تحقیقات مالی

Journal of Financial Research

DOI: 10.22059/jfr.2017.207047.1006201

دانشکدۀ مدیریت دانشگاه تهران

دورۀ ۱۹، شمارۀ ۱

بهار ۱۳۹۶

صص. ۹۶- ۸۱

سنجش ریسک شاخص گروه بانکی با استفاده از تخمین نوسانات بازده با مدل نوسانات تصادفی: رویکرد نیمه‌پارامتری بیزی

سید رسول سجاد[۱]، سیده زهرا ابطحی[۲]

چکیده: با توجه به کاربرد توزیع بازدهی در محاسبۀ معیارهای ریسک و وابستگی دقت تخمین این معیارها به صحت توزیع بازده، برآورد صحیح آن همواره در کانون توجه پژوهشگران بوده است. با وجودی که استفاده از مدل پارامتری نوسانات تصادفی به‌منظور تخمین نوسانات بازده در مطالعات پیشین متداول است، فرض مذکور اغلب به نتایجی با دقت کافی منجر نمی‌شود، بنابراین در این تحقیق برخلاف فرض معمول پارامتری بودن توزیع جملات اخلال در مدل نوسانات تصادفی، با بهره گیری از رویکرد نیمه‌پارامتری بیزی، به تخمین جملات اخلال پرداخته شده است. در پژوهش حاضر توزیع لگاریتم مربع بازده شاخص گروه بانکی با به‌کارگیری آمیخته‌ای از توزیع‌های خانوادۀ نرمال و با استفاده از زنجیرۀ مارکف مونت‌کارلو مدل‌سازی شد و در نهایت نتایج آن با مدل نوسانات تصادفی نرمال، مقایسه گردید. نتایج این بررسی نشان می‌دهد، در مواقعی که توزیع بازده دارای چولگی باشد، مدل نیمه‌پارامتری نوسانات را دقیق‌تر تخمین می‌زند، ضمن آن که در شرایطی که توزیع بازده به توزیع نرمال نزدیک باشد، نتایج مدل حاضر، مشابه نتایج مدل نیمه‌پارامتری با فرض توزیع نرمال خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: ***ارزش در معرض خطر، الگوریتم زنجیرۀ مارکف مونت‌کارلو، بازده دارایی، فرایند دیریکله، مدل نوسانات تصادفی.***

۱. استادیار مهندسی مالی، دانشکدۀ فنی و مهندسی دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران

۲. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشکدۀ فنی و مهندسی، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۲۵

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۱۲/۱۸

نویسندۀ مسئول مقاله: سیده زهرا ابطحی

E-mail: sz.abtahi1@gmail.com

مقدمه

خانوادهٔ مدل‌های گارچ و نوسانات تصادفی، از متداول‌ترین مدل‌ها در مدل‌سازی نوسانات بازده هستند که توزیع جملات اخلال آنها معمولاً نرمال فرض می‌شود. یکی از اشکالات وارد بر این مدل‌ها، همان فرض پارامتری‌بودن توزیع جملات اخلال، یعنی فرض ثبات توزیع جملات اخلال است و همان‌طور که اشاره شد، این توزیع ثابت معمولاً نرمال فرض می‌شود. اشکال اساسی این فرض، در نظر نگرفتن ویژگی‌های بازده دارایی‌های مالی نظیر چولگی، عدم تقارن، کشیدگی، نوسانات خوشه‌ای و اثر اهرمی است. البته در پژوهش‌های پیشین به‌منظور در نظر گرفتن چولگی در تخمین جملات اخلال، از توزیع‌هایی نظیر کای‌دو و سایر توزیع‌های دارای چولگی استفاده شده است؛ اما این مدل‌ها تنها قادرند چولگی را تقریب بزنند و از معرفی سایر ویژگی‌های بازده بازمی‌مانند، به همین دلیل از دقت کافی برخوردار نیستند.

بررسی‌های بیشتر در پیشینهٔ پژوهش نشان می‌دهد استفاده از مدل‌های نیمه‌پارامتری و ناپارامتری که توزیع بازده را ثابت فرض نمی‌کنند، ضمن آن که ویژگی‌های بازده دارایی‌های مالی را به خوبی نشان می‌دهند، به نتایج دقیق‌تری می‌انجامند. از طرفی مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از مدل‌های ناپارامتری خانوادهٔ گارچ و نوسانات تصادفی نشان می‌دهد در بیشتر موارد، مدل نوسانات تصادفی توانسته است نوسانات بازده را با دقت مشابه یا حتی بیشتر از مدل‌های خانوادهٔ گارچ برآورد کند. بنابراین به نظر می‌رسد مدل‌های ناپارامتری و نیمه‌پارامتری نوسانات تصادفی برای تقریب نوسانات بازده مناسب باشند.

با این حال، با توجه به اهمیت دقت تخمین نوسانات بازده دارایی‌های مالی، لازم است پژوهش بیشتری در حوزهٔ افزایش دقت تخمین نوسانات بازده صورت گیرد؛ زیرا تقریب نوسانات بازده با دقت ناکافی، می‌تواند به نابودی سرمایهٔ افراد فعال در بازارهای مالی منجر شود. همچنین از آنجا که نوسان، سنجه‌ای برای اندازه‌گیری ریسک به‌شمار می‌رود، مدل‌سازی نوسانات در مدیریت ریسک موضوعی بااهمیت تلقی می‌شود و در ادبیات موضوع، بسیار در کانون توجه قرار گرفته است. برای مثال، بانک‌ها و سایر مؤسسه‌های مالی به‌منظور ارزیابی ریسک، از مدل‌های ارزش در معرض خطر که بر اساس تخمین نوسانات محاسبه می‌شوند، استفاده می‌کنند. به سخن دیگر، مدل‌سازی و پیش‌بینی ساختار نوسانات بازده دارایی در مدیریت ریسک و حوزه‌های مشابه، امری بسیار مهم است. ضمن اینکه تاکنون بحران‌های مالی بسیاری در کشورهای مختلف به وقوع پیوسته است که تمام این بحران‌ها ویژگی مشترکی داشته‌اند و آن افزایش شایان توجه نوسانات بازده بازار بحران‌زده بوده است. بنابراین چه بسا توجه به نوسانات بازده بتواند در پیش‌بینی این بحران‌ها و جلوگیری از آنها مؤثر واقع شود. از این رو، در پژوهش حاضر به‌منظور

