص می‌کند.

Archive of SID

www.SID.ir

۲. مجموعهٔ محدودیت‌های دوم نشان می‌دهد که هر سهم فقط یک نماینده خواهد داشت.
۳. مجموعهٔ محدودیت‌های سوم نشان می‌دهد که اگر سهم j برای تشکیل پرتفوی انتخاب شده باشد، نمایندهٔ سهم‌های دیگر نیز است.

با حل‌کردن مدل فوق، فرایند انتخاب سهم‌های مورد نظر برای تشکیل پرتفوی تکمیل می‌شود. قدم بعدی تعیین وزن این سهم‌ها در پرتفوی یا نسبت سرمایه‌گذاری در هر کدام از این سهم‌های انتخابی است. مقدار w_j یا ارزش بازار برای هر سهم انتخاب به صورت رابطهٔ ۷ محاسبه می‌شود.

رابطهٔ ۷) $$w_j = \sum_{i=1}^{n} v_i \,.\, x_{ij}$$

که مقدار v_i نشان‌دهندهٔ ارزش بازار سهم iام است. با این توضیحات w_j مقدار بیانگر مجموع ارزش بازار سهم‌هایی است که سهم j نمایندهٔ آن‌ها انتخاب شده است. حال که ارزش بازار هر کدام از سهم‌های انتخابی برای پرتفوی محاسبه شد، نسبت سرمایه‌گذاری در هر کدام از سهم‌ها به صورت رابطهٔ ۸ تعریف می‌شود.

رابطهٔ ۸) $$\Phi_j = \frac{w_j}{\sum_{f=1}^{q} w_f}$$

مهم‌ترین مانعی که در مقابل این مدل قراردارد این است که ضریب همبستگی، بر اساس داده‌های تاریخی تخمین‌زده شده و دارای عدم قطعیت است. این عدم قطعیت باید به منظور استفادهٔ دقیق‌تر از مدل بررسی شود.

ساختار و مدل بررسی‌شده در پژوهش

در این پژوهش از رویکرد بهینه‌سازی استوار در رابطهٔ ۳ و ۴ به منظور تحلیل رابطهٔ ۶ استفاده می‌شود. تا نقش عدم‌قطعیت پارامتر ضریب همبستگی بین دارایی‌ها در دقت جواب خروجی مدل بررسی شود. در این مدل مقدار مورد انتظار برای ضرایب تابع هدف عبارت است از مقدار همبستگی زوجی دارایی‌ها. (ρ_{ij}) همچنین، کمترین مقدار مورد نظر برای ضرایب تابع هدف به صورت $\rho_{ij} - d_{ij}$ نشان داده می‌شود که d_{ij} مقداری نامنفی را به خود تخصیص می‌دهد. با توجه به اینکه تابع هدف مسئله انتخاب دارایی‌ها از نوع بیشینه‌سازی است، تابع هدف مسئلهٔ داخلی به صورت کمینه‌سازی نمایش داده می‌شود. با این تفاسیر مدل استوار انتخاب دارایی‌ها به صورت رابطهٔ ۹ خواهد بود.

Arhive of SID

www.SID.ir

رابطهٔ ۹)
$$Z = \max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \rho_{ij} . x_{ij} + min_{\{s|s\subset N, |s|\leq \Gamma\}} \sum_{j\in S} -d_{ij} . x_{ij} \right\}$$

با این مدل فرض اصلی ما بر این است که معیار شباهت (در اینجا همبستگی) بین دو دارایی i و j در بازهٔ $[\rho_{ij} - d_{ij}, \rho_{ij}]$ نوسان خواهد کرد.

به منظور یافتن جواب مدل نیز از روابط ۳ و ۴ به صورت رابطهٔ ۱۰ استفاده می‌شود.

رابطهٔ ۱۰)
$$Z^* = max_{j=\{1,2,\dots,n+1\}} G^l$$
$$G^l = \Gamma . d_l + \max_{x\in X} \left(\rho' x + \sum_{k=1}^{l} (d_k - d_l) . x_k \right)$$

عبارت $x \in X$ نشان‌دهندهٔ مجموعه محدودیت‌های مدل در حالت قطعی است.

با توجه به اینکه مسئلهٔ بیشینه‌سازی داخلی، به مقدار Γ بستگی ندارد، تحلیل مسئله به ازای مقادیر مختلف Γ کاری بسیار ساده خواهد بود که سطح محافظه‌کاری جواب را مشخص می‌کند.

