« فراسوی مدیریت»
سال سوم _ شماره۱۱_ زمستان ۱۳۸۸
ص ص ۷۶- ۵۹

یافتن جواب بهینه مدل انتخاب تکنولوژی با داده های فازی

دکترسهند دانشور[۱]
سحر خوش فطرت[۲]

چکیده

در این مقاله روشی برای یافتن جواب بهینه مدل انتخاب تکنولوژی با داده های فازی معرفی می شود. مقاله یک روش ساده محاسباتی برای یافتن جواب بهینه مساله برنامه ریزی خطی فازی مدل انتخاب تکنولوژی پیشنهاد می کند که درآن نیاز به حل هیچ LP فازی نیست. این تحقیق از پیچیدگی محاسبات داده های فازی می کاهد و زمانیکه پیچیدگی بیشتری مطرح می شود اهمیت این روش نیز افزایش می یابد.

واژه‌های کلیدی:

تکنولوژی تولید پیشرفته، انتخاب تکنولوژی، تحلیل پوششی داده ها، تحلیل پوششی داده‌های فازی، پیچیدگی محاسباتی

[۱]- استادیار دانشکده علوم پایه، دکترای تخصصی تحقیق در عملیات دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز
[۲]- کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق درعملیات، باشگاه پژوهشگران جوان واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز(saharkhoshfetrat@gmail.com)

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به عنوان یک ابزار تصمیم‌گیری توسط چارنز[1] معرفی شد (Charnes & et al,1978,429-444). تحلیل پوششی داده ها مبنی بر برنامه‌ریزی خطی غیر پارامتری است که کارایی نسبی مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده‌ی متجانس(DMU) با ورودی و خروجی‌های چندگانه را اندازه‌گیری می کند. اهمیت DEA به عنوان ابزار مدیریتی به طور پیوسته زیادتر می‌شود و اندازه گیری اجرایی سازمانها معتبرتر می شود. مدل اصلی DEA (Ibid ,429-444) شامل حل n برنامه ریزی خطی (LP) است که هر LP متناظر یک DMU است. از اینرو محاسبات کامل و زمان زیاد، بخصوص زمانیکه مجموعه داده بزرگ یا نادقیق باشند، صرف می شود. تلاش های زیادی جهت افزایش سرعت محاسبات DEA انجام شده است. به عبارت دیگر کاربردهایی از DEA روی مشاهدات چند خروجی و یک ورودی وجود دارد(Amin & et al,2006,2681-2686; Braglia & Petroni,1999,4157-4178; Farzipoor,2008,4-5;Karsak & Ashika,2005,1537-1554; Sun,2002,119-129). ارزیابی عملکرد فعالیت ها یا سازمان ها به وسیله مدل های اساسی DEA نیاز به داده های قطعی دارد. در حالیکه، داده های ورودی و خروجی همواره قطعی نیستند. از اینرو برای سنجش کارایی داده‌های فازی یا نادقیق مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های فازی معرفی شده است. ارزیابی کارایی DMU با ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق یا فازی به وسیله مدل های DEA معمولی مشکل است. چند مدل برای داده های فازی توسط محققان مختلف معرفی شده است (Guo & Tanaka,1998,517-521; Guo & Tanaka,2001,149-160;Kao & Liu,2000,427-437). روشی برای یافتن توابع عضویت مقادیر کارایی مشاهدات با داده های فازی توسط کااو و لیو (۲۰۰۰) معرفی شده است(Liu,2000,427-437). در این مقاله روش پیشنهادی امین