افزایش دقت تقریب نوسانات بازده از مدل پیشنهاد شدهٔ دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) استفاده شده است. در این مدل، توزیع مربع لگاریتم بازده با به‌کارگیری آمیختهٔ نامتناهی از توزیع‌های خانوادهٔ نرمال و با استفاده از زنجیرهٔ مارکف مونت‌کارلو مدل‌سازی شده است. در نتیجه، توزیعی برای بازده به‌دست می‌آید که توزیع پسین نامیده می‌شود و چولگی را با دقت خوبی تقریب می‌زند. هدف از اجرای این پژوهش، بررسی عملکرد و کارایی مدل نیمه‌پارامتری ارائه شدهٔ دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) نسبت به مدل نوسانات تصادفی با فرض توزیع نرمال، برای شاخص گروه بانکی است.

مقاله با بیان مختصر پیشینهٔ پژوهش ادامه می‌یابد. در بخش روش‌شناسی پژوهش، ابتدا فرایند دیریکله و کاربرد آن در مدل‌سازی آمیخته ارائه شده و پس از آن، مدل نیمه‌پارامتری نوسانات تصادفی و الگوریتم زنجیرهٔ مارکف مونت‌کارلو دلاتولا و گریفین و نحوهٔ محاسبهٔ ارزش در معرض خطر توضیح داده می‌شود. در بخش یافته‌های پژوهش، نتایج به‌دست آمده از اجرای مدل برای شاخص گروه بانکی با نتایج مدل پارامتری مقایسه شده و آزمون‌های پسرو برای آنها انجام می‌شود. در نهایت در بخش نتیجه‌گیری، نتایج پژوهش تحلیل شده و پیشنهادهایی ارائه خواهد شد.

پیشینهٔ پژوهش

بازده دارایی‌های مالی دارای ویژگی‌هایی است که از آن جمله می‌توان به تغییرپذیری انحراف معیار بازده لگاریتمی با زمان اشاره کرد که درنظر گرفتن این ویژگی بازده یکی از اصلی‌ترین ویژگی‌های مدل نوسانات تصادفی است. انتشار نخستین مدلی که نشان‌دهندهٔ نوسانات متغیر با زمان باشد، به تیلور (۱۹۸۲) بازمی‌گردد که به وسیلهٔ فرایند خودهمبستهٔ مرتبهٔ اول، به مدل‌سازی لگاریتم نوسانات پرداخته است. استفاده از فرایند خودهمبسته را می‌توان به‌عنوان نمایش جریانی تصادفی و ناهموار از اطلاعات جدید تفسیر کرد. مدل تیلور عبارت است از:

رابطهٔ ۱)
$$y_t = \beta e^{\frac{h_t}{2}} \varepsilon_t$$
$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t$$

که در آن $y_1, y_2, \dots, y_n$ نشان‌دهندهٔ بازده‌های لگاریتمی دارایی؛ h_t معرف نوسانات لگاریتمی در زمان t و ε_t و η_t متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند. ϕ نیز پارامتر مقاومت است و برای اینکه فرایند مانا باشد، باید مقداری بین ۱ و ۱− اتخاذ کند که در این صورت توزیع مانای h_t دارای میانگین μ و واریانس $\sigma_\eta{}^2/(1-\phi^2)$ خواهد بود.

معمولاً توزیع ε_t و η_t نرمال فرض می‌شود؛ اگرچه در ادبیات موضوع به فرض نرمال بودن ε_t انتقاد شده و توزیع‌های دنبالهٔ بلندتری به‌عنوان جایگزین پیشنهاد شده‌اند. برای مثال، ناکاجیما و امری (۲۰۰۹) و جکوایر، پولسن و راسی (۲۰۰۳)، توزیع جملات اخلال را تی. استیودنت فرض کردند؛ باراندرف (۱۹۹۷) از توزیع معکوس نرمال گوسی استفاده کرد؛ ماهیو و اسکاتمن (۱۹۹۸) آمیختهٔ نرمال را جایگزین کردند و آبانتو، بندیوپادهیای، لاچس و انریکز (۲۰۱۰) آمیختهٔ مقیاس نرمال با پارامترهای آمیزش متفاوت را به‌کار بردند.

استفاده از تابع درستنمایی در مدل نوسانات تصادفی معرفی شده در رابطهٔ ۱ بسیار دشوار است؛ به‌طوری که در تعبیر بیزی به‌عنوان مشکلی معروف، مطرح است. در ادبیات این موضوع رویکردهای محاسباتی بسیاری برای رفع این مشکل به چشم می‌خورد و پژوهشگران بسیاری به‌کمک زنجیرهٔ مارکف مونت‌کارلو به حل این مسئله اقدام کرده‌اند[1]. جکوایر، پولسن و راسی (۱۹۹۴) الگوریتم تک‌مرحله‌ای و دوره‌ای متروپولیس ـ هستینگ را برای رفع این مشکل معرفی کردند؛ اما شفرد و کیم (۱۹۹۴) نشان دادند، زمانی که پارامتر مقاومت مقادیری نزدیک به ۱ و واریانس مقادیری بسیار کوچک اتخاذ می‌کنند، لگاریتم نوسانات دارای همبستگی است و الگوریتم معرفی‌شده خروجی‌های همبسته تولید می‌کند. کیم، شفرد و چیب (۱۹۹۸) برای نمونه‌گیری طرحی پیشنهاد دادند که با خطی‌سازی مدل، نوسانات لگاریتمی را به‌صورت همزمان به‌روز می‌کرد.

در این رویکرد، کیم و همکارانش با لگاریتم‌گیری از مربع مشاهدات، مدل اصلی نوسانات تصادفی را در قالب مدلی با فضایی در حالت خطی ارائه دادند.