داده‌های مورد استفاده

شاخص پنجاه شرکت فعال‌تر، یکی از شاخص‌های پرکاربرد در بورس اوراق بهادار تهران است. معیارهایی که به منظور انتخاب شرکت‌های تشکیل‌دهندهٔ شاخص استفاده شده عبارت است از:

- نقدشوندگی سهام
- تأثیر سهام بر ارزش جاری بازار
- نسبت‌های مالی، به‌خصوص نسبت‌های سودآوری.

با توجه به اینکه برای انجام این پژوهش به محاسبهٔ بازده روزانه و همبستگی بین بازده روزانه سهم‌ها نیاز است، و با توجه به معیارهای فوق و پرمعامله‌بودن سهم‌های تشکیل‌دهندهٔ شاخص پنجاه شرکت فعال‌تر، این شاخص شاخص هدف به منظور تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص انتخاب شده است.

به منظور تحلیل مدل از اطلاعات قیمت روزانهٔ ۹۰/۷/۱ تا ۹۳/۱/۱ مربوط به شرکت‌هایی استفاده شد که از تاریخ ۹۲/۱/۱ تا ۹۲/۴/۱ به عنوان پنجاه شرکت فعال انتخاب شدند. التون، گروبر و اسپیتزر (۲۰۰۶) نشان دادند که میانگین متحرک سادهٔ ضریب همبستگی بین زوج دارایی‌ها در طول چند دوره به منزلهٔ پیش‌بینی ضریب همبستگی استفاده می‌شود. میانگین متحرک سادهٔ هر متغیر، میانگین ساده (غیرموزون) از مقادیر گذشتهٔ آن متغیر است. برای مثال،

Arhive of SID

www.SID.ir

اگر دورهٔ تناوب ده‌روزه باشد و به منظور پیش‌بینی بازده سهام از فرایند میانگین متحرک استفاده شود، پیش‌بینی بازده سهام در هر روز برابر است با میانگین بازده ده روز گذشتهٔ آن سهم. با توجه به پژوهش التون، گروبر و اسپیتزر (۲۰۰۶) و چن و روی (۲۰۱۰)، به منظور پیش‌بینی مقدار ضریب همبستگی، مقدار همبستگی زوجی تاریخی بین بازده دارایی‌ها محاسبه و میانگین این مقادیر مقدار ρ_{ij} در مدل در نظر گرفته می‌شود. انحراف استاندارد این داده‌ها نیز مقدار d_{ij} در نظر گرفته می‌شود.

معیارهای ارزیابی عملکرد

در این قسمت معیارهای استاندارد (چن و روی، ۲۰۱۰) و استفاده‌شده برای ارزیابی عملکرد پرتفوی استخراج شده از مدل معرفی می‌شود.

به منظور ارزیابی عملکرد پرتفوی از معیار خطای ردیابی استفاده می‌شود. این معیار که از طریق رابطهٔ ۱۱ محاسبه می شود، به بررسی اختلاف عملکرد بازده شاخص و بازده پرتفوی در دورهٔ زمانی مورد آزمون می‌پردازد.

رابطهٔ ۱۱)
$$TE^i = stdev(r_I - r_p) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_p^i - r_I^i)^2}{n}}$$

به منظور ارزیابی عملکرد پرتفوهای تشکیل‌شده از معیار نسبت اطلاعاتی استفاده شده است. مقدار این معیار از طریق رابطهٔ ۱۲ محاسبه می‌شود.

رابطهٔ ۱۲)
$$IR^i = \frac{r_p^i - r_I^i}{TE^i}$$

در معیارهای معرفی‌شده مقدار r_I^i نشان‌دهندهٔ بازده شاخص در دورهٔ iام و r_p^i نشان‌دهندهٔ بازده پرتفوی ردیاب در دورهٔ iام و TE^i نشان‌دهندهٔ مقدار خطای ردیابی در دورهٔ iام است.