[1] .Charnes

(Amin,2009,4-5) برای داده های فازی مورد مطالعه و بررسی قرار داده شده است و یک روش کارا برای بدست آوردن جواب بهینه مدل انتخاب تکنولوژیکی با داده های فازی معرفی شده است. علامت مد نشانگر داده‌های فازی است. دراین مقاله سعی شده است مدل DEA با داده‌های نادقیق یا فازی در نظر گرفته شود و یک روش محاسباتی موثر برای پیدا کردن جواب بهینه مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) بکار رفته در AMT بدون نیاز به حل هیچ LP پیشنهاد می‌شود. از این رو سهم این تحقیق این است که پیچیدگی محاسبات را می‌کاهد. این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲، مدل برنامه‌ریزی DEA با داده‌های فازی بکار رفته در انتخاب تکنولوژی معرفی می‌شود. یک روش محاسباتی موثر برای جواب بهینه مدل انتخاب تکنولوژی با داده‌های فازی در بخش ۳ ارائه شده است. یک مثال عددی که نشانگر روند عملیات است در بخش ۴ مطرح شده است. در نهایت مقاله با بخش ۵، نتیجه گیری خاتمه می یابد.

مدل انتخاب تکنولوژی با داده های فازی

مسائل توجیهی و انتخابی AMT شامل آنهایی است که دارای یک ورودی و چند خروجی هستند. برای مثال مدل انتخاب تکنولوژی در AMT ها که توسط کرسک[1] و آشیکا (Karsak & Ashika,2005,1537-1554) معرفی شده است که در فرایند ارزیابی این مدل با n DMU یا (AMT) با خروجی چندتایی y_{rj} $(j=1,\dots,n)$ و یک ورودی x_j $(j=1,\dots,n)$ در نظر گرفته می‌شود.

[1]. Karsak and Ahiska

در ارزیابی کارایی kامین DMU، DMU_k، فرمول DEA به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Max \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{rk}}{v \tilde{x}_k} \\ s.t \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{rj}}{v \tilde{x}_j} \leq 1 \qquad j=1,\ldots,n \\ & u_r \geq \varepsilon \qquad r=1,\ldots,s \\ & v \geq \varepsilon \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن یک عدد غیر ارشمیدسی است. کرسک و آشیکا مدل تصمیم گیری چند معیاره با یک وزن مشترک را برای ارزیابی کارایی نسبیDMU ها در مسائل تصمیم تک ورودی و چند خروجی ارائه دادند(Ibid ,2681-2686). مدل MCDM DEA پیشنهادی برای انتخاب تکنولوژی از مدل غیرخطی DEA، مدل (۱) حاصل شده است. خاصیت مهم مدل MCDM پیشنهادی کرسک و آشیکا غیر از وزن مشترک تشخیص بهترین AMT با محاسبات کمتر در مقایسه با روشهای اساسی DEA است (Karsak & Ashika,2005,1537-1554). از این رو مدل (۱) به مدل MCDM DEA توسط محققان تبدیل شده است. بخش زیر یک روش کارا برای جواب بهینه مساله انتخاب تکنولوژی، بدون نیاز به حل هیچ مدلی ارائه می‌دهد. مدل زیر به علت محاسبات کمتر سرعت بالایی دارد.

یک روش کارای محاسباتی

مدل کسری (۱) با مدل زیر معادل است (Ibid ,429-444).

$$\begin{array}{lll} Max & u\tilde{y}_k & \\ s.t & u\tilde{y}_j - v\tilde{x}_j \le 0 & j = 1,\ldots,n \\ & v\tilde{x}_k = 1 & \\ & u \ge 1_S\,\varepsilon & \\ & v \ge \varepsilon & \end{array} \qquad (۲)$$

که در آن $u = (u_1,\ldots,u_s)$ بردار وزن خروجی است، $\tilde{y}_j = (\tilde{y}_{1j},\ldots,\tilde{y}_{sj})^t$ بردار خروجی فازی چندتایی برای jامین DMU $(j = 1,\ldots,n)$ را نشان می دهد و 1_s یک s ـ بردار است که همه مولفه های آن برابر یک است. به این ترتیب یک روش فشرده و کارا برای جواب بهینه kامین DMU در ماهیت خروجی برای مدل(۲) با داده‌های فازی به صورت زیر در نظر گرفته شده است(Ibid,429-444).

$$\begin{array}{lll} Min & v\tilde{x}_k & \\ s.t & u\tilde{y}_j - v\tilde{x}_j \le 0 & j = 1,\ldots,n \\ & u\tilde{y}_k = 1 & \\ & u \ge 1_S\,\varepsilon_k^* & \\ & v \ge \varepsilon_k^* & \end{array} \qquad (۳)$$