رابطهٔ ۲) $y_t^* = log y_t^2$

$y_t^* = h_t + z_t$ برای $t = 1 \ldots n$،

که در آن، $z_t = log\,\varepsilon_t^2$. اگر ε_t^2 دارای توزیع نرمال باشد، توزیع z_t به شکل $log\,\chi_1^2$ خواهد بود. بنابراین روش‌های فیلترسازی کالمن را نمی‌توان به‌طور مستقیم استفاده کرد. کیم و همکارانش (۱۹۹۸) و امری، چیب، شفرد و ناکاجیما (۲۰۰۷) به‌منظور تقریب این توزیع، به‌کارگیری آمیخته‌ای از توزیع نرمال را پیشنهاد می‌دهند. چنین رویکردی امکان تعریف یک الگوریتم چندحالتی را فراهم می‌کند که تمام نوسانات لگاریتمی را با به‌کارگیری الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی[2] به‌صورت هم‌زمان به‌روز می‌کند. مشکلی که با این

---

۱. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به بروتو و رویز (۲۰۰۴) مراجعه کنید.

2. Filtering Forward Backward Sampling (FFBS)

تغییر پارامتر ایجاد می‌شود این است که بازده‌ها می‌توانند مقادیری نزدیک بـه صـفر یـا حتـی در مواردی برابر با صفر اختیار کنند؛ چنین اتفاقی موجب می‌شود که مقادیر تبدیل شده، بسیار منفی شوند یا تعریف نشده باقی بمانند. فولر (۱۹۹۶) این مشکل را با تعریف پارامتر c بـه‌صـورت زیـر مرتفع کرد:

رابطهٔ ۳) $$y_t^* = log(y_t^2 + c)$$

دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) به‌منظور تخمین چگالی $log\ \varepsilon_t^2$ با استفاده از رویکـرد ناپـارامتری بیزی، از به‌کارگیری فرضیه‌های ناپارامتریک برای توزیع بازده اجتناب کردند. در این مدل توزیـع $log\ \chi_1^2$ به‌وسیلهٔ مدل آمیختهٔ فرایند دیریکله[1] تقریب زده شده است؛ از این رو، دیگر نیـازی بـه فرض‌کردن این توزیع به‌صورت آمیختهٔ نرمال متناهی نیست. به همین دلیـل امکـان اسـتفاده از الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی در این مدل فراهم می‌شود. این مدل در واقـع یک مدل نیمه‌پارامتری آمیختهٔ تعادلی است که جمـلات خطـای تسـاوی مشـاهدات بـه‌صـورت ناپارامتری با مدل آمیختهٔ فرایند دیریکله مدل‌سازی شده‌اند و نوسـانات لگـاریتمی دارای فراینـد خودهمبستهٔ مرتبهٔ یک هستند.

روش‌شناسی پژوهش

در این پژوهش از توزیع پیشین معرفی شده توسط گریفین (۲۰۱۰) استفاده شده است. مـی‌تـوان مدل را برای مشاهدات $z_1, z_2, \dots, z_n$ به صورت زیر نوشت:

رابطهٔ ۴) $$z_t|\mu_t' \sim N(\mu_t', \alpha\sigma_z^2), \qquad t = 1, 2, \dots, n$$

رابطهٔ ۵) $$\mu_t' \sim G, \qquad t = 1, 2, \dots, n$$

رابطهٔ ۶) $$G \sim DP(M, H)$$

رابطهٔ ۷) $$H \equiv N(\mu_0, (1-\alpha)\sigma_z^2)$$

در اینجا μ_0 معرف پارامتر مکان، σ_z^2 پارامتر مقیاس و از α پارامتر هموارکننده تعبیر می‌شـود. داده‌ها (z_t) از توزیع نرمال شرطی و تنها میانگین‌ها (μ_j') از فرایند دیریکله با پـارامتر چگـالی M پیروی می‌کنند. در این مدل واریانس اجزای ادغام شونده ثابت فرض می‌شود؛ به‌طـوری کـه σ_z^2

1. Dirichlet Process Mixture Model (DPM)

واریانس پیشین z_t است. توزیع انتظاری پیشین z_t نرمال با میانگین μ_0 و واریانس σ_z^2 است که مرکز پیشین چگالی خواهد بود.

حال به توضیح مدل نوسانات تصادفی نیمه پارامتری دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) پرداخته شده است که برای توزیع بازده شرطی از تعبیر ناپارامتری استفاده کرده‌اند، درحالیکه فرض پارامتری بودن فرایند نوسانات همچنان حفظ شده است (رابطهٔ ۸).

رابطهٔ ۸)
$$y_t^* = h_t + z_t$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \sigma_\eta \eta_t$$

در اینجا $y_t^* = log(y_t^2 + c)$، $z_t = log\, \varepsilon_t^2 \sim F$ و $\eta_t \sim N(0,1)$. با مدل‌سازی y_t^* به جای مدل‌سازی y_t، اطلاعات در مورد علامت بازده y_t از بین می‌رود. بنابراین توزیع y_t یا ε_t را تنها با مفروضاتی در مورد توزیع علامت بازده می‌توان احیا کرد. از این رو فرض می‌شود که توزیع ε_t و بنابراین توزیع y_t متقارن است.

هنگام برازش مدل برای مشاهدات، برخورد به بازده‌هایی با مقادیر صفر بسیار معمول است. در این پژوهش بازده‌های صفر به‌وسیلهٔ توزیع نرمال حول $\log c$ مدل شده‌اند (بنابراین اگر $y_t = 0$، آن گاه $y_t^* = log\, c$). همچنین، بازده‌های با مقادیر غیرصفر توسط فرایند دیریکلهٔ آمیختهٔ نرمال مدل شده‌اند. چنین اقدامی به ایجاد مدل زیر برای z_t منجر خواهد شد:

رابطه ۹)
$$p(z_t) = WN(log\, c, \sigma_0^2) + (1-W)\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j N(\mu_j', \alpha\sigma_z^2)$$

که W احتمال صفر بودن یک بازده و σ_0^2 در تمام مقاله برابر ۱ فرض شده است.

