Financial Research Journal

Print ISSN: 1024-8153

Online ISSN: 2423-5377

Subordinate Shares Pricing under Fractional-Jump Heston Model

Omid Jenabi

*Corresponding author, Ph.D. Candidate, Department of Economics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran. E-mail: omid.j.eco@gmail.com

Nazar Dahmarde Ghaleno

Prof., Department of Economic, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran. E-mail: nazar@hamoon.usb.ac.ir

Abstract

Objective: In this paper, while introducing Heston's model of stochastic variance, regarding the jump process and the long-term memory feature of prices, a new model for pricing subordinate shares is presented. In the following, the performance of this model is discussed in comparison to the two other models of random variance, Heston and Bates.

Methods: In this research, the Fractional-Jump Heston Model has been created through combining the jump process and Hurst exponent. The new model has been generated while the long-term memory characteristics of the stock market price trends and the vulnerability of prices in response to sudden changes have been taken into consideration. Then we have determined the characteristic function of the underlying asset price process in the new model, which has been used to derive a formula for subordinate shares pricing using the Monte Carlo method and the variance reduction technique.

Results: To test and Compare the option pricing models, we have used the subordinate shares data during 2012-2017. After calibrating and pricing subordinate shares by all three models and comparing the results, it was found that the Fractional-Jump Heston model has a better performance than the other two models in terms of the valuation of Tabai options.

Conclusion: The comparison results show that the estimation by the Fractional-Jump Heston model is closer to the actual results of the subordinate shares' prices, and is better than the two well-known models of stochastic variance, Heston and Bates.

Keywords: Fractional stochastic volatility model, Jump-Diffusion, Long memory, Option pricing, Tabai option.

Citation: Jenabi, O., & Dahmarde Ghaleno, N. (2019). Subordinate Shares Pricing under Fractional-Jump Heston Model. *Financial Research Journal*, 21(3), 392- 416. (*in Persian*)

Financial Research Journal, 2019, Vol. 21, No.3, pp. 392- 416

DOI: 10.22059/frj.2019.277291.1006834

Received: March 04, 2019; Accepted: July 19, 2019

شاپا چاپی: ۸۱۵۳-۱۰۲۴
شاپا الکترونیکی: ۵۳۷۷-۲۴۲۳

تحقیقات مالی

قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری ـ پرشی

امید جنابی
* نویسنده مسئول، دانشجوی دکتری، گروه اقتصاد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران. رایانامه: omid.j.eco@gmail.com

نظر دهمرده قلعه نو
استاد، گروه اقتصاد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران. رایانامه: nazar@hamoon.usb.ac.ir

چکیده

هدف: در این مقاله، ضمن معرفی مدل تلاطم تصادفی هستون با در نظر گرفتن فرایند پرش و ویژگی حافظه بلندمدت قیمت‌ها، مدل جدیدی برای قیمت‌گذاری اوراق تبعی ارائه شده است و در ادامه، کارایی این مدل با دو مدل معروف نوسان‌های تصادفی هستون و بیتز مقایسه شده و درباره نتایج آنها بحث شده است.

روش: در این پژوهش نظر به اینکه قیمت دارایی‌های پایه در بازارهای مالی دستخوش تغییرهای ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون قرار می‌گیرند و همچنین با وجود ویژگی حافظه بلندمدت در روند قیمت‌های بازار سهام، با اضافه‌کردن جمله پرش و توان هرست به این مدل، مدل جدیدی به‌نام مدل هستون کسری ـ پرشی ارائه شده است. در ادامه با تعیین تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی پایه در مدل جدید، فرمولی برای قیمت‌گذاری اوراق تبعی در قالب این مدل و با استفاده از روش مونت کارلو همراه با تکنیک کاهش واریانس، استخراج شده است.

یافته‌ها: در این مطالعه، برای آزمون و مقایسه مدل‌های قیمت‌گذاری از داده‌های اوراق تبعی منتشر شده در سال‌های ۹۱ تا ۹۶ استفاده شده است. پس از واسنجی و قیمت‌گذاری اوراق تبعی توسط هر سه مدل و مقایسه نتایج، مشخص شد که برای ارزش‌گذاری اوراق تبعی، مدل هستون کسری ـ پرش در مقایسه با دو مدل دیگر، عملکرد بهتری دارد.

نتیجه‌گیری: نتایج مقایسه نشان داد که ارزش‌گذاری توسط مدل هستون کسری ـ پرشی به نتایج واقعی قیمت اوراق تبعی نزدیک‌تر است و در مقایسه با دو مدل معروف نوسان‌های تصادفی، هستون و بیتز، عملکرد بهتری دارد.

کلیدواژه‌ها: اوراق تبعی، پرش ـ انتشار، حافظه بلندمدت، قیمت‌گذاری اختیار معامله، مدل تلاطم تصادفی کسری.

استناد: جنابی، امید؛ دهمرده قلعه نو، نظر (۱۳۹۸). قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون کسری ـ پرشی. *تحقیقات مالی*، ۲۱(۳)، ۳۹۲- ۴۱۶.

تحقیقات مالی، ۱۳۹۸، دوره ۲۱، شماره ۳، صص. ۳۹۲- ۴۱۶
DOI: 10.22059/frj.2019.277291.1006834
دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۱۳، پذیرش: ۱۳۹۸/۰۴/۲۸

مقدمه

یکی از ارکان اصلی مؤثر بر تصمیم‌های سرمایه‌گذاری، ارزش‌گذاری دارایی‌ها، از جمله اوراق بهادار است. ارزش‌گذاری اصولی و صحیح دارایی‌ها، تخصیص بهینه منابع سرمایه‌ای را به‌همراه دارد. اتخاذ تصمیم‌های اصولی سرمایه‌گذاری و تخصیص بهینه منابع سرمایه‌ای، مستلزم ارزش‌گذاری اوراق با استفاده از روش‌های معتبر علمی است (دارابی و معروفخانی، ۱۳۹۵). پیش‌بینی روند بازار سهام، به‌دلیل نوسان‌های محیطی و تلاطم ذاتی روندهای روزانه بازار، بسیار پیچیده است. پیچیدگی حرکات روزانه بازار و قیمت سهام از عواملی نظیر حوادث سیاسی، اخبار بازار، گزارش‌های دوره‌های درآمد و رفتارهای متعارض معامله نشئت می‌گیرد (فخاری، ولی‌پورخطیر و موسوی، ۱۳۹۶). این تلاطم و عدم اطمینان موجود از وضعیت آینده در بازارهای مالی، زیان شدیدی به بازیگران اقتصادی وارد کرده است و حتی باعث شده که آنها از بازار خارج شوند و در این عرصه توانایی رقابت با دیگران را نداشته باشند. به‌منظور پاسخ‌گویی به این مسئله بازار، انواع مشتقات مالی طراحی شده است (کیمیاگری، حاجی‌زاده، دستخوان و رمضانی، ۱۳۹۶). در واقع این اوراق به فعال‌تر شدن بورس و تعمیق بازار کمک کرده‌اند (مرادی، ۱۳۸۶).

اختیار معامله، یکی از انواع اوراق مشتقه در حوزه مالی است. باید توجه شود که مسئله مهم در خصوص هر ابزار مالی از جمله اختیار معامله، بحث قیمت‌گذاری آن است. مشهورترین مدل برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی، مدل بلک ـ شولز[1] نام دارد که در سال ۱۹۷۳ ارائه شده است. این مدل با وجود مزایایی همچون سادگی و برخورداری از فرم صریح برای قیمت اختیار معامله، به‌دلیل فرض‌های غیرواقع‌بینانه همواره با انتقاد مواجه شده است (شاکران، ۱۳۹۱). از زمان انتشار مدل بلک ـ شولز، تلاش‌های زیادی شد تا برای دارایی‌هایی که بر اساس مشاهده‌های تجربی پویایی حرکت آنها با ویژگی‌های حرکت براونی[2] هم‌خوانی ندارد، مدلی ارائه شود. برای مثال در مدل بلک ـ شولز، ثابت‌بودن تلاطم[3] فرض اصلی در نظر گرفته شده است، در حالی که به مرور زمان مشخص شد، این فرض برای اختیاراتی که قیمت اعمال[4] متفاوتی دارند، صدق نمی‌کند (برای اطلاعات بیشتر به هستون[5]، ۱۹۹۳ و بیتز[6]، ۱۹۹۳ مراجعه شود). لبخند تلاطم[7] و تلاطم نامتقارن[8] پدیده‌های مشهوری بودند که این فرض را نقض می‌کردند. این پدیده‌ها، در قالب رفتار غیرگاوسی[9] توزیع نرخ بازده دارایی مطرح شده‌اند. در واقع توزیع تلاطم واقعی، در مقایسه با منحنی زنگوله‌ای شکل توزیع نرمال، نامتقارن، دارای چولگی و همچنین دارای حافظه بلندمدت است (چاو، قینغوا، هیگزیانگ و تیانچنگ[10]، ۲۰۱۸). همچنین، در طول زمان پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که پیوسته‌بودن مسیر فرایند قیمت‌ها، موجب می‌شود در تطبیق نتایج مدل با داده‌های واقعی اشکال‌هایی به‌وجود آید. لزوم توجه به حرکت‌های بزرگ بازار و مقادیر زیادی از اطلاعات که به‌طور ناگهانی بازار را تحت تأثیر قرار می‌دهد، موجب شد که توجه پژوهشگران به ارائه مدل‌هایی همراه با

1. Black–Scholes
2. Brownian motion
3. Volatility
4. Strike price
5. Heston
6. Bates
7. Volatility smile
8. Volatility skew
9. Non-Gaussian
10. Chao, Qinghua, Haixiang, & Tiancheng

فرایند پرش[1] جلب شود (فلورسکو، ماریانی، سول[2]، ۲۰۱۴). از این رو، در این مقاله به‌منظور در نظر گرفتن این جهش‌ها و ناپیوستگی تلاطم و همچنین توجه به ویژگی حافظه بلندمدت توزیع‌های لگاریتمیِ بازده دارایی‌های مالی، مدلی ترکیبی از جهش‌ها و تلاطم تصادفی کسری با هدف قیمت‌گذاری اوراق تبعی، ارائه شده است. علاوه‌بر این، به‌علت ماهیت غیرمارکوی[3] حرکت براونی کسری که بر مبنای تلاطم تصادفی است، در این پژوهش برای افزایش دقت نتایج، از شبیه‌سازی مونت کارلو[4]، همراه با تکنیک کاهش واریانس (متغیرهای متضاد)[5] استفاده شده است. از این رو، نویسندگان پژوهش حاضر کوشیده‌اند که با ترکیب سه ویژگی تلاطم تصادفی، حافظه بلندمدت و جهش‌های ناگهانی در بازه دارایی‌ها، ایرادهای مدل‌های پیشین را برطرف کنند و با ارائه مدل جدید هستون کسری ـ پرشی، قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله را هرچه بیشتر به واقعیت نزدیک‌تر سازند.

در ادامه و در بخش پیشینه نظری، پژوهش‌های گذشته مرور شده است. در بخش سوم، ضمن معرفی روش‌های فرایند پرش ـ انتشار، تلاطم تصادفی و الگوی کسری، مدل پژوهش تشریح شده است. بخش چهارم به واسنجی و برآورد مدل‌ها اختصاص یافته و در انتها، نتیجه‌گیری و جمع‌بندی پژوهش ارائه شده است.