که در آن ε_k^* بیشترین مقدار عدد غیرارشمیدسی است. کوک[1] و همکاران وی(Cook & et al,1996,945-953) بیشترین مقدار ε را جهت تمایز بین DMUها یاAMTها بکار بردند. در این مقاله این مدل با استفاده از α- برش برای داده‌های فازی بصورت زیر حاصل می شود که ε علاوه بر وجه تمایز بودن بین DMU ها، یک کران پایین برای مضارب وزنی خروجی های دقیق یا فازی است. بیشترین مقدار ε مورد نیاز مدل ۳ از مدل زیر بدست می آید:

[1] . Cook

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_k^* = Max\ \varepsilon \\
&s.t \qquad u\tilde{y}_j - v\tilde{x}_j \le 0 \qquad j = 1,\ldots,n \\
&\qquad\qquad u\tilde{y}_k = 1 \\
&\qquad\qquad u - 1_S\varepsilon \ge 0 \\
&\qquad\qquad v - \varepsilon \ge 0 \\
&\qquad\qquad \varepsilon \quad free
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

قبل از معرفی روش ریاضی فشرده برای جوابهای بهین مدلهای فوق، نیاز به یک فرض اساسی است. بدون اینکه به کلیت مساله خللی وارد شود فرض می کنیم که چون مدلهای (۳) و (۴) از خاصیت واحد ثابت(Cooper & et al,2006,221-431) برخوردارند از این رو اگر یک اندیس مانند j در تمام سطوح (در تمام αها) وجود داشته باشد که برای آن $\frac{1_S\tilde{y}_j}{\tilde{x}_j} < 1$ با ضرب عدد مثبت مناسب حداقل در یک خروجی (و برای همه AMT ها) بدون تغییر مقدار کارایی AMT ها شرط $J = \phi$ برقرار خواهد بود.

$$
J = \left\{ j :\ \frac{\sum_{r=1}^{S} \tilde{y}_{rj}}{\tilde{x}_j} = \frac{1_S\,\tilde{y}_j}{\tilde{x}_j} < 1 \right\} = \phi
$$

حال بیشترین مقدار ε، جواب بهینه مدل (۴) ، با استفاده از روش جدید برای داده های فازی به صورت زیر به دست می آید.

قضیه ۱ : $\left(\varepsilon_k^*\right)_\alpha^L = \dfrac{1}{\left(1_S\,\tilde{y}_k\right)_\alpha^U}$ و $\left(\varepsilon_k^*\right)_\alpha^U = \dfrac{1}{\left(1_S\,\tilde{y}_k\right)_\alpha^L}$.

برهان: در α- برش برای کران پایین قضیه فوق را اثبات می کنیم. فرمول دیگر قضیه نیز به طریقه مشابه اثبات می شود.

چون $1 = u(\tilde{y}_k)^L_\alpha \le \varepsilon^*_k(1_s \tilde{y}_k)^L_\alpha$ پس $(\varepsilon^*_k)^L_\alpha \le \left((1_s \tilde{y}_k)^L_\alpha\right)^{-1}$.

برای نشان دادن تساوی کافیست یک جواب شدنی مانند $(u^o, v^o, \varepsilon^o)$ که در آن $\varepsilon^o = (1_S \tilde{y}_k)^{-1}$ بدست بیاوریم. $u^o = 1_S (1_S \tilde{y}_k)^{-1}$ و $\varepsilon^o = (1_S \tilde{y}_k)^{-1}$ را تعریف می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که $u^o(\tilde{y}_k)^L_\alpha = 1$ و $u^o - 1_s\varepsilon^o = 0 \ge 0$. n محدودیت اول مدل (۴) ایجاب می کند که بنابراین داریم:

$$(v)^L_\alpha \ge \frac{(1_S y_j)^L_\alpha}{(1_S y_j)^U_\alpha (x_j)^U_\alpha} \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$(v^*)^L_\alpha = \frac{1}{(1_S \tilde{y}_k)^U_\alpha} Max \left\{ \frac{(1_s \tilde{y}_j)^L_\alpha}{(\tilde{x}_j)^U_\alpha} : \ j = 1,\ldots,n \right\} = (\varepsilon^*)^L_\alpha \frac{1_S (\tilde{y}_q)^L_\alpha}{(\tilde{x}_q)^U_\alpha}$$