اگر برای z_t توزیع پارامتری تصور شود، میانگین z_t ثابت بوده و مقدار μ مشخص می‌شود؛ اگر توزیع پیشین z_t ناپارامتری فرض شود، مقدار μ به‌سادگی و بدون در نظر گرفتن مفروضاتی خاص مشخص نمی‌شود. بنابراین ساده‌تر است که در نمونه‌گیری زنجیرهٔ مارکف مونت مارلو، z_t از μ استقرا شود که چنین اقدامی به تغییر پارامتر زیر منجر خواهد شد:

رابطهٔ ۱۰)
$$y_t^* = h_t^* + z_t^*$$

رابطهٔ ۱۱)
$$h_{t+1}^* = \phi h_t^* + \sigma_\eta \eta_t$$

که در آن $h_t^* = h_t - \mu$، $z_t^* = z_t + \mu$ و $h_1^* \sim N(0, \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2})$. پس از اعمال این محدودیت‌ها، میانگین صفر خواهد شد و می‌توان تعبیر نیمه‌پارامتری را برای مدل انجام داد. اما همچنان داشتن تقریبی از μ به‌منظور مقایسهٔ مدل نیمه‌پارامتری با مدل ارائه شده در رابطهٔ ۱ که

در آن ε_t دارای توزیع نرمال است، می‌تواند مفید باشد. با توجه به اینکه $E[z_t^*] = \mu + E[z_t]$، اگر فرض شود که $E[z_t]$=-۱/۲۷۰۴ است، آن‌گاه $\mu = E[z_t^*] + ۱/۲۷۰۴$.

در این مدل توزیع پسین z_t^* استخراج می‌شود، اما از آنجا که توزیع پسین ε_t از اهمیت بیشتری برخوردار است، با فرض اینکه توزیع ε_t متقارن است، می‌توان از توزیع z_t^* توزیع ε_t را استخراج کرد. واریانس و چولگی ε_t نیز از ویژگی‌های مهم توزیع هستند. لگاریتم واریانس ε_t با استفاده از امید ریاضی z_t^* و چولگی ε_t با استفاده از واریانس z_t^* به‌دست می‌آید، به این نحو که بسط سری تیلور از مرتبهٔ دوم، حول $E[\varepsilon_t^2]$ محاسبه شده و گشتاور مرتبهٔ اول z_t^* با عبارت زیر تقریب زده می‌شود.

رابطهٔ ۱۲)
$$E(z_t^*) = \mu + E(z_t) \approx \mu + log\, E(\varepsilon_t^2) - \frac{1}{2}\frac{V[\varepsilon_t^2]}{(E[\varepsilon_t^2])^2}$$

و

رابطهٔ ۱۳)
$$V(z_t^*) = V(z_t) \approx \frac{V(\varepsilon_t^2)}{\left(V(\varepsilon_t)\right)^2} = K(\varepsilon_t) + 1$$

که $K(\varepsilon_t)$ چولگی ε_t است. بنابراین:

رابطهٔ ۱۴)
$$K(\varepsilon_t) \approx V(z_t^*) - 1$$

رابطهٔ ۱۵)
$$exp\,\{\mu\}V(\varepsilon_t) \approx\ exp\,\{E(z_t^*) + V(z_t^*)/2\}$$

رابطه‌های محاسباتی μ، $V(\varepsilon_t)$ و $K(\varepsilon_t)$ دارای عبارت‌های $V(z_t^*)$ و $E(z_t)$ هستند و از آنجا که این عبارت‌ها شامل جمع‌های نامتناهی می‌شوند، محاسبهٔ آنها به‌وسیلهٔ الگوریتم نمونه‌گیری زنجیرهٔ مارکف مونت‌کارلو کار آسانی نیست. به همین دلیل از تقریب زیر استفاده شده است:

رابطهٔ ۱۶)
$$E[z_t^*|\psi] \approx W\ log\ c + (1-W)(\sum_{j=۱}^{k}\frac{n_j}{n+\ M}\mu_j' + \frac{M}{M+\ n}\mu_0)$$

و

رابطهٔ ۱۷)
$$V(z_t^*|\psi) = W((logc)^2+1) + (1-W)\frac{\sum_{j=۱}^{k}\left(n_j\left(\alpha\sigma_z^2 + \mu_j'^{۲}\right)\right) + M(\mu_0^2+\sigma_z^2)}{n_2'+M} \text{-}(\mu - 2704/1)^2$$

که در آن $\phi = (W, c, k, n_1, \dots, n_k, \mu_1', \dots, \mu_k', \mu_0, a, \sigma_z^2, M)$ و n_j تعداد مشاهدات تخصیص داده شده به jامین خوشهٔ غیرصفر است و k تعداد خوشه‌های غیرصفر مجزاست. امید پسین ($E[z_t^*|y]$) با استفاده از برآوردگر $\hat{E}[z_t^*|y] = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} E[z_t^*|\psi^{(j)}]$ محاسبه می‌شود که $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N)}$ نمونه‌ای از زنجیرهٔ مارکف مونت‌کارلو است و از توزیع پسین به‌دست می‌آید. $V(z_t^*|y)$ را نیز با استفاده از $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V\left[z_t^*|\psi^{(j)}\right] + \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(E\left[z_t^*|\psi^{(j)}\right] - \hat{E}[z_t^*|y])^2$ می‌توان تخمین زد.