پیشینه پژوهش

طی چند سال اخیر، رشد و توسعه بازار سرمایه کشور و ارائه سازوکارها و ابزارهای مختلف توسط دولت برای حمایت از آن، اهمیت بازار سرمایه را در اقتصاد کشور افزایش داده است (فخاری، ولی‌پورخطیر و موسوی، ۱۳۹۶). یکی از این ابزارها، اوراق مشتقه است. با توجه به افزایش چشمگیر مبادله ابزار مشتقه از جمله اوراق اختیار معامله، مسئله ارزش‌گذاری این اوراق اهمیت شایان توجهی یافته است. بنابراین، طی چند دهه گذشته، تلاش‌های زیادی برای ارزش‌گذاری این اوراق صورت گرفته است. مدل بلک ـ شولز، مشهورترین مدل در زمینه قیمت‌گذاری اوراق اختیار است که در سال ۱۹۷۳ توسط بلک و شولز ارائه شد. این مدل که مبتنی بر تشکیل سبد خود ـ تأمین در فضای بدون آربیتراژ بود، ایرادهایی را به همراه داشت. برای مثال، داده‌های واقعی نشان دادند که ۱. لگاریتم بازده‌ها در تمامی بازارها مطابق با توزیع نرمال رفتار نمی‌کند و نسبت به توزیع گاوسی، دم‌های کلفت‌تر و چولگی نامتقارنی دارند؛ ۲. مدل بلک ـ شولز پیوستگی در روند قیمت‌های بازار را نشان می‌دهد، در صورتی که در دنیای واقعی قیمت‌ها دارای پرش هستند؛ ۳. وجود حافظه بلندمدت که آن را وابستگی یا دامنه بلندمدت نیز می‌نامند، در بازده دارایی‌ها، بیانگر وجود خودهمبستگی میان مشاهده‌ها با فاصله زمانی زیاد است.

از این رو، پژوهشگران در پی رفع ایرادهای مدل بلک ـ شولز برآمدند. یکی از محبوب‌ترین تغییرات ایجاد شده این بود که اجازه دهیم تلاطم از فرایند تصادفی پیروی کند (الوس و یانگ[6]، ۲۰۱۴). مدل بلک ـ شولز ثابت‌بودن تلاطم دارایی پایه را به‌عنوان فرض در نظر می‌گیرد، در صورتی که مدل تلاطم تصادفی، قیمت دارایی پایه را به‌عنوان متغیر

1. Jump
2. Florescu, Mariani, & Sewell
3. Non-Markovian
4. Monte-Carlo simulation
5. Antithetic variates
6. Alòs, & Yang

تصادفی در نظر می‌گیرد. در این حالت، پویایی این روند تصادفی می‌تواند توسط برخی فرایندهای دیگر (مانند حرکت براونی) صورت گیرد (تائو و تائو[1]، ۲۰۱۲). در همان زمان که استفاده از مدل‌های تلاطم تصادفی رواج یافت، پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که پیوسته‌بودن مسیر فرایند قیمت‌ها، در تطبیق نتایج مدل با داده‌های واقعی اشکال‌هایی ایجاد می‌کند. لزوم توجه به حرکت‌های بزرگ بازار و مقدار زیادی از اطلاعات که به‌طور ناگهانی بازار را تحت تأثیر قرار می‌داد، موجب شد که توجه پژوهشگران به ارائه مدل‌هایی همراه با فرایند پرش جلب شود (فلورسکو و همکاران، ۲۰۱۴).

بررسی‌های بیتز در سال‌های ۱۹۹۱ و ۱۹۹۶ نشان داد که تلاطم تصادفی و پرش‌ها، هردو از ویژگی‌های فرایند جهان واقعی است و آثار این دو، قیمت‌های اختیار معامله را تحت تأثیر قرار می‌دهد (آلبانز و کوزنتسوف[2]، ۲۰۰۵). از این رو، در این مقاله برای گرفتن اثر پرش یا ناپیوستگی نوسان‌ها، از مدل بیتز به‌عنوان مدل پایه برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار استفاده شده است.

علاوه‌بر این، پژوهش‌های زیادی نشان داده‌اند که توزیع‌های لگاریتمیِ بازده دارایی‌های مالی، به‌طور معمول در هر دو حالت خودهمبستگی[3] و همبستگی متقاطع[4]، از ویژگی‌های خودتشابهی[5] و وابستگی بلندمدت[6] در درون خود برخوردارند. از آنجا که حرکت براونی کسری[7] دارای دو ویژگی مهم خود تشابهی و وابستگی بلندمدت است، این قابلیت را دارد که رفتار قیمتی دارایی پایه را به‌خوبی توضیح دهد.

نامیانگ و یون‌هی[8] (۲۰۱۸) طی پژوهش خود با عنوان «برآورد و پیش‌بینی تحت مدل نوسان‌های محلی پرش ـ انتشار» با در نظر گرفتن مدل نوسان‌های محلی و با توجه به ناتوانی این مدل در نشان‌دادن پدیده اثبات‌شده پرش در داده‌های مالی، با اصلاح این مدل و اضافه‌کردن عامل پرش، به مدل جدیدی با عنوان «مدل نوسان‌های محلی پرش ـــ انتشار» دست یافتند. نتایج این پژوهش حاکی از برتری قدرت برآورد و پیش‌بینی این مدل در مقایسه با دو مدل نوسان‌های محلی و نوسان‌های تصادفی بود.

شین و سانگ[9] (۲۰۱۸) در پژوهشی، فرم جدیدی از مدل هستون را ارائه کردند. در واقع آنها با جایگزین‌کردن نرخ بهره ثابت در مدل هستون با نرخ بهره تصادفیِ برگرفته از مدل کاکس ـ اینگرسول ـ راس[10]، به مدلی جدید برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار اروپایی در فرم یکسری بی‌نهایت دست یافتند. یکی از ویژگی‌های راه‌حل ارائه شده برای این سری آن است که می‌توان به‌کمک برخی آزمون‌های عددی با یافتن شعاع همگرایی، سرعت همگرایی را به دست آورد.

کیم یانگ، یان و کیم[11] (۲۰۱۹) طی پژوهشی با ترکیب فرایند پرش و حرکت براونی کسری برای در نظر گرفتن پرش‌ها و ویژگی حافظه بلندمدت در بازده دارایی‌ها، مدلی جدید برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار ارزی اروپایی ارائه کردند. نتایج آزمون‌های عددی، نشان‌دهنده برتری این مدل نسبت به مدل‌های پیش از آن بود.

1. Thao & Thao
2. Albanese & Kuznetsov
3. Auto Regressive
4. Cross-correlations
5. Self-similarity
6. long-range dependence
7. Fractional Brownian Motion
8. Namhyoung & Younhee
9. Xin, & Song
10. Cox–Ingersoll–Ross
11. Kim Kyoung, Yun, & Kim

در دهه‌های اخیر همسو با پژوهش‌های خارجی صورت‌گرفته، شاهد پژوهش‌های داخلی هرچند اندک، در زمینه قیمت‌گذاری اوراق اختیار بوده‌ایم که در ادامه به چند نمونه از آنها اشاره شده است.

مهردوست و صابر (۱۳۹۲) در مقاله‌ای با عنوان «قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش» با مبنا قرار دادن مدل هستون مضاعف و افزودن پرش به فرایند دارایی پایه، به مدل تلاطم تصادفی جدیدی به نام هستون مضاعف پرشی دست یافتند.

نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) با کمک گرفتن از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون، به مدل‌سازی شاخص بورس اوراق بهادار تهران پرداختند. در این پژوهش، پس از استخراج تابع توزیع مدل هستون و تخمین پارامترهای آن با استفاده از قضیه فوکرـ پلانک، برای سنجش توانایی مدل، ارزش در معرض خطر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران مبتنی بر شبیه‌سازی مونت کارلو بر اساس مدل هستون محاسبه شده و عملکرد آن با فرایند تصادفی حرکت براونی هندسی، به‌عنوان مدل تصادفی استانداردی که عموم از آن استفاده می‌کنند، بر اساس رویکرد پس‌آزمون مقایسه شده است که نتایج این مقایسه حاکی از عملکرد نسبی بهتر مدل هستون است.

برزیده، کفاش پنجه‌شاهی، شریعت‌پناهی و تقوی‌فرد (۱۳۹۵) در مقاله‌ای با عنوان «مدلی جهت قیمت‌گذاری سهام مبتنی بر نظریه چشم‌انداز» با واردکردن دو پدیده رفتاری مطرح‌شده در نظریه چشم‌انداز، یعنی «زیان‌گریزی» و «اثر پول برد» به مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های مبتنی بر مصرف، مدلی را برای ارزش‌گذاری سهام ارائه دادند. در این مقاله، معادله قیمت در دو محیط اقتصادی تعریف شده است. در محیط اقتصاد اول، فرایند قیمت و سود تقسیمی برابر و این فرایند در محیط اقتصاد دوم متفاوت است. در ادامه، پس از حل معادله و شبیه‌سازی نسبت قیمت به سود تقسیمی در هر دو محیط اقتصادی و مقایسه با داده‌های واقعی بازار، به این نتیجه رسیدند که میانگین و انحراف معیار داده‌های به‌دست آمده در اقتصاد دوم در مقایسه با اقتصاد اول، به داده‌های واقعی بازار نزدیک‌تر است. در نتیجه، اقتصاد دوم از نسبت قیمت به سود تقسیمی برآورد بهتری می‌دهد؛ یعنی پدیده‌های رفتاری یادشده در بازار ما وجود دارد و در قیمت‌گذاری سهام توسط سرمایه‌گذاران تأثیرگذارند.

نیسی، ملکی و رضائیان (۱۳۹۵) در مقاله‌ای با عنوان «تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان»، پس از بررسی مزیت‌ها و نارسایی‌های مدل هستون کلاسیک، به این نتیجه رسیدند که مدل هستون در سررسیدهای کوتاه‌مدت قادر به هم‌پوشانی کامل تلاطم ضمنی بازارهای مالی نیست. از این‌رو با افزودن فرایند واریانسِ افزون به دینامیک دارایی پایه، به مدلی با عنوان هستون مضاعف دست یافتند.

رحمانی و جعفریان (۱۳۹٦) در پژوهشی با عنوان «بررسی مدل بلک ـ شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه‌های معاملاتی»، بعد از معرفی توان هرست به‌عنوان شاخصی از حافظه بلندمدت در روند قیمت سهام، مدل بلک ـ شولز کسری متکی به حرکت براونی کسری با پارامتر هرست را ارائه کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که ارزش‌گذاری توسط مدل بلک ـ شولز کسری به نتایج واقعی قیمت اختیار خرید نزدیک‌تر است و تئوری قیمت‌گذاری

اختیار معامله بلک ـ شولز با نوسان ثابت و نادیده‌گرفتن هزینه‌های معاملاتی، نمی‌تواند قیمت واقعی اختیار خرید اروپـایی را نشان دهد.

سجاد و ابطحی (۱۳۹۶) با استفاده از تخمین نوسان‌های بازده با مدل نوسان‌هـای تصـادفی، بـه سـنجش ریسـک شاخص گروه بانکی پرداختند. آنها ابتدا با مدل‌سازی نوسان‌های تصادفی توسط دو گروه نوسان‌های تصادفی پـارامتری و نیمه‌پارامتری، به این نتیجه دست یافتند که در مواقعی که توزیع بازده دارای چولگی است، مـدل نیمه‌پارامتری نسبت بـه مدل پارامتری با توزیع نرمال، نوسان‌ها را با دقت بیشتری برآورد می‌کنـد. در این حالت، مدل پارامتری نوسان‌ها را بیشتر از حد واقعی تخمین می‌زند. همچنین این دو پژوهشگر، ارزش در معرض خطر برآورد شده با استفاده از توزیـع بـه‌دسـت آمده از روش نیمه‌پارامتری را با ارزش در معرض خطر به‌دست آمده از روش پارامتری نوسان‌های تصادفی، مقایسه کردند و نشان دادند که مدل نیمه‌پارامتری در محاسبه ارزش در معرض خطر بر مدل پارامتری برتری چندانی ندارد.

میرزایی قزانی (۱۳۹۷) تلاطم تحقق‌یافته روی داده‌های با فراوانی بالای شاخص بـورس اوراق بهـادار تهـران را در پژوهشی بررسی کرد. همچنین وی به مقایسه سه گونه مختلف مدل‌های خودرگرسیونی نـاهمگن HAR-RVJ، HAR-RV و HAR-RV-CJ در زمینه پیش‌بینی تلاطم پرداخت. نتایج تحلیل نشان داد کـه در مجمـوع، مـدل RVJ-HAR برای پیش‌بینی روند آتی متغیر تلاطم (چه در مقایسه عملکـرد درون نمونـه‌ای و چـه بـرون نمونـه‌ای)، مناسـب‌تـرین و دقیق‌ترین مدل است و فقط در افق زمانی ماهانه، مدل ساده RV-HAR در بررسی برون نمونـه‌ای نسـبت بـه دو مـدل دیگر برتری دارد. همچنین، عنصر پرش در این مدل معنادار بوده و نشان می‌دهد که نقش عوامل غیرمنتظره برای تعیین تلاطم شایان توجه است.