دلالت می کند که $(u^*, v^*, \varepsilon^*)$ جواب بهینه مدل (۴) است. از طرفی چون $J = \phi$ نتیجه می دهد که برهان کامل است.

$$(v^*)^L_\alpha = \frac{1}{(1_S \tilde{y}_k)^U_\alpha} Max \left\{ \frac{(1_s \tilde{y}_j)^L_\alpha}{(\tilde{x}_j)^U_\alpha} : \ j = 1,\ldots,n \right\} = (\varepsilon^*)^L_\alpha \frac{1_S (\tilde{y}_q)^L_\alpha}{(\tilde{x}_q)^U_\alpha} \ \ge \varepsilon^*$$

قضیه ۲ : (u^*, v^*) یک جواب بهینه مدل (۳) است که

$$\left(v^*\right)_\alpha^L = \frac{\left(1_S \tilde{y}_q\right)_\alpha^L}{\left(\tilde{x}_q\right)_\alpha^U} (\varepsilon_k^*)_\alpha^L = Max\left\{ \frac{\left(1_s \tilde{y}_j\right)_\alpha^L}{\left(\tilde{x}_j\right)_\alpha^U} : j=1,\ldots,n \right\} (1_s \tilde{y}_k)^{-1}$$

و $(\varepsilon_k^*,\ldots,\varepsilon_k^*) = \left((1_s(1_s \tilde{y}_k))_\alpha^U\right)^{-1} = 1_s\left(\varepsilon_k^*\right)_\alpha^L = \left(u^*\right)_\alpha^L$.

برهان: با روش مشابه که در اثبات قضیه ۱ بکار برده شده است، (u^*, v^*) یک جواب شدنی مدل (۳) است. برای نشان دادن بهینگی کافیست ثابت کنیم که $(\bar{u})_\alpha^L = (u^*)_\alpha^L$ (یا $(\bar{u}_r)_\alpha^L = (\varepsilon_k^*)_\alpha^L$ برای هر $r=1,\ldots,s$) که $(\bar{u}, \bar{v})$ جواب بهینه مدل (۳) می باشد. به فرض می کنیم که

$$R = \left\{ r : 1 \le r \le s \ \& \ \bar{u}_r > \varepsilon_k^* \right\} \ne \phi$$

بنابراین

$$\bar{u}_r > \varepsilon_k^* \qquad \forall\, r \in R$$

$$\bar{u}_r = \varepsilon_k^* \qquad \forall\, r \notin R$$

با ضرب $\left(y_{rk}\right)_\alpha^L$ در معادله یا نامعادله مربوطه (بسته به اینکه $r \in R$ یا $r \notin R$) و جمع طرفین معادلات و نامعادلات نتیجه می گیریم که این یک تناقض است.

$$1 = \sum_{r=1}^{s} \bar{u}_r (\tilde{y}_{rk})_\alpha^L = \sum_{r \in R} \bar{u}_r (\tilde{y}_{rk})_\alpha^L + \sum_{r \notin R} \bar{u}_r (y_{rk})_\alpha^L > \varepsilon_k^* 1_S (Y_k)_\alpha^L = 1$$

قضیه فوق برای کران بالای اعداد بازه ای نیز برقرار است.