پیشین‌های زیر به‌عنوان پارامترهای مدل نیمه‌پارامتری فرض شده‌اند:

رابطهٔ ۱۸) $$\sim\phi N(0,10) \times I_{[-1,1]}, \sigma_\eta^2 \sim IG\ (2.5, 0.025)$$

که در آن $IG(a,b)$ توزیع معکوس گاما با میانگین $\frac{b}{a-1}$ (اگر $a > 1$) و واریانس $\frac{b^2}{(a-1)(a-2)}$ (اگر $a > 2$) است و $N(\mu, \sigma^2) \times I_{[a,b]}$ توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 را نشان می‌دهد که به بازه (a, b) محدود شده است، بنابراین مانایی فرایند نوسانات لگاریتمی را تضمین می‌کند. پیشین (W) نیز، توزیع بتا است $W \sim Be(0.1, 0.9)$. پارامتر جرم فرایند دیریکله (M) نیز، دارای پیشین زیر است:

رابطهٔ ۱۹) $$P(M) = \theta^\lambda \frac{\Gamma(2\lambda)}{(\Gamma(2\lambda))^2} \frac{M^{\lambda-1}}{(M+\theta)^{2\lambda}}$$

که در اینجا θ اندازهٔ نمونه پیشین را مشخص می‌کند، و λ پارامتر واریانس است. در این پژوهش α مقدار ثابت ۰/۰۱ فرض شده است.

در این قسمت، گام‌های الگوریتم زنجیرهٔ مارکف مونت‌کارلو به‌منظور برازش مدل نیمه پارامتری به‌صورت مختصر شرح داده شده است[1].

$y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$، $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ و $\mu' = (\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_n')$ فرض شده است. متغیرهای شاخص $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ برای تخصیص مشاهدات به مقادیر متمایز فرایند دیریکله معرفی شده‌اند. گام‌های زیر نیز به‌منظور به‌روز کردن پارامترها طی می‌شوند.

- مقداردهی اولیه ϕ، σ_η^2، σ_z^2، μ_0، μ'، M، s و W.
- نمونه‌گیری $h|y^*, \phi, \sigma_\eta^2, \sigma_z^2, \mu_0, \mu', M, W, s$
- نمونه‌گیری $s|y^*, \phi, \sigma_\eta^2, \sigma_z^2, \mu_0, \mu', M, W, h$

۱. برای آگاهی از جزئیات آن به مقاله دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) رجوع شود.

- نمونه‌گیری σ_z^2،μ_0،μ'،M،$W|y^*$،ϕ،σ_η^2،s،h
- نمونه‌گیری ϕ،$\sigma_\eta^2|y^*$،σ_z^2،μ_0،μ'،M،W،s،h

به‌روزرسانی نوسانات لگاریتمی: نمایش مدل نوسانات تصادفی به‌صورت نشان‌داده شده در رابطهٔ ۸ و استفاده از آمیختهٔ نرمال برای z_t، تعبیر را آسان کرده است. به شرط s، مدل y^* مدل خطی پویای گوسی است، بنابراین نوسانات لگاریتمی را می‌توان با استفاده از الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی، به‌صورت همزمان به‌روز کرد.

به‌روزرسانی اجزای آمیخته: متغیرهای تخصیص s و پارامترهای مدل آمیخته را می‌توان با روش توضیح داده شده توسط گریفین (۲۰۱۰) که همان استفاده از روش‌های استاندارد برای مدل‌های آمیخته فرایند دیریکله است، به‌روز کرد.

به‌روزرسانی پارامترهای نوسانات تصادفی: هنگام به‌روزسازی پارامترهای مدل نوسانات تصادفی، لازم است تغییر پارامترهایی اعمال شود؛ چرا که نوسانات لگاریتمی h و پارامترهای $(\phi, \sigma_\eta^2, \mu)$ اغلب دارای همبستگی هستند. در ادبیات به این منظور دو رویکرد متفاوت ارائه شده است؛ ۱. تغییر پارامترهای مدل به نحوی که وابستگی میان پارامترها و نوسانات لگاریتمی حداقل شود و ۲. پارامترها و نوسانات لگاریتمی به‌صورت همزمان به‌روز شوند. در این پژوهش، از رویکرد نخست بهره برده شده است.

محاسبهٔ ارزش در معرض خطر: به‌طور کلی ارزش در معرض خطر نشان‌دهندهٔ زیان احتمالی یک دارایی در یک دورهٔ زمانی مشخص و در سطح اطمینان مشخص است که با تغییر نامطلوب در قیمت‌های بازار ارتباط دارد. از لحاظ آماری، به شرط وجود سطح اطمینانی خاص مانند π، ارزش در معرض خطر دورهٔ t در سطح اطمینان π برای یک سری بازده، به‌عنوان مقداری تعریف می‌شود که احتمال بیشتر شدن زیان‌ها از این مقدار در زمان t برابر با π است. به بیان دیگر، ارزش در معرض خطر دورهٔ t در سطح اطمینان π برای یک سری بازده به‌صورت چندک π توزیع شرطی بازده در زمان t تعریف می‌شود:

$$\pi = \Pr\left(r_t \leq VaR_{\pi,t} | F_{t-1}\right) \quad \text{(رابطهٔ ۲۰)}$$

بنابراین با داشتن سری مشاهدات r، ارزش در معرض خطر دورهٔ بعد در سطح اطمینان π را که با $VaR_{\pi,T+1}$ نمایش داده می‌شود، می‌توان با استفاده از چندک π توزیع شرطی بازده یک دورهٔ بعد $f(r_{T+1}|r)$ محاسبه کرد. شایان توجه است که محاسبهٔ ارزش در معرض خطر

به‌شدت به توزیع فرض شده برای جملات اخلال وابسته است. با داشتن خروجی‌هـای MCMC، می‌توان چگالی بازده یک دورهٔ بعد را به صورت زیر پیش‌بینی کرد:

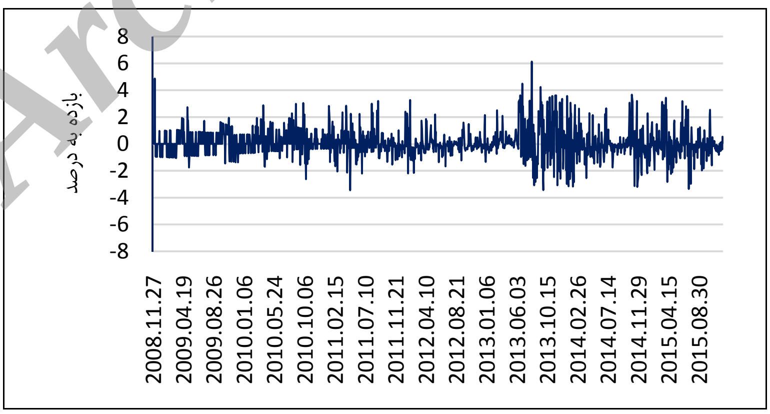
رابطهٔ (۲۱)
$$f(r_{T+1}|r) \approx \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} f(r_{T+1}|r)$$

بنابراین برای محاسبهٔ ارزش در معرض خطر کافی است از چندک‌های مربوطه ایـن چگـالی پیش‌گویانه استفاده کرد.