یافته‌های پژوهش

پس از تخمین پارامتر ضریب همبستگی و مقدار نوسان آن از طریق داده‌های بازهٔ زمانی ۱۳۹۰/۰۷/۰۱ الی ۱۳۹۲/۰۱/۰۱ مدل ۲ به ازای مقدار پارامتر محافظه‌کاری برابر با ۱۵ (سطح اطمینان ۹۷/۵) و صفر (مدل غیر استوار) تحلیل می‌شود. تعداد دارایی‌های تشکیل‌دهندهٔ پرتفوی برابر با ۱۰ در نظر گرفته می‌شود. وزن‌های استخراج‌شده، برای آزمون خارج از نمونهٔ مدل (بازهٔ زمانی ۱۳۹۲/۰۱/۰۱ لغایت ۱۳۹۲/۰۴/۰۱) استفاده می‌شود. در قدم بعدی، داده‌های تاریخ

Arhive of SID

www.SID.ir

۱۳۹۰/۱۰/۰۱ لغایت ۱۳۹۲/۰۴/۱/۰ به منظور تخمین پارامترهای مدل و داده‌های تاریخ ۱۲۹۲/۰۴/۰۱ لغایت ۱۳۹۲/۰۷/۰۱ برای آزمون خارج از نمونه استفاده می‌شود. این فرایند تا تاریخ ۱۳۹۳/۰۱/۰۱ ادامه پیدا می‌کند. مقایسهٔ پرتفوی استوار و پرتفوی نااستوار در سطح اطمینان ۹۷/۵ درصد انجام می‌شود. به منظور این مقایسه از آزمون مقایسهٔ زوجی استفاده شده است. با توجه به این سطح اطمینان، مقایسهٔ بین پرتفوی معرفی‌شده به ازای $\Gamma=0$ و $\Gamma=15$ انجام می‌شود.

در بخش‌های بعدی نتایج این مقایسه‌ها آمده است. جدول‌های ۱ تا ۴ شیوهٔ محاسبهٔ این معیارهای را برای هر کدام از پرتفوها در بازه‌های زمانی متفاوت نشان می‌دهد.

جدول ۱. محاسبهٔ خطای ردیابی و نسبت اطلاعاتی پرتفوهای استوار و نااستوار در دورهٔ زمانی اول

داده‌های مورد استفاده برای تخمین	تاریخ	بازده پرتفوی استوار	بازده پرتفوی نااستوار	بازده شاخص
۱۳۹۰/۰۷/۰۱ الی ۱۳۹۲/۰۱/۰۱	فروردین ۹۲	٪۵/۴۲	٪۸/۷۷	٪۰/۹۷
	اردیبهشت ۹۲	٪۴/۷۵	٪۴/۸۶	-٪۱/۵۹
	خرداد ۹۲	٪۲۵/۷۴	٪۲۷/۵۹	٪۱۱/۹۲
پرتفوی استوار		خطای ردیابی		٪۴/۰۴
		نسبت اطلاعاتی		۲/۰۲۷۷۴۳
پرتفوی نااستوار		خطای ردیابی		٪۴/۰۷
		نسبت اطلاعاتی		۲/۴۵۱۹۴۹

جدول ۲. محاسبهٔ خطای ردیابی و نسبت اطلاعاتی پرتفوهای استوار و نااستوار در دورهٔ زمانی دوم

داده‌های مورد استفاده برای تخمین	تاریخ آزمون خارج از نمونه	بازده پرتفوی استوار	بازده پرتفوی نااستوار	بازده شاخص
۱۳۹۰/۱۰/۰۱ الی ۱۳۹۲/۰۴/۰۱	تیر ۹۲	٪۱۲/۷۴	٪۱۴/۴۶	٪۱۵/۹۹
	مرداد ۹۲	٪-۱/۰۲	٪-۳/۸۲	٪۰/۵۱
	شهریور ۹۲	٪-۱/۷۹	٪-۳/۴۴	٪۰/۴۲
پرتفوی استوار		خطای ردیابی		٪۰/۸۵
		نسبت اطلاعاتی		-۲/۳۹۹۲۷
پرتفوی نااستوار		خطای ردیابی		٪۱/۱۵
		نسبت اطلاعاتی		-۲/۵۸۱۷۴

Archive of SID

www.SID.ir

جدول ۳. محاسبهٔ خطای ردیابی و نسبت اطلاعاتی پرتفوهای استوار و نااستوار در دورهٔ زمانی سوم