نبوی چاشمی و بهرام‌زاده (۱۳۹۷) در مقاله‌ای بـا عنـوان «بررسـی کـارایی فراینـد لـوی در قیمـت‌گـذاری اختیـار معاملات» ضمن اشاره به ایرادهای مدل بلک ـ شـولز، از جملـه توزیـع لگـاریتم بـازده دارایـی نرمـال و تلاطـم ثابـت، فرایندهای جدیدی مبتنی بر فرایند معروف و شناخته‌شده لـوی بـرای قیمـت‌گـذاری اوراق اختیـار ارائـه کردنـد. ایـن دو پژوهشگر با مبنا قرار دادن سهام شـرکت‌هـای پذیرفتـه‌شـده در بـورس ایـران در فاصـله سـال‌هـای ۱۳۸۴ تـا ۱۳۹۶ و شبیه‌سازی قیمت آنها با استفاده از فرایند لوی، کارایی این سری از فرایندهای تصادفی را در بازدهی سهام و در مقایسه با مدل سنتی بلک ـ شولز بررسی کردند. نتایج این پژوهش نشان داد که فرایند لوی نسبت به روش بلک ـ شولز، کارایی و توان بیشتری در قیمت‌گذاری اختیار معامله دارد.

نبوی چاشمی و عبدالهی (۱۳۹۷) طی پژوهشی با استفاده از روش تحلیل گام‌به‌گام تغییـرات حاصـل در متغیرهـای مستقل و تأثیر این تغییر بر متغیرهای وابسته، به تعیین قیمت اختیار معاملات آسیایی، اروپایی و آمریکایی سهام در بورس اوراق بهادار، مقایسه الگوی سود این اختیارات و شناسایی راه‌حل مناسب برای کاهش ریسک دستکاری قیمت‌ها در زمان اعمال اختیار معامله پرداختند. ایشان به این نتیجه رسیدند که اختیار معاملات آسیایی، کمترین ریسک دستکاری قیمت در زمان سررسید برای استفاده یا سوءاستفاده از اعمال شدن یا نشدن اختیار معاملات را دارد.

روش‌شناسی پژوهش

تلاطم تصادفی و فرایند پرش ـ انتشار[1]

یک جایگزین برای فرض ثبات تلاطم این است که تلاطم را تابعی از زمان به‌صورت $\sigma = \sigma(t)$ در نظر بگیریم. با در نظر گرفتن این اصلاح، هنوز مشکل تلاطم ضمنی متفاوت برای قیمت‌های اعمال مختلف وجود دارد. از طرفی دیگر، دوپیر[2] (۱۹۹۴) مدل تلاطم محلی را ارائه کرد که در آن تلاطم به هر دو عامل زمان و موقعیت وابسته است. او نشان داد که پیدا کردن $\sigma = \sigma(S_t.t)$ برای پویایی تلاطم امکان‌پذیر است (کلارک[3]، ۲۰۱۲).

یک فرض واقع‌بینانه‌تر این است که تلاطم، رفتاری تصادفی دارد. معروف‌ترین مدل در این زمینه، مدلی است که هستون در سال ۱۹۹۳ معرفی کرد. وی مدلی را ارائه کرد که در آن تلاطم از یک فرایند تصادفی به نام فرایند ریشه مرتبه دوم[4] پیروی می‌کند. تحت معیار ریسک ـ خنثی[5] Q، مدل هستون به‌شکل زیر ارائه می‌شود:

$$dS_t = S_t(rdt + \sqrt{V_t}dW_t^1) \qquad \text{رابطه ۱}$$

$$dV_t = -\kappa(V_t - \theta)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_t^2 \qquad \text{رابطه ۲}$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \qquad \text{رابطه ۳}$$

در این روابط، S_t قیمت سهام، r نرخ بهره ریسک ـ خنثی و W_t^1 و W_t^2 دو حرکت براونی همبسته بر اساس معیار ریسک ـ خنثی است که در مدل اصلی، به‌صورت تصادفی و مستقل در نظر گرفته می‌شوند. V_t واریانس بلندمدت، θ میانگین بلندمدت V_t، κ سرعت بازگشت و در آخر، σ_v نشان‌دهنده تلاطم V_t است.

یکی دیگر از رویکردهای جالب در مبحث قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله، فرایند پرش است. برای بهبود انعطاف‌پذیری مدل‌ها و تقویت برابری نتایج مدل با واقعیت بازار، بسیاری از پژوهشگران دانشگاهی و متخصصان پیشنهاد دادند که مدل قیمت‌گذاری به‌گونه‌ای اصلاح شود تا S_t از فرایند پرش ـ انتشار پیروی کند. مرتون[6] (۱۹۹۶) نخستین کسی بود که مدلی با استفاده فرایندهای پرش ـ انتشار ارائه کرد. علاوه‌بر این، طی مقاله‌ای دیوید بیتز[7] (۱۹۹۶)، نیز مدل بیتز را معرفی کرد. او با افزودن فرایند پرش به مدل هستون، این مدل را گسترش داد. بیتز با در نظر گرفتن پژوهش‌های گذشته نشان داد که واریانس قیمت دارایی ثابت نیست (یک دلیل نظری برای مدل تلاطم تصادفی) و مسیرهای نمونه قیمت دارایی، گاهی ناپیوستگی‌ها و پرش‌هایی را شامل می‌شود (یک دلیل نظری برای مدل پرش ـ انتشار) و در نهایت با ترکیب این دو ویژگی، مدل پیشنهادی خود را ارائه کرد (کیچنز[8]، ۲۰۱۴). مدل بیتز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dS_t = S_t\left(\left(r - \lambda\mu_J\right)dt + \sqrt{V_t}dW_t^1\right) + J_tS_{t-}dN_t \qquad \text{رابطه ۴}$$

1. Jump-Diffusion
2. Dupire
3. Clark
4. Square-root process
5. Risk-neutral measure
6. Merton
7. David Bates
8. Kitchens

رابطه ۵) $$dV_t = -\kappa(V_t - \theta)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_t^2$$

رابطه ۶) $$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$$

در اینجا نیز فرایند تلاطم V_t همانند آن چیزی است که در مدل هستون بیان شد. همبستگی دو فرایند حرکت براونی برابر با ρ است. همچنین S_{t-} مقدار فرایند و S_t دقیقاً قبل از وقوع پرش در فرایند قیمت‌هاست: $S_{t-} = lim_{\tau\to t_-} S_t$.

N_t نشان‌دهنده فرایند پواسون تحت معیار ریسک ـ خنثی با شدت پرش[1] λ است و درصد اندازه پرش قیمت سهام توسط متغیر تصادفی J نشان داده می‌شود. به گونه‌ای که:

رابطه ۷) $$1 + J \sim log - normal(\mu_s . \sigma_s^2)$$

همچنین ارتباط بین μ_s و μ_J به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

رابطه ۸) $$\mu_J = exp\left\{\mu_S + \frac{\sigma_S^2}{2}\right\} - 1$$

مدل تلاطم تصادفی کسری

بر اساس نتیجه پژوهش‌ها، بسیاری از سری‌های زمانی بازار مالی، فرایند حرکت براونی کسری با وابستگی بلندمدت دارند. این ویژگی مهم، گویای وجود پایداری تلاطم‌هاست (وانگ، ۲۰۱۰). کنت و رنالت، با معرفی اختلال‌های کسری[2]، ویژگی حافظه بلندمدت تلاطم تصادفی را به مدل کلاسیکی هستون افزودند (کنت و رنالت[3]، ۱۹۹۸ و ۲۰۰۱). این تکنیک، برخی معماهای موجود در قیمت‌گذاری اوراق اختیار نظیر شیب پدیده خنده تلاطم در اختیارات بلندمدت و حرکت‌های مشترک تلاطم ضمنی و واقعی را توضیح می‌دهد (بزبرودو، دی‌پرسیو، میشورا[4]، ۲۰۱۶). از این رو، برای در نظر گرفتن ویژگی حافظه بلندمدت و گرفتن افت‌وخیزهای موجود در بازارهای مالی، بهتر است که از مدل ترکیبی حرکت براونی کسری برای گرفتن این تلاطم‌ها از دارایی‌های مالی استفاده شود (شیائو و ژانگ، شو[5]، ۲۰۱۲، ال ـ نوتی[6]، ۲۰۰۳ و فورمِسکی، گوراوسکی و گروچلا[7]، ۲۰۱۴). مدل ترکیبی حرکت براونی کسری از خانواده، فرایندهای گوسی است. در واقع این مدل، ترکیبی خطی از حرکت براونی و حرکت براونی کسری است (شکراللهی[8]، ۲۰۱۷). در مدل ترکیبی براونی کسری، ما به‌جای حرکت براونی، از فرایند زیر استفاده می‌کنیم:

رابطه ۹) $$B_t = \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s$$

1. Jump intensity
2. Fractional noise
3. Comte, & Renault
4. Bezborodov, Di Persio & Mishura
5. Xiao, Zhang & Xu
6. El-Nouty
7. Foremski, Gorawski & Grochla
8. Shokrollahi

H، پارامتر حافظه بلندمدت است که با عنوان توان هرست[1] شناخته می‌شود و مقداری بین ۰ تا ۱ به خود می‌گیرد. اگر $H = ۱/۲$ باشد، آنگاه B_t حرکت براونی استاندارد معمولی است و این فرایند زمانی دارای حافظه بلندمدت است که $H > ۱/۲$ باشد. بنابراین، ما تنها مقادیر بازه ۰/۵ تا ۱ را در نظر می‌گیریم (مرازک، پوزپیسیل و سبوتکا[2]، ۲۰۱۶). علاوه‌بر این می‌توانیم مقدار B_t را به‌صورت زیر تخمین بزنیم:

$$B_t^\varepsilon = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^{H-1/2} dW_s$$ رابطه ۱۰)

در صورتی که ε به‌سمت صفر حرکت کند، B_t^ε به B_t نزدیک می‌شود. تخمین B_t^ε به‌جای B_t چندین ویژگی دارد. اول اینکه فرصت آربیتراژ تحت تخمین پویایی مدل برای گروه بزرگی از سبدهای مالی ساده و خود ـ تأمین[3] وجود ندارد. دوم اینکه چنانچه از فرایند کسری برای توضیح فرایند dv_t استفاده کنیم، می‌توانیم برای به‌دست‌آوردن قیمت معادلات مشتقات جزئی[4] از محاسبات تصادفی استاندارد ایتو[5]، به‌جای تکنیک‌های ریاضی پیچیده‌تر، استفاده کنیم.

در ادامه، ابتدا معادلات مشتقات جزئی برای مدل‌های تلاطم تصادفی بدون پرش را به‌دست می‌آوریم و بعد توابع مشخصه[6] را استخراج کرده و در انتها برای اینکه پرش‌ها نیز در نظر گرفته شوند، یک تابع مشخصه از فرایند ترکیبی پواسون اصلاح شده را به مدل خود اضافه می‌کنیم.