مثال عددی

داده های فازی مربوط به ۱۲ ربات در جدول ۱ آورده شده است. ۴ ویژگی مهندسی (ضریب کنترل، ظرفیت بارگذاری، قابلیت تکرار و سرعت) به عنوان خروجی ها و هزینه به عنوان تنها ورودی در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- داده‌های فازی، مثلثی، متقارن نرمال شده ی ۱۲ربات

ربات jام	هزینه	ضریب کنترل	ظرفیت بارگذاری	قابلیت تکرار	سرعت
1	(1,0.02)	(1,0.005)	(0.85,0.001)	(0.213,0.003)	(0.833,0.001)
2	(0.75,0.03)	(0.938,0.006)	(0.45,0.001)	(0.313,0.003)	(1,0.002)
3	(0.562,0.04)	(0.879,0.002)	(0.18,0.003)	(0.625,0.005)	(0.611,0.006)
4	(0.281,0.05)	(0.411,0.007)	(0.1,0.004)	(0.213,0.001)	(0.417,0.003)
5	(0.469,0.06)	(0.822,0.004)	(0.2,0.003)	(0.625,0.002)	(0.306,0.001)
6	(0.781,0.05)	(0.667,0.003)	(0.6,0.004)	(0.313,0.002)	(0.375,0.001)
7	(0.875,0.06)	(0.884,0.002)	(0.9,0.003)	(0.25,0.001)	(0.389,0.004)
8	(0.562,0.01)	(0.636,0.001)	(0.1,0.006)	(1,0.005)	(0.694,0.004)
9	(0.562,0.02)	(0.656,0.006)	(0.25,0.001)	(0.5,0.007)	(0.694,0.004)
10	(0.875,0.07)	(0.751,0.007)	(1,0.006)	(0.25,0.001)	(0.694,0.005)
11	(0.687,0.04)	(0.884,0.007)	(1,0.005)	(0.5,0.002)	(0.417,0.003)
12	(0.437,0.02)	(0.636,0.003)	(0.7,0.003)	(0.625,0.006)	(0.833,0.005)

داده های فازی را با αهای مختلف برش داده و داده‌ها پس از برش دادن به بازه‌های $[L,U]$ تبدیل می شوند. ε_k^*، v^*، u_1^*، u_2^*، u_3^*، u_4^* با استفاده از مدل‌های (۳) و (۴) محاسبه شده‌اند و به ترتیب در جدول ۲ ،۳، ۴، ۵ و ۶ گردآوری شده است.

جدول ۲- جواب های بهینه مدل (٤) با استفاده از حالت *Best –Worst* و *Worst – Best* α_ برش ها

ربات j ام	ε_k^*	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 1$
1	L	0.3443	0.3394	0.3449	0.3453
	U	0.3517	0.3514	0.3511	0.3453
2	L	0.3689	0.3694	0.3697	0.3702
	U	0.3715	0.3710	0.3707	0.3702
3	L	0.4334	0.4343	0.4308	0.4357
	U	0.4380	0.4371	0.4365	0.4357
4	L	0.8566	0.8591	0.8602	0.8764
	U	0.8829	0.8802	0.8790	0.8764
5	L	0.5099	0.5107	0.5112	0.5120
	U	0.5140	0.5133	0.5127	0.5120
6	L	0.5026	0.5103	0.5106	0.5115
	U	0.5135	0.5129	0.5123	0.5115
7	L	0.4113	0.4118	0.4121	0.4127
	U	0.4141	0.4135	0.4132	0.4127
8	L	0.4093	0.4072	0.4107	0.4115
	U	0.4137	0.4129	0.4123	0.4115
9	L	0.4729	0.4741	0.4749	0.4762
	U	0.4794	0.4782	0.4774	0.4762
10	L	0.3617	0.3697	0.3702	0.3710
	U	0.3731	0.3723	0.3718	0.3710
11	L	0.3559	0.3563	0.3566	0.3570
	U	0.3581	0.3577	0.3574	0.3570
12	L	0.3561	0.3568	0.3572	0.3580
	U	0.3596	0.3590	0.3585	0.3580