داده‌های مورد استفاده برای تخمین	تاریخ آزمون خارج از نمونه	بازده پرتفوی استوار	بازده پرتفوی نااستوار	بازده شاخص
۱۳۹۱/۰۱/۰۱ الی ۱۳۹۲/۰۷/۰۱	مهر ۹۲	٪۶/۷۵	٪۶/۵۹	٪۷/۸۳
	آبان ۹۲	٪۱۷/۰۶	٪۱۷/۷۱	٪۱۱/۷۸
	آذر ۹۲	٪۲۰/۸۸	٪۲۱/۶۲	٪۱۵/۵۲
پرتفوی استوار		خطای ردیابی		٪۳/۰۲
		نسبت اطلاعاتی		۱/۰۵۶۴۸۳
پرتفوی نااستوار		خطای ردیابی		٪۳/۴۲
		نسبت اطلاعاتی		۱/۰۵۱۸۰۷

جدول ٤. محاسبهٔ خطای ردیابی و نسبت اطلاعاتی پرتفوهای استوار و نااستوار در دورهٔ زمانی چهارم

داده‌های مورد استفاده برای تخمین	تاریخ آزمون خارج از نمونه	بازده پرتفوی استوار	بازده پرتفوی نااستوار	بازده شاخص
۱۳۹۱/۰۴/۰۱ الی ۱۳۹۲/۱۰/۰۱	دی ۹۲	٪۶/۷۵	٪۶/۵۹	٪۷/۸۳
	بهمن ۹۲	٪۱۷/۰۶	٪۱۷/۷۱	٪۱۱/۷۸
	اسفند ۹۲	٪۲۰/۸۸	٪۲۱/۶۲	٪۱۵/۵۲
پرتفوی استوار		خطای ردیابی		٪۳/۹۸
		نسبت اطلاعاتی		-۰/۹۳۴۵۱۵
پرتفوی نااستوار		خطای ردیابی		٪۳/۳۳
		نسبت اطلاعاتی		-۱/۲۳۱۹۲

با توجه به توضیحات فوق، در ادامه به انجام آزمون مقایسهٔ زوجی بین این دو پرتفوی می‌پردازیم. این آزمون بدین منظور انجام می‌شود که فرضیهٔ کاهش مقدار خطای ردیابی و افزایش نسبت اطلاعاتی با مدل استوار بررسی شده است.

به منظور انجام آزمون مقایسهٔ زوجی بر اساس خطای ردیابی اختلاف خطای ردیابی در هر دوره محاسبه و بین مقادیر دوره‌های مختلف میانگین گرفته می‌شود. انحراف استاندارد این مقادیر نیز به منظور محاسبهٔ مقدار آماره در رابطهٔ ۱۳ محاسبه می‌شود.

رابطهٔ ۱۳)
$$t = \frac{\mu_D}{S_D/\sqrt{n}}$$

Arhive of SID

www.SID.ir

آزمون فرضیهٔ مذکور به صورت رابطهٔ ۱۴ انجام می شود. در این آزمون، ردشدن فرض صفر بدین مفهوم است که مدل استوار در کاهش مقدار خطای ردیابی پرتفوی استوار موفق نبوده است.

$$\begin{cases} H_0: \mu_D \leq 0 \\ H_1: \mu_D > 0 \end{cases}$$

رابطهٔ ۱۴)

نتایج آزمون فرضیهٔ فوق در جدول ۵ بررسی شده است.

جدول ۵. محاسبات مورد نیاز برای آزمون مقایسه‌ای زوجی خطای ردیابی

دورهٔ زمانی	خطای ردیابی پرتفوی نااستوار	خطای ردیابی پرتفوی استوار	اختلاف خطای ردیابی
دورهٔ اول	٪۴/۰۷	٪۴/۰۴	٪۲/۰۲
دورهٔ دوم	٪۱/۱۵	٪۰/۸۵	٪۰/۲۹
دورهٔ سوم	٪۳/۴۲	٪۳/۰۲	٪-۰/۴۰
دورهٔ چهارم	٪۳/۴۲	٪۳/۹۸	٪۰/۵۶
میانگین اختلافات			٪-۰/۰۴
انحراف استاندارد اختلافات			٪۰/۴۳

جدول ٦. نتایج آزمون مقایسه‌ای زوجی خطای ردیابی

میانگین اختلافات	انحراف معیار اختلافات	مقدار آمارهٔ آزمون	ناحیهٔ پذیرش	مقدار P
٪-۰/۰۴	٪۰/۴۳	-۰/۰۴۶۳۹	(-∞ , ۳/۱۸۲]	٪۵۱/۷۰

با این توضیحات، دلیلی برای ردشدن فرض صفر وجود ندارد. به عبارتی، مدل استوار توانسته است مقدار خطای ردیابی را نسبت به مدل نااستوار کاهش دهد.