تشریح مدل

برای توضیح روش‌های تخمین معادلات کسری با مفهوم سبد مالی خود ـ تأمین شروع می‌کنیم. برای این منظور، $X = X_t$ را به‌عنوان مقدار خود ـ تأمین سبد مالی x در زمان t در نظر می‌گیریم. فرض می‌شود که این سبد مالی از نظر دلتا[7] و وگا[8] پوشش داده شده باشد $(\frac{\partial X}{\partial S_t} = ۰, \frac{\partial X}{\partial v_t} = ۰)$. همچنین فرض می‌کنیم که x شامل یک اختیار خرید با قیمت $V = V(S_t.v_t.t)$ و $\Delta-$ واحد از سهم پایه به قیمت $S = S_t$ و $\Delta_۱-$ واحد از اختیار معامله دیگری با قیمت $V_۱ = V_۱(S_t.v_t.t)$ باشد. از این رو ارزش سبد مالی توسط معادله زیر تعیین می‌شود:

$$X = V - \Delta S - \Delta_1 V_1$$ رابطه ۱۱)

از آنجا که سبد مالی از نوع خود ـ تأمین است، تغییر در ارزش آن به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

1. Hurst exponent
2. Mrázek, Pospíšil & Sobotka
۳. self-financing سبد مالی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها تنها به خرید و فروش دارایی پایه و مشتقه مربوط به آن منحصر می‌شوند. به بیان نه‌چندان جامع و مانع، سبد خود ـ تأمین سبدی است که تزریق خارجی و برداشت پول ندارد (نیسی، ملکی، رضائیان، ۱۳۹۵).
4. Partial differential equation (PDE)
5. Ito
6. Characteristic functions
۷. Delta تغییر به‌وجود آمده در قیمت یک قرارداد اختیار خرید به ازای یک واحد تغییر قیمت در دارایی پایه.
۸. Vega تغییر به‌وجود آمده در قیمت یک قرارداد اختیار خرید به ازای یک واحد تغییر در تلاطم قیمت دارایی پایه.

رابطه ۱۲ $$dX = dV - \Delta dS - \Delta_1 dV_1$$

با استفاده از لم ایتو، دیفرانسیل‌های dV و dV_1 به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

رابطه ۱۳ $$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial v_t}dv_t + \frac{1}{2}v_t S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{1}{2}v_t \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {v_t}^2}dt + \rho v_t \beta S \frac{\partial^2 V}{\partial v_t \partial S}dt$$

رابطه ۱۴ $$dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_1}{\partial S}dS + \frac{\partial V_1}{\partial v_t}dv_t + \frac{1}{2}v_t S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2}dt + \frac{1}{2}v_t \beta^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial {v_t}^2}dt + \rho v_t \beta S \frac{\partial^2 V_1}{\partial v_t \partial S}dt$$

با درنظر گرفتن معادلات dV و dV_1 و فروض پوششی که پیش‌تر در نظر گرفتیم، رابطه ۱۲ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

رابطه ۱۵ $$\begin{aligned} dX &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v_t \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {v_t}^2} + \rho v_t \beta S \frac{\partial^2 V}{\partial v_t \partial S}\right)dt \\ &\quad - \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v_t \beta^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial {v_t}^2} + \rho v_t \beta S \frac{\partial^2 V_1}{\partial v_t \partial S}\right)\Delta_1 dt \\ &= Adt - B\Delta_1 dt \end{aligned}$$

فرض می‌شود نرخ بهره بدون ریسک (r) ثابت باشد. همچنین با استفاده از پارامترهای پوششی Δ و Δ_1 داریم:

رابطه ۱۶ $$Adt - B\Delta_1 dt = r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1)dt$$

رابطه ۱۷ $$A - B\Delta_1 = r(V - \Delta S - \Delta_1 V_1)$$

رابطه ۱۸ $$\frac{A - rV + \frac{\partial V}{\partial S}rS}{\frac{\partial V}{\partial v_t}} = \frac{B - rV_1 + \frac{\partial V_1}{\partial S}rS}{\frac{\partial V_1}{\partial v_t}}$$

هر دو سمت رابطه ۱۸ به $V = V(S_t.v_t.t)$ و $V_1 = V_1(S_t.v_t.t)$ وابسته است و همچنین هر دو سمت رابطه باید با $g = g(S_t.v_t.t)$ برابر باشد. در این مقاله از مطالعه گترال[1] (۲۰۰۶) استفاده شده است. رابطه g را برابر با $g = -(\alpha - \varphi\beta\sqrt{v_t})$ قرار می‌دهیم که بر اساس مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای (CAPM)[2]، φ قیمت بازاری ریسک تلاطم است. از آنجا که قیمت اختیار V) موضوع مدنظر ماست، فقط از سمت چپ رابطه ۱۸ استفاده می‌کنیم.

رابطه ۱۹ $$A - rV + \frac{\partial V}{\partial x_t}rx_t = -(\alpha - \varphi\beta\sqrt{v_t})\frac{\partial V}{\partial v_t}$$

رابطه ۲۰ $$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}v_t S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v_t \beta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {v_t}^2} + \rho v_t \beta S \frac{\partial^2 V}{\partial v_t \partial S} - rV + \frac{\partial V}{\partial S}rS = -(\alpha - \varphi\beta\sqrt{v_t})\frac{\partial V}{\partial v_t}$$

1. Gatheral
2. Capital Asset Pricing Model

برای ساده‌سازی رابطه آخر، عبارت $\tau = T - t$ را جایگزین می‌کنیم. T نشان‌دهنده مدت زمان باقی‌مانده تا سررسید اختیار معامله است. همچنین در این رابطه، لگاریتم قیمت سهام ($x_t = ln(S)$) را جایگزین S می‌کنیم.

رابطه ۲۱
$$-\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{1}{2}v_t\frac{\partial^2 V}{\partial {x_t}^2}+(r-\frac{1}{2}v_t)\frac{\partial V}{\partial x_t}+\frac{1}{2}v_t\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial {v_t}^2}+\rho v_t\beta\frac{\partial^2 V}{\partial v_t\partial x_t}-rV = -\left(\alpha-\varphi\beta\sqrt{v_t}\right)\frac{\partial V}{\partial v_t}$$

برای به‌دست آوردن قیمت‌های اختیار یکتا، رانشِ[1] ریسک ـ خنثی (dv_t) را به‌صورت $\hat{\alpha} = \alpha - \varphi\beta\sqrt{v_t}$ تعریف می‌کنیم که این خود باعث می‌شود φ از رابطه ما حذف می‌شود.

رابطه ۲۲
$$-\frac{\partial V}{\partial \tau}+\frac{1}{2}v_t\frac{\partial^2 V}{\partial {x_t}^2}+\left(r-\frac{1}{2}v_t\right)\frac{\partial V}{\partial x_t}+\frac{1}{2}v_t\beta^2\frac{\partial^2 V}{\partial {v_t}^2}+\rho v_t\beta\frac{\partial^2 V}{\partial v_t\partial x_t}-rV+\alpha\frac{\partial V}{\partial v_t}=0$$

قیمت اختیار خرید، باید رابطه ۲۲ را با شرایط اولیه‌ای برآورده کند که توسط تابع عایدی[2] اختیار خرید $V_{call} = (S_t - K)^+$ ارائه می‌شود. قیمت را می‌توان به‌صورت تنزیل انتظارات تابع عایدی نشان داد:

رابطه ۲۳
$$V_{call}(\tau.K) = e^{-r\tau}E[(S_t - K)^+] = S_tP_1(x_t.v_t.t) - e^{-r\tau}KP_2(x_t.v_t.t) = e^{x_t}P_1(x_t.v_t.t) - e^{-r\tau}KP_2(x_t.v_t.t)$$

می‌توانیم رابطه ۲۳ را در رابطه ۲۲ جایگزین کنیم. برای مقادیر $K = ۰$ و $S_t = ۱$ معادله‌های دیفرانسیل جزئی را فقط برای $P_۱$ به دست می‌آوریم.

رابطه ۲۴
$$-\frac{\partial P_1}{\partial \tau}+\frac{1}{2}v_t\frac{\partial^2 P_1}{\partial {x_t}^2}+\left(r+\frac{1}{2}v_t\right)\frac{\partial P_1}{\partial x_t}+\frac{1}{2}v_t\beta^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial {v_t}^2}+\rho v_t\beta\frac{\partial^2 P_1}{\partial v_t\partial x_t}-rP_1+\left(\alpha-\varphi\beta\sqrt{v_t}\right)\frac{\partial P_1}{\partial v_t}=0$$

به‌طور مشابه با مقادیر $S_t = r = ۰$ و $K = -۱$ می‌توان معادله‌های مشتقات جزئی را برای $P_۲$ به دست آورد.

رابطه ۲۵
$$-\frac{\partial P_2}{\partial \tau}+\frac{1}{2}v_t\frac{\partial^2 P_2}{\partial {x_t}^2}+\left(r-\frac{1}{2}v_t\right)\frac{\partial P_2}{\partial x_t}+\frac{1}{2}v_t\beta^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial {v_t}^2}+\rho v_t\beta\frac{\partial^2 P_2}{\partial v_t\partial x_t}+\alpha\frac{\partial P_2}{\partial v_t}=0$$

به جای حل مستقیم سیستم معادلات مشتقات جزئی (رابطه‌های ۲۴ و ۲۵)، از توابع مشخصه قیمت‌های لگاریتمی استفاده می‌کنیم. بعد از تعریف توابع مشخصه به‌صورت $j = ۱/۲$ ، $f_j = f_j(\varphi.\tau)$ با استفاده از تبدیل فوریه معکوس[3]، P_j را به آسانی می‌توان محاسبه کرد.

رابطه ۲۶
$$P_j = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Re\left(\frac{w^{i\varphi ln\,(K)}f_j}{i\varphi}\right)d\varphi$$

1. Drift
2. Pay-Off Function
3. Invers Fourier transform

همانند مقاله اصلی هستون (۱۹۹۳)، فرض می‌کنیم که توابع مشخصه به‌صورت زیر باشند:

رابطه ۲۷)
$$f_j = exp\{C_j(\tau.\varphi) + D_j(\tau.\varphi)v_0 + i\varphi x\}$$

ابتدا رابطه ۲۷ را برای f_1 به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

رابطه ۲۸)
$$-\left(\frac{\partial C_1}{\partial \tau} + v_t\frac{\partial D_1}{\partial \tau}\right)f_1 + \rho v_t\beta i\varphi D_1 f_1 - \frac{1}{2}v_t\varphi^2 + \frac{1}{2}v_t\beta^2 D_1^2 f_1 + \left(r + \frac{1}{2}v_t\right)i\varphi f_1 + (\alpha - \rho\beta v_t)D_1 f_1 = 0$$

به جای فرایند رانش واریانس dv_t، یک رانش خطی از v_t درنظر می‌گیریم. بـرای مثـال معادلـه آن را مـی‌تـوان به‌صورت $\alpha(S_t.v_t.t) = \theta + \bar{\alpha}(S_t.t)v_t$ درنظر گرفت. بعد از بازنویسی معادله بـر اسـاس عبـارات D_1 و C_1 و فـاکتور گرفتن از v_t معادله زیر حاصل می‌شود:

رابطه ۲۹)
$$v_t\left[-\frac{\partial D_1}{\partial \tau} + \rho\beta i\varphi D_1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\beta^2 D_1^2 + \frac{1}{2}i\varphi + (\bar{\alpha} + \rho\beta)D_1\right] - \frac{\partial C_1}{\partial \tau} + ri\varphi + \theta D_1 = 0$$

از آنجا که فرض کردیم $v_t > 0$ باشد، بنابراین آن را حذف می‌کنیم.