آزمون پسرو: در این پژوهش از انواع آزمون‌های پسرویی که بر مبنای تکرار استثنائات هسـتند استفاده شده است. در این نوع آزمون‌ها، بر اساس مقایسهٔ میان تعداد روزهایی که زیـان از ارزش در معرض خطر بیشتر شده و سطح اطمینان ارزش در معرض خطر برآورد شده، به آزمودن دقـت مدل‌های ارزش در معرض خطر پرداخته می‌شود. بر این اساس در پژوهش حاضر، از آزمون‌هـای پوشش غیرشرطی، آزمون پوشش شرطی و آزمون مستقل توضیح داده شده توسط اندرو رستی و آندریا سیرونی (۲۰۰۷) استفاده شده است.

یافته‌های پژوهش

در این بخش مدل‌های نوسانات تصادفی پارامتری و ناپـارامتری بـرای شـاخص گـروه بـانکی از تاریخ ۵ آذر ۱۳۸۷ تـا ۲۲ آذر ۱۳۹۴ (هشـت سـال) اجـرا شـده اسـت (در مجمـوع ۱۶۹۳ داده). داده‌های ورودی، همان بازده لگاریتمی شاخص به درصد است که در شکل ۱ مشاهده مـی‌شـود. در ادامه یافته‌های پژوهش ارائه شده‌اند.



شکل ۱. نمودار بازده شاخص گروه بانکی

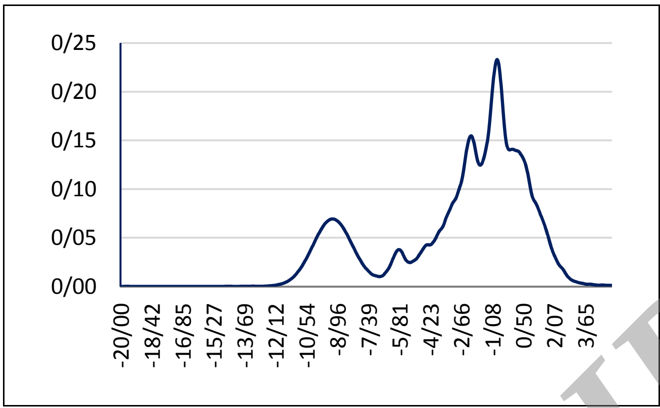
نتایج اجرای مدل در جدول ۱ خلاصه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، میانهٔ پسین پارامتر پایداری (ϕ) در مدل نیمه‌پارامتری نسبت به مدل پارامتری، مقدار بیشتری را اتخاذ کرده است، در حالیکه واریانس تساوی نوسانات (σ_η^2) کمتر برآورد شده است. چنین به نظر می‌رسد که مدل پارامتری تمایل به بزرگنمایی در تخمین نوسانات داشته و نسبت به قدرمطلق مقادیر بزرگ بازده، واکنش زیادی نشان می‌دهد. گرچه میانهٔ پسین پارامتر پایداری در مدل نیمه‌پارامتری بسیار به ۱ نزدیک است، مانایی مدل نقض نشده است. در مدل نیمه‌پارامتری، پارامتر μ کوچک‌تر تخمین زده شده که نشان‌دهندهٔ کوچک‌تر بودن واریانس جملهٔ اخلال در مدل نیمه‌پارامتری است. همچنین واریانس بسیار بزرگ‌تر از ۴ برآورد شده که نشان‌دهندهٔ چولگی توزیع جملهٔ اخلال است. بنابراین به نظر می‌رسد که در مدل پارامتری، واریانس بیشتر تخمین زده شده است تا در نظر نگرفتن چولگی برای توزیع بازده را جبران کند. در نهایت، میانهٔ پسین تعداد خوشه‌ها (k) نسبتاً بزرگ است، در حالیکه میانهٔ پسین (W) وجود بازده‌های منفی را نشان می‌دهد. این یافته‌ها مشابه یافته‌های دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) است.

جدول ۱. میانه‌های پسین پارامترهای مدل پارامتری و نیمه‌پارامتری

پارامترها	مدل پارامتری	مدل نیمه‌پارامتری (α= ۰/۰۱)
ϕ	۰/۹۸	۰/۹۹
μ	۱/۵۵-	۱/۴۰-
σ_η^2	۰/۱۰	۰/۰۸
σ_z^2		۱۱/۹۰
M		۷/۶۳
k		۴۱
W		۰/۱۷

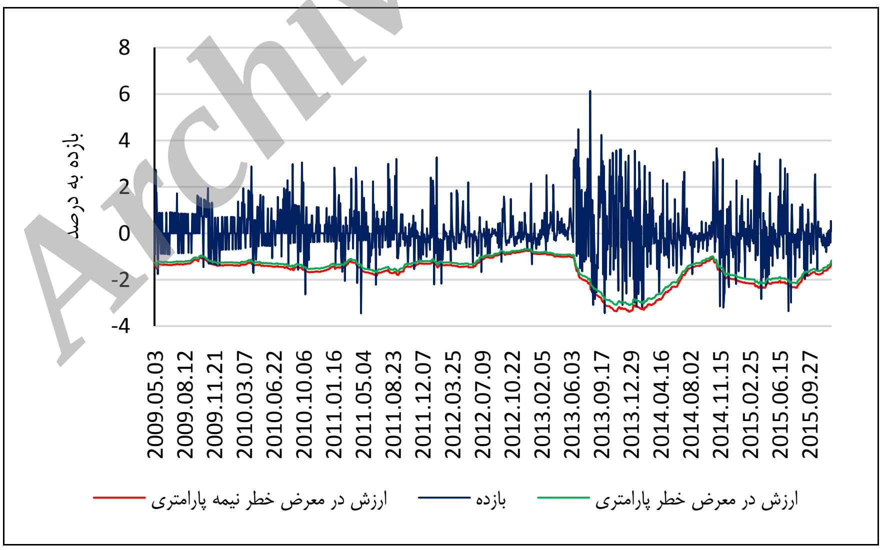
در شکل ۲ توزیع پسین بازده مشاهده می‌شود. این توزیع دارای چند مد است و مد اصلی که تجمع بیشتر داده‌ها را در اطراف خود دارد، در حوالی صفر اتفاق افتاده است.