در این قسمت از پژوهش به بررسی نسبت اطلاعاتی پرتفوی‌های استخراجی می‌پردازیم.

جدول‌های ۷ و ۸ محاسبات و نتایج آزمون مقایسه‌ای زوجی دو پرتفوی استوار و نااستوار به ازای Γ=۱۵ (سطح محافظه‌کاری ۹۷/۵ درصد) را نشان می‌دهد. آزمون فرضیهٔ مذکور به صورت رابطهٔ ۱۵ انجام می شود. در این آزمون، ردشدن فرض صفر بدین مفهوم است که مدل استوار در افزایش مقدار نسبت اطلاعاتی پرتفوی نسبت به پرتفوی نااستوار موفق نبوده است.

Arnive of SID

www.SID.ir

$$\begin{cases} H_0: \mu_D \geq 0 \\ H_1: \mu_D < 0 \end{cases}$$

رابطهٔ ۱۵)

جدول۷. محاسبات مورد نیاز برای آزمون مقایسه‌ای زوجی نسبت اطلاعاتی

دورهٔ زمانی	نسبت اطلاعاتی پرتفوی استوار	نسبت اطلاعاتی پرتفوی نا استوار	اختلاف نسبت اطلاعاتی
دورهٔ اول	۲/۰۲۷۷۴۳	۲/۴۵۱۹۴۹	-۰/۴۲۴۲۱
دورهٔ دوم	-۲/۳۹۹۲۷	-۲/۵۸۱۷۴	۰/۱۸۲۴۷۱
دورهٔ سوم	۱/۰۵۶۴۸۳	۱/۰۵۱۸۰۷	۰/۰۰۴۶۷۶
دورهٔ چهارم	-۰/۹۳۴۱۵	-۱/۲۳۱۹۲	۰/۲۹۷۷۷۴
	میانگین اختلافات		۰/۰۱۵۱۷۹
	انحراف استاندارد اختلافات		۰/۲۷۴۳۲۵

جدول ۸. نتایج آزمون مقایسه‌ای زوجی نسبت اطلاعاتی

میانگین اختلافات	انحراف معیار اختلافات	مقدار آمارهٔ آزمون	ناحیهٔ پذیرش	مقدار P
۰/۰۱۵۱۷۹	۰/۲۷۴۳۲۵	۰/۰۲۷۶۶۵	[-۳/۱۸۲و∞]	٪۴۸/۹۸

با توجه به نتایج آزمون، مشاهده می‌شود که دلیلی برای ردکردن فرض صفر وجود ندارد. به عبارتی، مدل استوار در افزایش نسبت اطلاعاتی، موفق بوده است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش با استفاده از مدل بهینه‌سازی استوار و تکیه بر مهم‌ترین ویژگی این رویکرد که در شرایط عدم قطعیت در مورد توزیع احتمال پارامترهای مدل، فرض خاصی را منظور نمی‌کند و برای هر پارامتر یک مجموعه عدم قطعیت در نظر می‌گیرد، به تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص پرداخته‌ایم و مدلی ریاضی به منظور تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص معرفی می‌شود. در نظر نگرفتن فرض خاصی در مورد توزیع پارامترهای دارای عدم قطعیت امکان اطمینان بیشتر به نتایج حاصل از مدل را برای تصمیم‌گیرنده فراهم می‌کند. نتایج آزمون خارج از نمونه نشان داد که در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار عملکرد پرتفوی استخراج‌شده از مدل را هم از لحاظ خطای ردیابی پایین‌تر و هم از لحاظ نسبت اطلاعاتی بالاتر،

Arhive of SID

www.SID.ir

بهبود بخشیده است. این نتایج نشان می‌دهد که مدیر سرمایه‌گذاری که بر اساس فرایند ردیابی شاخص عمل می‌کند و رویکرد منفعلانه را انتخاب کرده است، با استفاده از رویکرد بهینه‌سازی پایدار به‌منظور درنظرگرفتن عدم قطعیت پارامترهای مدل، نسبت به بازسازی عملکرد شاخص، اطمینان بیشتری دارد.