رابطه ۳۰)
$$\frac{\partial D_1}{\partial \tau} = \rho\beta i\varphi D_1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\beta^2 D_1^2 + \frac{1}{2}i\varphi + (\bar{\alpha} + \rho\beta)D_1$$

رابطه ۳۱)
$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} = ri\varphi + \theta D_1$$

با تکرار مراحل قبل، می‌توان سیستم معادلات دیگری برای f_2 به دست آورد. از این رو توابع مشخصه f_j ، کـه بـر اساس رابطه ۲۷ تعریف شده‌اند، باید سیستم معادلات زیر را برآورده کنند:

رابطه ۳۲)
$$\frac{\partial D_1}{\partial \tau} = \rho\beta i\varphi D_1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\beta^2 D_1^2 + \frac{1}{2}i\varphi + (\bar{\alpha} + \rho\beta)D_1$$

رابطه ۳۳)
$$\frac{\partial D_2}{\partial \tau} = \rho\beta i\varphi D_2 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\beta^2 D_2^2 + \frac{1}{2}i\varphi + \bar{\alpha}D_2$$

رابطه ۳۴)
$$\frac{\partial C_j}{\partial \tau} = ri\varphi + \theta D_j$$

با توجه به شروط اولیه زیر:

رابطه ۳۵)
$$C_j(0.\varphi) = D_j(0.\varphi) = 0$$

می‌توان دو رابطه اول را که با عنوان معادلات ریکات[1] شناخته می‌شوند، به‌دست آورد، سـپس دو رابطـه آخـر را بـا

1. Riccati equations

انتگرال‌گیری مستقیم حل کرد. رابطه‌های ۳۲ و ۳۳ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

رابطه ۳۶)
$$\frac{\partial D_1(\tau.\varphi)}{\partial \tau} = A_j D_j^2 + B_j D_j + K_j$$

که می‌توان رابطه ۳۶ را به‌صورت زیر حل کرد:

$$\Delta_j = \sqrt{B_j^2 - 4A_j K_j}$$

$$Y_j = \frac{-B_j + \Delta_j}{2A_j}$$

$$g_j = \frac{B_j - \Delta_j}{B_j + \Delta_j}$$

و D_j به‌صورت زیر خواهد بود:

رابطه ۳۷)
$$D_j(\tau.\varphi) = \frac{Y_j\left(1 - e^{\Delta_j \tau}\right)}{1 - g_j e^{\Delta_j \tau}}$$

در مرحله بعد برای به‌دست آوردن C_j از سمت راست رابطه ۳۴ انتگرال می‌گیریم.

رابطه ۳۸)
$$\begin{aligned} C_j(\tau.\varphi) &= ri\varphi\tau + \theta \int_0^\tau D_j(t.\varphi)dt = ri\varphi\tau + \theta \int_0^\tau \frac{Y_j\left(1 - e^{\Delta_j \tau}\right)}{1 - g_j e^{\Delta_j \tau}} dt \\ &= ri\varphi\tau + \theta Y_j \left[\tau + \int_0^\tau \frac{(g_j - 1)e^{\Delta_j \tau}}{1 - g_j e^{\Delta_j \tau}} dt\right] \\ &= ri\varphi\tau + \theta Y_j \tau - \theta Y_j \frac{g_j - 1}{\Delta_j g_j} ln\left(\frac{1 - g_j e^{\Delta_j \tau}}{1 - g_j}\right) \\ &= ri\varphi\tau + \theta Y_j \tau - \frac{\theta}{A} ln\left(\frac{1 - g_j e^{\Delta_j \tau}}{1 - g_j}\right) \end{aligned}$$

برای مدل‌های تلاطم تصادفی، باید توابع مشخصه را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

رابطه ۳۹)
$$f_j(\tau.\varphi) = exp\{C_j(\tau.\varphi) + D_j(\tau.\varphi)v_0 + i\varphi x\}$$

رابطه ۴۰)
$$f_j^{(Heston)}(\tau.\varphi) = exp\{C_j(\tau.\varphi) + D_j(\tau.\varphi)v_0 + i\varphi x\}$$

برای ۱/۲ = j :

رابطه ۴۱)
$$C_j(\tau.\varphi) = ri\varphi\tau + \frac{\theta}{\sigma_v^2}\left[\left(b_j + \rho\sigma_v\varphi i + \Delta_j\right)\tau - 2ln\left(\frac{1 - g_j e^{\Delta_j \tau}}{1 - g_j}\right)\right]$$

رابطه ۴۲)
$$\begin{aligned} D_j(\tau.\varphi) &= \frac{b_j + \rho\sigma_v\varphi i + \Delta_j}{\sigma_v^2}\left(\frac{1 - e^{\Delta_j \tau}}{1 - g_j e^{\Delta_j \tau}}\right). g_j = \frac{b_j - \rho\sigma_v\varphi i + \Delta_j}{b_j - \rho\sigma_v\varphi i - \Delta_j}. \Delta_j \\ &= \sqrt{(\rho\sigma_v\varphi i - b_j)^2 - \sigma_v^2(2u_j\varphi i - \varphi^2)}. u_1 = \frac{1}{2}. u_2 = -\frac{1}{2}. \theta \\ &= k\bar{v}. b_1 = k - \rho\sigma_v. b_2 = k \end{aligned}$$

در مدل‌های تلاطم تصادفی همراه با پرش (مدل بیتز) باید یک تابع مشخصه از فرایند ترکیبی پواسون اصلاح شده را به سیستم معادلات خود اضافه کنیم که با ψ نمایش داده می‌شود.

رابطه ۴۳)
$$f_j^{(Bates)}(\tau.\varphi)=exp\{C_j(\tau.\varphi)+\ D_j(\tau.\varphi)v_0\ +\ i\varphi x+\Psi(\varphi)\tau\}$$

بنابراین در حالت مدل همراه با پرش، باید تابع زیر به توابع دیگر افزوده شود:

رابطه ۴۴)
$$\Psi(\varphi)=-\lambda i\varphi\left(e^{\alpha+\gamma^2/_2}-1\right)+\lambda\left(e^{i\varphi\alpha-\varphi^2\gamma^2/_2-1}\right)$$

برای در نظر گرفتن حافظه بلندمدت و برخورداری از هر دو ویژگی پرش و وابستگی بلندمدت، پارامتر هرست را بـه مدل بیتز اضافه می‌کنیم. در این صورت با اضافه‌کردن پارامتر هرست به مدل بیتز، بـه مـدل خـود یعنـی مـدل هسـتون کسری ـ پرشی دست می‌یابیم که این مدل در زیر ارائه شده است.

رابطه ۴۵)
$$f_j^{(FJH)}(\tau.\varphi)=exp\{C_j(\tau.\varphi)+\ D_j(\tau.\varphi)v_0\ +\ i\varphi x+\Psi(\varphi)\tau\}$$
$$For\ j\ =\ 1.2\ and\ \tau\ =\ T\ -\ t$$

رابطه ۴۶)
$$C_j(\tau.\varphi)=ri\varphi\tau+\theta Y_j\tau-\frac{2\theta}{\beta^2}ln\left(\frac{1-g_je^{\Delta_j\tau}}{1-g_j}\right)$$

رابطه ۴۷)
$$D_j(\tau.\varphi)=Y_j\left(\frac{1-e^{\Delta_j\tau}}{1-g_je^{\Delta_j\tau}}\right)$$

رابطه ۴۸)
$$\Psi(\varphi)=-\lambda i\varphi\left(e^{\alpha+\gamma^2/_2}-1\right)+\lambda\left(e^{i\varphi\alpha-\varphi^2\gamma^2/_2-1}\right)$$
$$Y_j=\frac{b_j-\rho\beta\varphi i+\Delta_j}{\beta^2}\ g_j=\frac{b_j-\rho\beta\varphi i+\Delta_j}{b_j-\rho\beta\varphi i-\Delta_j}.\Delta_j=\sqrt{\left(\rho\beta\varphi i-b_j\right)^2-\beta^2\left(2u_j\varphi i-\varphi^2\right)}.\beta$$
$$=\sigma_v\varepsilon^{H-1/_2\sqrt{v_t}}.u_1=\frac{1}{2}.u_2=-\frac{1}{2}$$
$$\theta=k\bar{v}.b_1=k-\left(H-{}^1/_2\right)\sigma_v\phi_t^\varepsilon.b_2=k-\left(H-{}^1/_2\right)\sigma_v\phi_t^\varepsilon$$

یافته‌های پژوهش

واسنجی بازار واقعی

برای واسنجی بازار اختیار معامله، ابتدا باید پارامترهای مدل را به‌دست آوریـم. واسـنجی مـدل بـه‌صـورت یـک مشـکل بهینه‌سازی فرمول‌بندی می‌شود و هدف از آن، حداقل‌کردن خطای قیمت‌گذاری بین قیمت‌های به‌دست‌آمده توسط مـدل و قیمت‌های بازار برای اختیارات معامله شده است. یکی از دیدگاه‌های معمول به مقیـاس‌بنـدی ایـن خطاهـا، اسـتفاده از اختلاف مربعات بین قیمت‌های بازار و قیمت‌های به‌دست آمده توسط مدل است. این دیدگاه در نهایت بـه روش حـداقل

مربعات غیرخطی منجر می‌شود. از نظر ریاضی با توجه به مدل و گروه پارامترهای $\widehat{\Phi}$، می‌توان $\widehat{\Phi}$ را به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$\widehat{\Phi} = arg\,min\sum_{i=1}^{N}(C_i^{Market}(S_0.K_i.T_i.r) - C_i^{Model}(S_0.K_i.T_i.r.\Phi)$$ رابطه ۴۹)

همچنین پس از تخمین پارامترها و قیمت‌گذاری اوراق تبعی توسط مدل‌های ارائه شده، برای مقایسه مدل‌ها، مقیاس‌های خطای ریشه دوم میانگین مربعات (RMSE)[1]، میانگین درصد خطای مطلق (APE)[2] و میانگین خطای مطلق (AAE)[3] به‌کار گرفته می‌شوند:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{Model}}(0.\Phi) - \mathrm{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{Market}}(0)\right|^2}$$ رابطه ۵۰)

$$APE = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|C_i^{Model}(0.\Phi) - C_i^{Market}(0)\right|}{\sum_{i=1}^{n} C_i^{Market}(0)}$$ رابطه ۵۱)

$$AAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{Model}}(0.\Phi) - \mathrm{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{Market}}(0)\right|$$ رابطه ۵۲)

قیمت‌گذاری اوراق تبعی

از آنجا که هدف نهایی این پژوهش، استفاده از مدل ارائه‌شده قیمت‌گذاری اوراق اختیار منتشر شده در کشور است، ضروری است که کارایی مدل‌ها در زمینه ارزش‌گذاری این اوراق نیز بررسی شود.

در کشور ما طی چند سال اخیر، نوع خاصی از اختیارات به نام اوراق «اختیار فروش تبعی سهام» طراحی شده و در بورس اوراق بهادار تهران عرضه می‌شود که در اصل، طرحی برای بیمه سهام است. با توجه به اینکه در ایران برای این اوراق، بازار ثانویه‌ای وجود ندارد و اوراق بعد از خریداری توسط سرمایه‌گذار تا زمان سررسید در بازار معامله نمی‌شود، پس می‌توان آن را نوعی اختیار معامله اروپایی دانست (خوزین، ۱۳۹۵).

از سال ۱۳۹۱ شرکت‌های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران، مجوز انتشار اوراق اختیار فروش تبعی را پیدا کردند. از آن زمان تا شش ماهه دوم سال ۱۳۹۶ روی هم رفته ۵۸ نوع اوراق اختیار فروش تبعی در بورس اوراق بهادار تهران عرضه شده است. پس با توجه به مطالب بیان‌شده، جامعه آماری این پژوهش، کلیه ۵۸ نوع اوراق اختیار فروش تبعی عرضه‌شده در بورس اوراق بهادار تهران است. از این بین اوراقی حذف شده‌اند که سهام پایه آنها، از زمان انتشار تا تاریخ اعمال اوراق تبعی مربوط به آنها، تقسیم سود یا افزایش سرمایه داشته‌اند. در نهایت برای آزمون کارایی مدل‌های

1. Root Mean Square Error
2. Average Percent Error
3. Average Absolute Error

ارائه شده، سه نوع از اوراق تبعی با بیشترین تعداد معامله انتخاب شدند که عبارت‌اند از: «هپردیس۵۱۱۱»، «هخود۳۱۰۱» و «هخابر۳۱۰۱».