در ادامه با استفاده از صدکی از توزیع چگالی به‌دست آمده در هر یک از دو مدل، ارزش در معرض خطر برای شاخص گروه بانکی از تاریخ ۱۳ اردیبهشت ۱۳۸۸ تا ۲۲ آذر ماه ۱۳۹۴ اجرا شده است (در مجموع ۱۵۹۳ داده). ارزش در معرض خطر در واقع معیاری برای سنجش ریسک بازار است که امروزه با توجه به کاربرد آن، اهمیت زیادی دارد. شایان ذکر است که ارزش در معرض خطر در هر روز با استفاده از بازده لگاریتمی ۱۰۰ روز قبل و با سطح اطمینان ۰/۹۵ محاسبه شده است.



شکل ۲. نمودار توزیع پسین بازده

نمودار مربوط به بازده و ارزش در معرض خطر محاسبه شده با استفاده از دو مدل پارامتری و نیمه‌پارامتری نوسانات تصادفی در شکل ۳ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر ارزش در معرض خطر محاسبه‌شده در سطح اطمینان ۰/۹۵ با استفاده از مدل نوسانات تصادفی نیمه‌پارامتری، کمتر از مقدار آن در مدل نوسانات تصادفی با فرض نرمال بودن توزیع جملات اخلال شده است. بدیهی است در این حالت (مدل نیمه‌پارامتری) احتمال اینکه بازده کسب شده در هر روز از ارزش در معرض خطر در همان روز کمتر شود، کمتر از مدل پارامتری خواهد بود.



شکل ۳. نمودار بازده و ارزش در معرض خطر محاسبه شده با دو روش پارامتری و نیمه‌پارامتری

در اینجا بازده کسب شده در هر روز با ارزش در معرض خطر به‌دست آمده در آن روز مقایسه شده است. چنانچه بازده به‌دست آمده کمتر از ارزش در معرض خطر محاسبه شده باشد، یک استثنا ثبت می‌شود. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، طی ۱۵۹۳ روز اجرای آزمایش، تعداد استثناهای ثبت شده در روش نیمه‌پارامتری ۴۰ روز و تعداد استثناهای ثبت شده در روش پارامتری ۵۸ روز است.

جدول ۲. مقایسهٔ فراوانی استثناها در دو روش پارامتری و نیمه‌پارامتری

عنوان	مدل نیمه پارامتری نوسانات تصادفی	مدل پارامتری نوسانات تصادفی
تعداد روزهای اجرای آزمون	۱۵۹۳	۱۵۹۳
تعداد استثناها	۴۰	۵۸
درصد استثناها	۲/۵۱٪	۳/۶۴٪

سپس آزمون‌های پسروی توضیح داده شده در بخش قبل، برای ارزش در معرض خطر محاسبه شده با دو روش نیمه‌پارامتری و پارامتری انجام می‌شود. فرض صفر آزمون‌های پوشش شرطی، مستقل و غیر شرطی به قرار زیر است:

- آزمون غیر شرطی: فراوانی استثناهای تجربی، مقدار معتبری دارد.
- آزمون مستقل: مشاهدهٔ استثنا از اینکه در روز قبل استثنا داشته باشیم مستقل است.
- آزمون شرطی: دو فرض فوق را همزمان آزمون می‌کند.

گفتنی است، اگر زیان در هر روز از ارزش در معرض خطر در همان روز بیشتر شود، یک استثنا ثبت خواهد شد. نتایج اجرای این سه آزمون در جدول ۳ به صورت خلاصه درج شده است.

جدول ۳. مقایسهٔ نتایج به‌دست آمده از آزمون‌های پسرو

آزمون	مدل نیمه پارامتری نوسانات تصادفی	مدل پارامتری نوسانات تصادفی
P_{uc}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۵۰۹۱	۰/۰۰۹۰۴۸۷۹۰۴
P_{ind}	۰/۰۰۰۰۳۳۵۹۰۸	۰/۰۰۰۳۸۳۹۰۰۱
P_{cc}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۸۳۹

مقدار احتمال برای هر سه آزمون فرض در سطح اطمینان ۸۰ درصد ، برای دو مدل پارامتری و نیمه‌پارامتری از ۰/۲ بسیار کمتر است و این یعنی فرض صفر را در هیچ‌یک از این سه آزمون برای هیچ یک از این دو مدل نمی‌توان رد کرد. بنابراین بر اساس نتایج آزمون اول، بار دیگر