از جمله محدودیت‌های پژوهش می‌توان به محدودیت‌های اطلاعاتی مانند بسته‌شدن نمادهای معاملاتی و عدم‌دسترسی به اطلاعات شرکت‌ها در برخی بازه‌های زمانی اشاره کرد. همچنین، از جمله دیگر محدودیت‌های این پژوهش می‌توان به پیچیدگی محاسباتی مدل اشاره کرد. تعداد متغیرهای تصمیم در این مدل ریاضی (با توجه به درنظرگرفتن همبستگی زوجی بین دارایی‌ها به عنوان ورودی مدل) برابر با $\binom{n}{2} + n$ است که در آن n نشان‌دهندهٔ تعداد سهم‌های تشکیل‌دهندهٔ شاخص است. هرچه تعداد سهم‌های تشکیل‌دهندهٔ شاخص بیشتر باشد، پیچیدگی محاسباتی مدل نیز با توجه به افزایش تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای تصمیم بیشتر خواهد بود.

در پژوهش‌های آتی لازم است تعدیلات انجام‌شده روی شاخص و هزینه‌های معاملاتی بررسی شود که با این تعدیلات به مدیر پرتفوی تحمیل می‌شود. همچنین، مقایسهٔ رویکردهای مختلف بهینه‌سازی در شرایط عدم قطعیت مانند رویکرد فازی یا برنامه‌ریزی تصادفی لازم است در پژوهش‌های آتی معرفی شود.

References

Beasley, J.E., Meade, N. & Chang, T.J. (2004). An evolutionary heuristic for the index tracking problem. *European Journal of Operational Research,* 148 (3): 621-643.

Ben-Tal, A., El Ghaoui, L. & Nemirovski, A. (2009). *Robust optimization*, Princeton University Press.

Bertsimas, D. & Sim, M. (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical programming,* 98(3-1): 49-71.

Bertsimas, D. & Thiele, A. (2006). Robust and data-driven optimization: Modern decision-making under uncertainty. *INFORMS Tutorials in Operations Research: Models, Methods, and Applications for Innovative Decision Making*. Available in: http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/educ.1063.0022.

Charnes, A. & Cooper, W.W. (1959). Chance-constrained programming. *Management science,* 6(1): 73-79.

Chen, C. & Roy, H. (2010). Robust portfolio selection for index tracking. *Coputers and Operatione research,* 39: 829- 837.

Arhive of SID

www.SID.ir

Cornuejols, G. & Tutuncu, R. (2007). *Optimization methods in finance,* Cambridge University Press.

Dantzig, G.B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management science,* 1(4-3): 197-206.

Elton, E.J., Gruber, M.J. & Spitzer, J. (2006). Improved estimates of correlation coefficients andtheir impact on optimum portfolios. *European Financial Management,* 12(3): 303-318.

Erdogan, E., Goldfarb, D. & Iyengar, G. (2004). *Robust portfolio management.*

Fallahpour, S. & Tondnevis, F. (2014). Robust model for optimal portfolio selection, J*ournal of Investment Knowledg,* 10, 67-84.

Gaivoronski, A.A., Krylov, S. and van der Wijst, N. (2005). Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. *European Journal of operational research,* 163(1): 115-131.

Gilli, M. & Këllezi, E. (2002). The threshold accepting heuristic for index tracking. *Financial Engineering, E-Commerce and Supply Chain*, Springer**:** 1-18.

Jansen, R. & van Dijk, R. (2002). Optimal benchmark tracking with small portfolios. *The journal of portfolio management,* 28(2): 39-33.

Meade, N. & Salkin, G.R. (1990). Developing and maintaining an equity index fund. *Journal of the Operational Research Society*, 599-607.

Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error. *Journal of Portfolio Management,* 18(4): 13-22.

Rudd, A. (1980). Optimal selection of passive portfolios. *Financial Management,* 57-66.

Rudolf, M., Wolter, H.J. & Zimmermann, H. (1999). A linear model for tracking error minimization. *Journal of Banking & Finance,* 23(1): 85-103.

Seyfi, A., Hanafizadeh, P. & Navayi, H. (2004). Single period Robust model for portfolio selection. *Journal of Financial Researches*, 17: 71-95. (*in Persian*)

Arhive of SID

www.SID.ir