جدول ۱. اوراق اختیار معامله منتشرشده به‌ترتیب تعداد اوراق معامله‌شده

نماد	تعداد	نماد	تعداد	نماد	تعداد
هپریس۵۱۱۱	۱۹۵۱	هصندق۳۱۰۱	۲۹۳	هجم۵۱۲۱	۴۷
هخود۳۱۰۱	۱۴۰۸	هساخت۳۱۰۱	۲۰۹	هکرما۳۰۲۱	۴۰
هخابر۳۱۰۱	۱۱۱۵	همراه۳۰۱۱	۱۸۱	هبملت۷۰۷۱	۳۰
هپسان۳۱۰۱	۶۳۴	هکرما۳۱۰۱	۱۶۱	هتراس۷۰۳۱	۲۴
هتوسم۳۱۰۱	۶۳۴	هکرما۲۰۲۱	۱۵۵	همسکن۱۱۱۱	۱۳
هخابر۵۰۱۱	۵۶۹	هکچاد۳۰۳۱	۱۱۹	هاراک۷۰۲۱	۹
هپیکو۳۰۲۱	۵۱۴	همراه۵۰۱۱	۱۰۴	هفملی۷۰۳۱	۴
همراه۳۱۰۱	۴۰۳	هکچاد۲۰۳۱	۹۱	هفملی۷۰۶۱	۴
هکشو۳۰۷۱	۳۹۷	هغدیر۲۱۲۱	۹۰	هفخاس۶۰۹۱	۳
هاراک۳۱۰۱	۳۵۴	هفخوز۳۱۰۱	۷۷		

تخمین توان هرست

در این مطالعه از چندین روش به‌عنوان مقیاسی از وابستگی بلندمدت در داده‌های سری زمانی استفاده شده است. در این بخش به تخمین توان هرست پرداخته می‌شود. برای این منظور رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha = 2H - 1$$ رابطه ۵۳)

در صورتی که بازه آلفا، اعدادی بین ۰ و ۱ در نظر گرفته شود، به‌راحتی مشاهده می‌شود که برای فرایندهای حافظه بلندمدت، H مقادیری بین ۱ تا ۱/۵ را شامل می‌شود (بران[1]، ۱۹۹۴). در این پژوهش از داده‌های ساختگی برای پیدا کردن بهترین روش تخمین توان هرست، از بین شش روش مجموع واریانس[2]، تخمین‌زننده گوک ـ پرتر ـ هاداک[3]، روش هیگوچی[4]، روش پنگ[5]، تحلیل دوره‌ای[6] و تحلیل محدوده با مقیاس‌بندی مجدد[7]، استفاده شده است (برآن، ۱۹۹۴؛ گوک و همکاران، ۱۹۸۳؛ هیگوچی، ۱۹۸۸؛ هرست، ۱۹۵۱؛ پنگ، ۱۹۹۴).

برای تخمین توان هرست از داده‌های نوسان‌ها، باید تغییرات تلاطم تخمین زده شده را در نظر بگیریم، برای مثال iامین عنصر به‌صورت زیر است:

1. Beran
2. Aggregate Variance
3. Geweke-Porter-Hudak estimator
4. Higuchi
5. Peng
6. Periodogram analysis
7. Rescaled range analysis

رابطه ۵۴)
$$D_i = v_{t_i} - v_{t_{i-1}}$$
$$i = 1.2. \dots .N-1$$

N برابر است با تعداد مشاهداتی که از تلاطم واقعی یا تخمین‌زده شده داریم.

برای آزمون تخمین‌زننده‌ها، ۱۰۰۰۰ مسیر نمونه از پنج فرایند تخمین حافظه بلندمدت را در قالب حرکت‌های براونی کسری، شبیه‌سازی کردیم. هر فرایند با مقدار متفاوتی از توان هرست شبیه‌سازی می‌شود. با توجه به مطالبی که پیش‌تر در خصوص توان هرست بیان شد، اگر H برابر با ۰/۵ باشد، آنگاه B_t حرکت براونی استاندارد معمولی است. این فرایند زمانی دارای حافظه بلندمدت است که H بزرگ‌تر از ۰/۵ باشد. بنابراین با توجه به بازه عددی ۰/۵ تا ۱، داده‌های ساختگی زیر را برای یافتن بهترین روش تخمین توان هرست در نظر می‌گیریم:

رابطه ۵۵)
$$H \in [0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80, 0.85]$$

فرایندهای تخمین از معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می‌کنند. در اینجا مقادیر $\kappa =$ ۲، $\bar{v} =$ ۰/۱ و $\xi =$ ۳ ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

رابطه ۵۶)
$$V_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma_v\sqrt{V_t}dW_t^2$$

جدول ۲. متوسط تخمین توان هرست و میانگین خطای نسبی اوراق تبعی

		روش مجموع وارانس	تخمین‌زننده گوک ـ پرتر ـ هاداک	روش هیگوچی	روش پنگ	تحلیل دوره‌ای	تحلیل محدوده با مقیاس‌بندی مجدد
هیرس ۵۱۱۱	H=۰/۶۰	۰/۶۱۳۸ (۰/۰۰۰۷)	۰/۵۸۸۴ (۰/۰۰۰۹)	۰/۶۸۶۲ (۰/۰۰۱۱)	۰/۶۱۳۵ (۰/۰۰۱۹)	۰/۶۰۳۳ (۰/۰۰۱۰)	۰/۶۱۹۸ (۰/۰۰۱۱)
	H=۰/۶۵	۰/۶۳۳۸ (۰/۰۰۰۵)	۰/۶۲۹۹ (۰/۰۰۰۵)	۰/۶۹۳۵ (۰/۰۰۰۷)	۰/۶۲۲۲ (۰/۰۰۰۷)	۰/۶۱۵۶ (۰/۰۰۰۹)	۰/۶۳۳۱ (۰/۰۰۰۵)
	H=۰/۷۰	۰/۶۸۳۳ (۰/۰۰۰۶)	۰/۷۰۶۸ (۰/۰۰۶۵)	۰/۷۲۶۴ (۰/۰۰۱۲)	۰/۶۵۸۹ (۰/۰۰۰۸)	۰/۶۴۳۲ (۰/۰۰۰۹)	۰/۶۸۶۲ (۰/۰۰۰۸)
	H=۰/۷۵	۰/۷۴۲۱ (۰/۰۰۰۵)	۰/۷۲۶۸ (۰/۰۰۰۷)	۰/۷۵۹۹ (۰/۰۰۱۰)	۰/۷۰۰۳ (۰/۰۰۰۷)	۰/۷۳۵۳ (۰/۰۰۱۰)	۰/۷۲۵۴ (۰/۰۰۱۲)
	H=۰/۸۰	۰/۷۹۸۵ (۰/۰۰۱۱)	۰/۷۵۴۲ (۰/۰۰۰۹)	۰/۷۹۵۳ (۰/۰۰۰۹)	۰/۷۸۶۱ (۰/۰۰۵۶)	۰/۷۵۶۸ (۰/۰۰۱۱)	۰/۷۸۶۶ (۰/۰۰۰۸)
	H=۰/۸۵	۰/۸۳۵۷ (۰/۰۰۱۳)	۰/۸۱۳۳ (۰/۰۰۱۲)	۰/۸۳۹۱ (۰/۰۰۰۷)	۰/۸۳۵۲ (۰/۰۰۱۱)	۰/۷۹۹۴ (۰/۰۰۱۰)	۰/۸۵۶۱ (۰/۰۰۰۷)
	AAE	٪۰/۷۴	٪۰/۶۱	٪۰/۵۰	٪۰/۷۷	٪۰/۷۱	٪۱/۰۱

ادامه جدول ۲

		روش مجموع واریانس	تخمین‌زننده گوک ـ پرتر ـ هاداک	روش هیگوچی	روش پنگ	تحلیل دوره‌ای	تحلیل محدوده با مقیاس‌بندی مجدد
هخودا۳۱۰۱	H=۰/۶۰	۰/۵۲۱۸ (۰/۰۰۰۶۵)	۰/۵۶۸۲ (۰/۰۰۱۰)	۰/۵۱۳۸ (۰/۰۰۰۸)	۰/۴۸۳۲ (۰/۰۰۰۸)	۰/۶۲۸۴ (۰/۰۰۱۱)	۰/۵۹۱۱ (۰/۰۰۰۵)
	H=۰/۶۵	۰/۵۸۱۲ (۰/۰۰۰۵)	۰/۵۷۳۹ (۰/۰۰۱۰)	۰/۵۵۳۵ (۰/۰۰۱۲)	۰/۵۱۳۸ (۰/۰۰۰۶)	۰/۶۵۳۲ (۰/۰۰۱۰)	۰/۶۰۰۶ (۰/۰۰۱۱)
	H=۰/۷۰	۰/۷۱۳۸ (۰/۰۰۰۷)	۰/۷۰۱۵ (۰/۰۰۱۱)	۰/۶۸۶۲ (۰/۰۰۷۵)	۰/۵۵۳۸ (۰/۰۰۰۵)	۰/۶۹۶۱ (۰/۰۰۶۳)	۰/۶۳۵۸ (۰/۰۰۱۲)
	H=۰/۷۵	۰/۷۵۳۱ (۰/۰۰۵۵)	۰/۷۲۲۳ (۰/۰۰۰۷)	۰/۷۳۲۵ (۰/۰۰۰۹)	۰/۶۰۲۸ (۰/۰۰۰۸۵)	۰/۷۲۰۳ (۰/۰۰۱۰)	۰/۶۶۸۲ (۰/۰۰۱۱)
	H=۰/۸۰	۰/۷۸۹۶ (۰/۰۰۰۸)	۰/۷۶۱۹ (۰/۰۰۰۶)	۰/۷۵۶۱ (۰/۰۰۰۸)	۰/۶۴۲۵ (۰/۰۰۱۲)	۰/۷۵۶۲ (۰/۰۰۱۰)	۰/۷۱۱۳ (۰/۰۰۰۷)
	H=۰/۸۵	۰/۸۱۳۳ (۰/۰۰۰۵)	۰/۸۳۲۲ (۰/۰۰۰۷)	۰/۸۱۳۵ (۰/۰۰۱۳)	۰/۷۲۳۵ (۰/۰۰۰۹)	۰/۸۰۴۲ (۰/۰۰۱۲)	۰/۷۷۶۵ (۰/۰۰۱۵)
	AAE	٪۰/۹۵	٪۰/۸۰	٪۰/۹۱	٪۱/۱۸	٪۰/۵۰	٪۰/۶۳
هخابر۳۱۰۱	H=۰/۶۰	۰/۵۷۶۸ (۰/۰۰۱۰)	۰/۶۰۰۲ (۰/۰۰۰۵)	۰/۵۷۵۳ (۰/۰۰۱۰)	۰/۶۵۸۴ (۰/۰۰۷۶)	۰/۵۲۶۸ (۰/۰۰۰۶)	۰/۶۱۵۸ (۰/۰۰۰۹)
	H=۰/۶۵	۰/۶۳۴۷ (۰/۰۰۷۷)	۰/۶۴۹۶ (۰/۰۰۰۶)	۰/۶۴۵۲ (۰/۰۰۱۱)	۰/۶۸۶۸ (۰/۰۰۰۷)	۰/۶۲۴۵ (۰/۰۰۱۲)	۰/۶۴۶۸ (۰/۰۰۱۳)
	H=۰/۷۰	۰/۶۸۹۶ (۰/۰۰۰۹)	۰/۶۹۶۰ (۰/۰۰۱۲)	۰/۷۰۱۲ (۰/۰۰۱۰)	۰/۷۲۵۲ (۰/۰۰۱۱)	۰/۶۵۸۶ (۰/۰۰۰۹)	۰/۷۰۶۴ (۰/۰۰۰۶)
	H=۰/۷۵	۰/۷۲۶۸ (۰/۰۰۰۷)	۰/۷۴۸۵ (۰/۰۰۰۷)	۰/۷۳۵۷ (۰/۰۰۰۵)	۰/۷۶۸۹ (۰/۰۰۹۵)	۰/۷۲۳۸ (۰/۰۰۱۰)	۰/۷۴۸۸ (۰/۰۰۱۰)
	H=۰/۸۰	۰/۷۵۵۳ (۰/۰۰۱۱)	۰/۷۷۷۱ (۰/۰۰۰۹)	۰/۷۴۵۸ (۰/۰۰۸۲)	۰/۸۱۶۱ (۰/۰۰۰۷)	۰/۷۷۶۴ (۰/۰۰۱۱)	۰/۷۹۲۸ (۰/۰۰۰۵)
	H=۰/۸۵	۰/۷۹۸۲ (۰/۰۰۱۰)	۰/۸۳۸۶ (۰/۰۰۰۷)	۰/۸۱۶۶ (۰/۰۰۱۳)	۰/۸۲۱۷ (۰/۰۰۰۶)	۰/۸۰۴۶ (۰/۰۰۱۳)	۰/۸۵۶۷ (۰/۰۰۰۹)
	AAE	٪۰/۶۳	٪۰/۶۹	٪۰/۶۴	٪۰/۶۵	٪۰/۸۲	٪۰/۷۴

با توجه به جدول ۲، رضایت‌بخش‌ترین نتیجه از جهت خطای متوسط کمتر برای سه نوع اوراق تبعی هپردیس۵۱۱۱، هخودا۳۱۰۱ و هخابر۳۱۰۱، به‌ترتیب مربوط به روش‌های هیگوچی، تحلیل دوره‌ای و مجموع واریانس است.