یافته‌های شکل ۳ مبنی بر کمتر بودن ارزش در معرض خطر در مدل نیمه‌پارامتری نسبت به مدل پارامتری به تأیید می‌رسد. بر اساس نتایج آزمون دوم، احتمال وقوع استثنا در هر روز به وقوع استثنا در روز قبل وابسته نیست و این کاملاً با تصادفی بودن نوسانات در مدل نوسانات تصادفی همخوانی دارد. بر اساس نتایج آزمون سوم، می‌توان نتیجه گرفت که هر دو مدل پارامتری و نیمه‌پارامتری در سطح اطمینان خوبی از صحت کافی برخوردار هستند. با توجه به ناچیز بودن هر دو آماره می‌توان گفت به نظر می‌رسد مدل نیمه‌پارامتری، توزیع بازده را با دقت بهتری تخمین می‌زند، اما نتوانسته است در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر بهبود کاربردی ایجاد کند. از این حیث مدل نیمه‌پارامتری در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر بر مدل پارامتری برتری چندانی ندارد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در پژوهش حاضر، روش پیشنهاد شدهٔ دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) برای شاخص گروه بانکی به اجرا درآمد و با روش پیشنهادی تیلور (۱۹۸۲) مقایسه شد. در این روش که تعبیر نیمه‌پارامتری بیزی از مدل نوسانات تصادفی است، توزیع بازده به‌صورت ناپارامتری مدل‌سازی شد، در حالیکه پارامتری بودن تساوی نوسانات محفوظ ماند. به‌منظور بهره‌گیری از روش‌های کارامد کامپیوتری مانند الگوریتم فیلترسازی پیشرو و نمونه‌گیری بازگشتی، لگاریتم مربع جملات اخلال به جای جملات اخلال مدل شدند. در نهایت ارزش در معرض خطر با به‌کارگیری توزیع به‌دست آمده محاسبه شد و مقادیر حاصل با ارزش در معرض خطر به‌دست آمده از روش نوسانات تصادفی با توزیع نرمال مقایسه شدند.

نتایج اجرای مدل نشان می‌دهد در مواقعی که توزیع بازده دارای چولگی است، مدل نیمه‌پارامتری نوسانات را نسبت به مدل پارامتری با توزیع نرمال، با دقت بیشتری برآورد می‌کند. در این حالت، مدل پارامتری نوسانات را بیشتر از حد واقعی تخمین می‌زند. شایان ذکر است که نتایج فوق مشابه نتایج به‌دست آمده در پژوهش‌های دلاتولا و گریفین (۲۰۱۱) و جنسن و ماهیو (۲۰۱۰) و ویربیکایت، لوپز، آسین و گالئانو (۲۰۱۴) است. ضمن آن که دلاتولا و گریفین نشان دادند در شرایطی که توزیع بازده به توزیع نرمال نزدیک باشد، نتایج مدل نیمه‌پارامتری مشابه نتایج مدل پارامتری با فرض توزیع نرمال خواهد بود.

از آنجاکه در محاسبهٔ معیارهای ریسک نظیر ارزش در معرض خطر که کمیتهٔ بال بر لزوم استفاده از آن تأکید بسیار دارد، افزایش دقت تخمین نوسانات بازده می‌تواند دقت تخمین این معیارها را افزایش دهد، در این پژوهش ارزش در معرض خطر برآورد شده با استفاده از توزیع

به‌دست آمده از روش نیمه‌پارامتری با ارزش در معرض خطر به‌دست آمده از روش پارامتری نوسانات تصادفی، مقایسه شد. همان‌طور که نتایج اجرای آزمون‌های پسرو نشان می‌دهد، هر دو مدل در سطح اطمینان خوبی از صحت کافی برخوردار هستند. با توجه به ناچیز بودن هر دو آماره می‌توان گفت به نظر می‌رسد مدل نیمه‌پارامتری توزیع بازده را با دقت بهتری تخمین می‌زند، اما نتوانسته است در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر بهبود کاربردی ایجاد کند. از این حیث مدل نیمه‌پارامتری در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر بر مدل پارامتری برتری چندانی ندارد.

فهرست منابع

Abanto-Valle, C., Bandyopadhyay, D., Lachos, V. & Enriquez, I. (2010). Robust Bayesian Analysis of Heavy-tailed Stochastic Volatility Models using Scale Mixtures of Normal Distributions. *Computational Statistics and Data analysis*, 54(12), 2883-2898.

Barndorff-Nielsen, E. (1997). Normal Inverse Gaussian Distribution and Stochastic Volatility Modelling. *Scandinavian Journal of Statistics,* 24 (1), 1-13.

Broto, C. & Ruiz, E. (2004). Estimation Methods for Stochastic Volatility Models: A Survey. *Journal of Economic Survey,* 18(5), 613-649.

Delatola, E.I. & Griffin, J. (2011). Bayesian Nonparametric Modeling of the Return Distribution with Stochastic Volatility. *Bayesian Analysis,* 6 (4), 901-926.

Fuller, W. (1996). *Introduction to Statistical Time Series* (Second),JOHN WILEY,New York.

Griffin, J. (2010). Default Periors foe Density Estimation with Mixture Models. *Bayesian Analysis,* 1 (5), 45-64.

Jacquier, E., Polson, N. & Rossi, P. (1994). Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models. *Journal of Business & Economic Statistics,* 12 (4), 317-389.

Jacquier, E., Polson, N. & Rossi, P. (2003). Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. *Journal of Econometrics*, 20.1 (2002): 69-87.

Jensen, M., &Maheu, J. (2010). Bayesian Semiparametric Stochastic Volatility Modeling. *Journal of Econometrics*, 157.2 (2010), 306-316.

Kim, S., Shephard, N. & Chib, S. (1998). Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models. *The Review of Economic Studies,* 65 (3), 361-393.

Mahieu, R., &Schotman, P. (1998). An empirical application of stochastic volatility models. *Journal of Applied Econometrics,* 13 (4), 333-360.

Nakajima, J. & Omori, Y. (2009). Leverage, heavy-tails and correlated jumps in stochastic volatility models. *Computational Statistics & Data Analysis,* 53 (6), 2335-2353.

Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. & Nakajima, J. (2007). Stochastic volatility with leverage: Fast and efficient likelihood inference. *Journal of Econometrics,* 140 (2), 425-449.

Shephard, N. & Kim, S. (1994). Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models: Comment. *Journal of Business and Economic Statistics,* 12.4 (1994): 406-410.

Sironi, A. & Resti, A. (2007). *Risk management and shareholders' value in banking: from risk measurement models to capital allocation policies*, Vol. 417. John Wiley & Sons, England.

Taylor, S. (1982). *Financial returns modeled by the product of two stochastic processes-a study of daily sugar prices*. North Holland, Amesterdam.

Virbickaite, A., Lopez, H., Ausin, M. & Galeano, P. (2014). Particle Learning for Bayesian Non-Parametric Markov Switching Stochastic Volatility Model. *UC3M Working papers.* 14-19.