تخمین مدل و ارائه نتایج

پس از انتخاب بهترین روش تخمین توان هرست برای هر یک از این اوراق، مقدار این پارامتر محاسبه شد. همچنین با

استفاده از روش جست‌وجوی محلی[1]، واسنجی پارامتر مدل‌های هستون، بیتز و هستون کسری ـ پرشی، به‌صورت مجـزا برای هر یک از این اوراق صورت گرفت که خلاصه نتایج آن در جدول ۳ درج شده است.

جدول ۳. واسنجی پارامترهای مدل‌های هستون، بیتز و هستون کسری ـ پرشی برای قیمت‌گذاری اوراق تبعی

نماد	مدل	v_0	k	θ	σ_v	ρ	λ	α	γ	H
هپردیس ۵۱۱۱	Heston	۰/۰۳۵۴	۶/۲۳۵۵	۰/۰۴۰۵	۰/۲۶۵۴	۰/۷۴۶۵-	-	-	-	-
	Bates	۰/۰۱۴۷	۷/۴۵۸۲	۰/۰۵۸۶	۰/۱۰۴۲	۰/۶۷۵۲-	۰/۲۶۴۸	۰/۱۸۲۳	۰/۸۷۸۵	-
	FJH	۰/۰۲۷۴	۴/۴۵۲۵	۰/۱۳۵۶	۰/۵۳۸۶	۰/۷۳۵۲-	۰/۴۵۲۶	۰/۳۷۲۵	۱/۲۵۶۸	۰/۸۰۲۱
هخود ۳۱۰۱	Heston	۰/۰۱۸۹	۲/۵۳۳۳	۰/۰۳۹۹	۰/۳۹۱۲	۰/۷۴۲۲-	-	-	-	-
	Bates	۰/۰۱۶۸	۵/۹۵۸۷	۰/۰۱۱۵	۰/۲۵۷۸	۰/۸۵۴۹-	۱/۲۰۵۶	۰/۱۱۶۵	۱/۱۵۶۶	-
	FJH	۰/۰۱۵۵	۵/۵۴۸۶	۰/۰۹۵۸	۰/۳۶۶۴	۰/۷۹۲۳-	۱/۰۱۹۵	۰/۰۹۸۵	۱/۱۰۶۱	۰/۶۳۲۹
هخابر ۳۱۰۱	Heston	۰/۰۰۸۵	۶/۲۳۵۶	۰/۰۸۶۲	۰/۶۹۸۵	۰/۸۸۷۹-	-	-	-	-
	Bates	۰/۰۱۰۷	۹/۶۳۵۸	۰/۰۶۹۱	۰/۵۳۳۳	۰/۶۵۲۸-	۰/۵۴۱۹	۰/۸۹۳۶	۱/۵۳۲۶	-
	FJH	۰/۰۰۹۲	۸/۲۳۲۲	۰/۰۹۵۲	۰/۱۷۲۹	۰/۶۹۱۱-	۰/۷۶۵۸	۰/۸۰۶۹	۱/۳۴۷۳	۰/۶۴۹۷

در جدول ۳ پارامترهای سه مدل هستون، بیتز و هستون کسری ـ پرشی، بـه‌صـورت مجـزا بـرای هریـک از اوراق هپردیس۵۱۱۱، هخود۳۱۰۱ و هخابر۳۱۰۱ تخمین زده شده است.

به‌کمک این پارامترها می‌توان قیمت اوراق تبعی را با مدل ارائه شده، تخمین زد. در این مقاله از شبیه‌سازی مونـت کارلو برای ایجاد تخمین‌زننده‌های ناریب استفاده می‌شود. علاوه‌براین، تشبیه‌سازی مونت کارلو، چارچوب مناسـبی بـرای تقریب پرش در قیمت‌های دارایی ارائه می‌کند (برآدی و کایا[2]، ۲۰۰۶). هنگام استفاده از شبیه‌ساز مونت کارلو، مسـیرهای نمونه زیادی از متغیرها شکل می‌گیرد و عایدی دارایی برای هر مسیر محاسبه می‌شود. متوسط تنزیل یافته همه مسیرها، تخمین‌زننده‌ای از قیمت‌های دارایی ارائه می‌دهد. خطای موجود در تخمین‌زننده مونت کارلو را می‌توان بر اسـاس قضـیه حد مرکزی[3] با افزایش تعداد مسیر نمونه به صفر رساند (برآدی و کایا، ۲۰۰۶). علاوه‌براین، برای بهبود نتایج شبیه‌سـازی مونت کارلو، از تکنیک کاهش تلاطم متغیر متضاد[4] استفاده شده است؛ به‌طوری که برای یک واریانس مونت کارلو، اندازه نمونه را می‌توان کاهش داد (هنسان و ژو[5]، ۲۰۱۳). در پژوهش حاضر، به‌منظور به‌کارگیری شبیه‌سازی مونت کارلو بـرای مدل‌های هستون، بیتز و هستون کسری ـ پرشی، از پژوهش پوکلوسکی ـ کزیل[6] (۲۰۰۹) پیروی شده است. در ادامـه بـا

1. Local Search method
2. Broadie & Kaya
3. Central limit theorem
4. Antithetic Variate
5. Hanson & Zhu
6. Poklewski-Koziell

استفاده از پارامترهای به‌دست آمده، می‌توان قیمت اوراق تبعی را به‌وسیله مدل‌های ارائه شده، تخمین زد. در جدول ۴ مقایسه‌ای از توان قیمت‌گذاری این سه مدل توسط سه معیار خطای RMSE، APE و AAE ارائه شده است.

جدول ٤. مقایسه خطاهای قیمت‌گذاری اوراق تبعی

	هپردیس۵۱۱۱			هخود۳۱۰۱			هخابر۳۱۰۱		
	Heston	Bates	FJH	Heston	Bates	FJH	Heston	Bates	FJH
خطای ریشه دوم میانگین مربعات	۲/۲۵۶۴	۱/۸۴۶۶	۱/۸۰۶۵	۲/۹۵۰۶	۲/۵۶۴۶	۲/۲۶۵۴	۱/۸۵۳۱	۱/۶۵۱۳	۱/۴۲۰۱
میانگین درصد خطای مطلق	۰/۹۳۲۵	۰/۷۵۲۲	۰/۵۹۸۹	۰/۵۶۴۱	۰/۵۰۱۳	۰/۴۹۳۳	۰/۸۵۶۴	۰/۷۲۱۸	۰/۷۱۱۶
میانگین خطای مطلق	۱/۸۶۲۶	۱/۵۸۴۱	۱/۵۲۹۸	۱/۰۵۶۸	۰/۷۵۵۲	۰/۶۸۹۶	۰/۸۶۵۴	۰/۵۴۸۶	۰/۴۴۶۸

در جدول ۴، خطای قیمت‌گذاری هر یک از سه مدل هستون، بیتز و هستون کسری ـ پرشی، در زمینه قیمت‌گذاری اوراق تبعی هپردیس ۵۱۱۱، هخود ۳۱۰۱ و هخابر ۳۱۰۱ آورده شده است. نتایج به‌دست‌آمده از مقایسه خطاهای قیمت‌گذاری، نشان‌دهنده این واقعیت است که مدل هستون کسری ـ پرشی در مقایسه با دو مدل دیگر، خطای کمتری دارد و از این جهت، دارای عملکرد بهتری در زمینه قیمت‌گذاری اوراق تبعی است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن مدل هستون و اضافه‌کردن ویژگی‌های پرش و حافظه بلندمدت به این فرایند، مدل تلاطم تصادفی جدیدی به نام هستون کسری ـ پرشی با انعطاف بیشتر نسبت به مدل معمولی، ارائه شد. در واقع مدل ارائه‌شده همان مدل بیتز است با این تفاوت که حرکت براونی کسری به آن افزوده شده است. از آنجا که حرکت براونی کسری، دارای دو ویژگی مهم خودتشابهی و وابستگی بلندمدت است، به نظر می‌رسد که می‌تواند مدل‌های معروف هستون و بیتز را بهبود دهد. برای آزمون این فرضیه، پس از تخمین قیمت اوراق تبعی انتشار یافته در کشور، توانایی مدل‌ها در زمینه ارزش‌گذاری این اوراق مقایسه شد. به همین منظور، پس از به‌دست‌آوردن فرم نیمه‌بسته راه‌حل معادلات مشتقات جزئی قیمت‌گذاری، توان هرست به‌عنوان معیاری از وابستگی بلندمدت، محاسبه شد. در این پژوهش، برای یافتن بهترین روش تخمین توان هرست، از داده‌های ساختگی و برای حداقل‌سازی اختلاف بین قیمت‌های موجود در بازار و قیمت‌های به‌دست آمده توسط مدل‌های قیمت‌گذاری و واسنجی پارامترهای هر سه مدلِ بررسی شده، از روش جست‌وجوی محلی استفاده شد. در ادامه، به‌کمک این پارامترها، قیمت‌های اوراق تبعی توسط هر سه روش به‌دست آمد. نتایج عددی به‌دست‌آمده از مقایسه سه مدل یاد شده نشان می‌دهد که مدل هستون کسری ـ پرشی در مقابل دو مدل تلاطم تصادفی دیگر، صحت و دقت بیشتری دارد.

گفتنی است، از آنجا که قیمت‌گذاری نادرست اوراق اختیار معامله و تشخیص اشتباه روند قیمت دارایی، زمینه سودجویی برخی سرمایه‌گذاران را فراهم می‌کند و از طرف دیگر، باعث می‌شود سرمایه‌گذاران متحمل ریسک شوند که آن نیز تبعات جبران‌ناپذیری به‌دنبال دارد، در پژوهش حاضر تلاش شد با بررسی جامع و کامل روش‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله، الگوریتمی بر پایه نوسان‌های دارایی پایه و ویژگی‌های آن ارائه شود و در نتیجه دقت ارزش‌گذاری اختیار معامله افزایش یابد. از این رو با توجه به پژوهش‌های معدود داخلی و در نظر نگرفتن نوسان‌های دارایی پایه، پرش‌ها و ویژگی حافظه بلندمدت روند قیمت سهام و فقدان الگوی دقیقی برای محاسبه قیمت اختیار معامله، پژوهش حاضر می‌تواند در جهت قیمت‌گذاری هرچه بهتر و دقیق‌تر این اوراق کارگشا باشد؛ چراکه در صورت کارا بودن قیمت‌گذاری اوراق و تعیین عادلانه قیمت، تخصیص سرمایه که مهم‌ترین عامل تولید و توسعه اقتصادی است، به‌صورت مطلوب و بهینه انجام می‌شود و علاوه‌بر این، ریسک سرمایه‌گذاران نیز به بهترین نحو پوشش داده می‌شود.

در انتها می‌توان از کم‌عمق بودن بازار معاملات اختیارهای تبعی و محدودیت‌های معاملاتی خاص، مانند عدم اجازه مالکیت اوراق تبعی بدون مالکیت دارایی پایه، به‌عنوان محدودیت‌های این پژوهش یاد کرد. از این رو به سایر پژوهشگران پیشنهاد می‌شود که با توجه به تعمیق بازار اختیار معامله عادی در بورس کالا و بورس تهران از سال ۹۵ تاکنون، به بررسی و پژوهش در این زمینه اقدام کنند.

منابع

برزیده، فرخ؛ کفاش پنجه شاهی، محمد؛ شریعت پناهی، سیدمجید؛ تقوی فرد، محمد تقی (۱۳۹۵). مدلی جهت قیمت‌گذاری سهام مبتنی بر نظریه چشم‌انداز. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۱۸(۱)، ۵۹-۷۶.

خوزین، علی (۱۳۹۶). بررسی رابطه ابعاد نقدشوندگی سهام با حجم فروش اولیه اوراق اختیار فروش تبعی به‌عنوان یک ابزار مالی نوین. *راهبرد مدیریت مالی*، ۵(۱)، ۹۹- ۱۱۴.

دارابی، رویا؛ معروفخانی، مجید (۱۳۹۵). ارزش‌گذاری ابزار نوین مالی. *حسابرس*، ۱۸(۸۲)، ۷۲-۷۹.

رحمانی، مرتضی؛ جعفریان، ناهید (۱۳۹۶). بررسی مدل بلک ـ شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه‌های معاملاتی. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸(۳۲)، ۴۳- ۶۲.

سجاد، سید رسول؛ ابطحی، سیده زهرا (۱۳۹۶). سنجش ریسک شاخص گروه بانکی با استفاده از تخمین نوسانات بازده با مدل نوسانات تصادفی: رویکرد نیمه‌پارامتری بیزی. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۱۹(۱)، ۸۱-۹۶.

شاکران، زهرا (۱۳۹۱). ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی تحت وجود تلاطم تصادفی. *سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، سمنان، دانشگاه سمنان.*

فخاری، حسین؛ ولی‌پور خطیر، محمد؛ موسوی، سیده مائده (۲۰۱۷). بررسی عملکرد شبکه عصبی بیزین و لونبرگ مارکوات در مقایسه با مدل‌های کلاسیک در پیش‌بینی قیمت سهام شرکت‌های سرمایه‌گذاری. *تحقیقات مالی*، ۱۹(۲)، ۲۹۹- ۳۱۸.

کیمیاگری، علی محمد؛ حاجی‌زاده، احسان؛ دستخوان، حسین؛ رمضانی، مجید (۱۳۹۶). ارائه یک مدل ترکیبی جدید به‌منظور قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار اروپایی. *نشریه بین‌المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید*، ۲۸(۱)، ۸۷-۹۹.

مرادی، مهدی (۱۳۸۶). اوراق اختیار معامله، قراردادهای تحویل آتی و قراردادهای اسلامی مشابه با آنها. *دانش و توسعه، دانشگاه فردوسی مشهد*، (۲۱)، ۱۹۸-۲۱۵.

مهردوست، فرشید؛ صابر، نغمه (۱۳۹۲). قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش. *مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، ۳(۲)، ۴۵-۶۰.

میرزایی قزانی، مجید (۱۳۹۷). تحلیل رفتار متغیر تلاطم تحقق‌یافته در بورس اوراق بهادار تهران مبتنی بر رهیافت مدل‌های خودرگرسیونی ناهمگن. *فصلنامه تحقیقات مالی*، ۲۰(۳)، ۳۶۵-۳۸۸.

نبوی چاشمی، سیدعلی؛ بهرامزاده، راضیه (۱۳۹۷). بررسی کارایی فرایند لوی در قیمت‌گذاری اختیار معاملات. *دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*، ۱۱(۳۸)، ۱۱۷- ۱۲۷.

نبوی چاشمی، سیدعلی؛ عبدالهی، فرهاد (۱۳۹۷). بررسی و مقایسه الگوهای سود اختیارمعاملات آسیایی، اروپایی و آمریکایی سهام در بورس اوراق بهادار تهران. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۹(۳۴)، ۳۵۹- ۳۸۰.

نیسی، عبدالساده؛ پیمانی، مسلم. (۲۰۱۴). مدل‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون. *پژوهشنامه اقتصادی*. ۱۴(۵۳)، ۱۴۳- ۱۶۶.

نیسی، عبدالساده؛ ملکی، بهروز؛ رضائیان، روزبه (۱۳۹۵). تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان. *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۲(۲۸)، ۹۱-۱۱۵.

References

Albanese, C., Kuznetsov, A. (2005). Unifying the three volatility models. *Risk*, 17(3), 94–98.

Alòs, E., & Yang, Y. (2014). A closed-form option pricing approximation formula for a fractional Heston model. *Economics Working Papers 1446,* Department of Economics and Business, Universitat Pompeu Fabra.

Barzideh, F., Kaffash Panjeshahi, M., Shariatpanahi, M., Taghavi Fard, M. (2016). Stock Pricing Model Based on Prospect Theory. *Financial Research Journal,* 18(1), 59-76. (*in Persian*)

Bates, D. S. (1991). The crash of 87: Was it expected? The evidence from options markets. *Journal of Finance*, 46, 1009–1044.

Bates, D. S. (1996). Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *Review of Financial Studies,* 9(1), 69–107.

Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability*. Taylor & Francis. ISBN: 9780412049019.

Bezborodov, V., Di Persio, L., & Mishura, Y. (2016). *Option pricing with fractional stochastic volatility and discontinuous payoff function of polynomial growth*. arXiv preprint arXiv:1607.07392.

Black, F., Scholes, M. S. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.

Broadie, M., & Kaya, Ö. (2006). Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes. *Operations research*, 54(2), 217-231.

Clark, I. J. (2012). *Foreign exchange option pricing, A practioner's Guide*. Wiley Finance.

Comte, F., & Renault, E. (1998). Long memory in continuous time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4), 291-323.

Comte, F., Coutin, L., & Renault, E. (2001). Affine fractional stochastic volatility models. Preliminary version.

Darabi, R., Maroofkhani, M. (2016). Valuation of New Financial Instrument. *Hesabras,*18(82), 72-79. (*in Persian*)

Dupire, B. (1994). Pricing with a smile. *Risk*, 7(1), 18-20.

El-Nouty, C. (2003). The fractional mixed fractional Brownian motion. *Statistics and Probability Letters*, 65(2), 111–120.

Fakhari, H., Valipourkhatir, M., Mousvi, S. M. (2017). Investigating Performance of Bayesian and Levenberg-Marquardt Neural Network in Comparison Classical Models in Stock Price Forecasting. *Financial Research Journal*. 19(2). 299-318. (*in Persian*)

Florescu, I., Mariani, M.C., & Sewell, G. (2014). Numerical solutions to an integro-differential parabolic problem arising in the pricing of financial options in a Levy market. *Quantitative Finance,* 14(8), 1445-1452.

Foremski, P., Gorawski, M., Grochla, K. (2014). Source model of TCP traffic in LTE networks. *In: Czach´orski, T., Gelenbe, E., Lent, R. (eds.) Information Science and Systems, pp. 125–135.* Springer International Publishing, Switzerland.

Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Wiley Finance. John Wiley & Sons. ISBN: 9780470068250.

Geweke, J., Porter-Hudak, S. (1983). The Estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*. 4(4), p. 221–238.

Hanson, F., & Zhu, Z. (2013). Risk-Neutral Option Pricing for Log-Uniform Jump-Amplitude Jump-Diffusion Model. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=2208191.

He, Xin-Jiang, & Zhu, Song-Ping. (2018). A closed-form pricing formula for European options under the Heston model with stochastic interest rate. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 335, 323-333.

Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6, 327–343.

Higuchi, T. (1998). Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 31(2), p. 277 – 283.

Hurst, H. (1951). Long term storage capacity of reservoirs. *Transaction of the American society of civil engineer,* 116, 770–799.

Khoozin, A. (2017). The Relationship between Stock Liquidity and The Volume of First Sales of Tabai Put Option as a New Financial Instrument. *Rahborde Modiriat Mali*, 5(1), 99-114. (*in Persian*)

Kim, K.H., Yun, S., Kim, N.U., & Ri, J.H. (2019). Pricing formula for European currency option and exchange option in a generalized jump mixed fractional Brownian motion with time-varying coefficients. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* 522, 215-231.

Kim, N., & Lee, Y. (2018). Estimation and prediction under local volatility jump–diffusion model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 491, 729-740.

Kimiyagar, A., Hajizadeh, E., Dastkhan, H., & Ramezani, M. (2017). A New Hybrid Model for Pricing European Options Contracts. *International Journal of Industrial Engineering and Production Management*, 28(1), 87-99. (*in Persian*)

Kitchens, E. G. (2014). *Finance Jason Fink (Doctoral dissertation*. Ph. D. Investor Expectations of the 2007-2009 Financial Crisis: Applying the Bates Model to Modern Stock Market Events).

Ma, Ch., Ma, Q., Yao, H., & Hou, T. (2018). An accurate European option pricing model under Fractional Stable Process based on Feynman Path Integral. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 494, 87-117.

Mehrdoost, F., & Saber, N. (2013). Option Pricing Under the Heston Double-Jump Model. *Advanced Mathematical Modeling*, 3(2), 45-60. (*in Persian*)

Merton, R. C. (1976). Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of financial economics*, 3(1-2), 125-144.

Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 125–144.

Mirzaee Gh., M. (2018). Analysis of realized volatility in Tehran Stock Exchange using Heterogeneous Autoregressive models approach. *Financial Research Journal*. 20(30), 365-388. (*in Persian*)

Moradi, M. (2007). Option, Future Contracts, and Similar Slamic Contracts. *Knowledge and Development, Ferdosi University of Mashhad*, 21, 198-215. (*in Persian*)

Mrázek, M., Pospíšil, J., & Sobotka, T. (2016). On calibration of stochastic and fractional stochastic volatility models. *European Journal of Operational Research*, 254(3), 1036-1046.

Nisi, A., Maleki, B., & Rezayian, R. (2016). Parameter Estimation of the European Option Pricing Model under an asset with Stochastic Volatility Using Loss Function Approach. *Financial engineering and securities management*, 28(7), 91-115. (*in Persian*)

Nisi, A., Peymani, M. (2014). Modeling the index of Tehran Stock Exchange using Heston's stochastic differential equation. *Economic Research*, 14 (53), 166-143. (*in Persian*)

Nobavi Chashmi, S.A., Abdolahi, F. (2018). Examining and comparing the Asian, European and American options for earnings patterns of stocks in Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Engineering and Management of Securities,* 9(34), 359-380. (*in Persian*)

Nobavi Chashmi, S.A., Bahramzadeh, R. (2018). Review the efficiency of the Levy process in options pricing. *Quarterly Journal of Financial Knowledge Analysis of Securities,* 11(38), 117-127. (*in Persian*)

Peng, C.K., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Simons, M., Stanley, H.E., & Goldberger, L. (1994). Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49(2), 1685–1689.

Poklewski-Koziell, W. (2009). *Convergence of Monte Carlo Methods for the Heston Stochastic Volatility Model.* Honours Thesis: The University of the Witwatersrand.

Rahmani, M., & Jafarian, N. (2017). Fractional Black-Scholes Model with Hurst Exponent on European Option with Trade Costs. *Financial engineering and securities management*, 8(32), 43-62. (*in Persian*)

Sajjad, R., & Abtahi, Z. (2017). Risk Evaluation of Banking Index with Volatility Estimation through Stochastic Volatility Model: A Semiparametric Bayesian Approach. *Financial Research Journal.* 19(1), 96-81. (*in Persian*)

Shakeran, Z. (2012). Valuation of American Option under Stochastic Volatility. *Third Conference on Financial Mathematics and Applications, Semnan, Semnan University.* (*in Persian*)

Shokrollahi, F. (2017). Pricing compound and extendible options under mixed fractional Brownian motion with jumps. *arXiv preprint arXiv*:1708.04829.

Thao, H.T.P., & Thao, T.H. (2012). Estimating Fractional Stochastic Volatility. *The International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 82(38), 1861-1869.

Wang, X.T. (2010). Scaling and long range dependence in option pricing, iv: pricing European options with transaction costs under the multifractional black–schixoles model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389, 789–796.

Xiao, W., Zhang, W., Xu, W., & Zhang, X. (2012). The valuation of equity warrants in a fractional Brownian environment. *Physica A*, 391(4), 1742–1752.