ستون‌های اول تا چهارم جدول ۲ مقدار بهینه مدل (۴) در برش‌های مختلف را برای هر ربات نشان می دهند. مقادیر فوق به دو طریق زیر حاصل شده‌اند. مدل (۴) را یکبار برای حالت *Best- worst* α- برش‌ها نوشته و از آن $(\varepsilon_k^*)^L$ در برش های مختلف برای تمام ربات‌ها محاسبه می‌شود و یکبار هم با استفاده از حالت *Worst – Best* α- برش ها مقدار بهینه مدل ۴ یعنی $(\varepsilon_k^*)^U$ برای تمام ربات ها محاسبه شده است. حال همین مقادیر با استفاده از قضایای ۱ و ۲ بدون حل هیچ LP حاصل شده است. در زیر به عنوان مثال $(\varepsilon_k^*)^L$ و $(\varepsilon_k^*)^U$ برای ربات ۱ با روش جدید محاسبه شده است.

$$\left(\varepsilon_k^*\right)_{\alpha=0.2}^L = \frac{1}{(1_4 y_k)_{\alpha=0.2}^U} = \frac{1}{1.004 + 0.8508 + 0.2154 + 0.8338} = 0.3443$$

$$\left(\varepsilon_k^*\right)_{\alpha=0.2}^U = \frac{1}{(1_4 y_k)_{\alpha=0.2}^L} = \frac{1}{0.951 + 0.8492 + 0.2106 + 0.8322} = 0.3517$$

مشاهده می شود که جواب های بدست آمده از هر دو روش یکی هستند.

جدول ۳. جواب های بهینه مدل (۳) با استفاده از حالت *Best -Worst* و *Worst – Best* برای
$\alpha = 0.2$

ربات j ام		v^*	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*
1	L	2.1132	0.3443	0.3443	0.3443	0.3443
	U	2.3454	0.3517	0.3517	0.3517	0.3517
2	L	2.2641	0.3689	0.3689	0.3689	0.3689
	U	2.4774	0.3715	0.3715	0.3715	0.3715
3	L	2.6600	0.4334	0.4334	0.4334	0.4334
	U	2.9209	0.4380	0.4380	0.4380	0.4380
4	L	5.2575	0.8566	0.8566	0.8566	0.8566
	U	5.8878	0.8829	0.8829	0.8829	0.8829
5	L	3.1296	0.5099	0.5099	0.5099	0.5099
	U	3.4277	0.5140	0.5140	0.5140	0.5140
6	L	3.0848	0.5026	0.5026	0.5026	0.5026
	U	3.4244	0.5135	0.5135	0.5135	0.5135
7	L	2.5244	0.4113	0.4113	0.4113	0.4113
	U	2.7615	0.4141	0.4141	0.4141	0.4141
8	L	2.5121	0.4093	0.4093	0.4093	0.4093
	U	2.7588	0.4137	0.4137	0.4137	0.4137
9	L	2.9025	0.4729	0.4729	0.4729	0.4729
	U	3.1970	0.4794	0.4794	0.4794	0.4794
10	L	2.2200	0.3617	0.3617	0.3617	0.3617
	U	2.4881	0.3731	0.3731	0.3731	0.3731
11	L	2.1844	0.3559	0.3559	0.3559	0.3559
	U	2.3880	0.3581	0.3581	0.3581	0.3581
12	L	2.1856	0.3561	0.3561	0.3561	0.3561
	U	2.3981	0.3596	0.3596	0.3596	0.3596

۳ مقادیر مضارب ورودی و خروجی داده های فازی محاسبه شده با استفاده از مدل (۳) را نشان می دهد که با مقادیر بدست آمده از روش جدید نیز یکسان

هستند. به عنوان مثال کران پایین v^* ربات ۱ با استفاده از روش جدید محاسبه شده است:

$$\left(v^*\right)_{0.2}^{L}=\frac{1}{\left(1_S\widetilde{y}_k\right)_{0.2}^{U}}\ Max\left\{\frac{\left(1_s\widetilde{y}_j\right)_{0.2}^{L}}{\left(\widetilde{x}_j\right)_{0.2}^{U}}:\ j=1,\ldots,n\right\}=\left(\varepsilon^*\right)_{0.2}^{L}\frac{1_S\left(\widetilde{y}_{12}\right)_{0.2}^{L}}{\left(\widetilde{x}_{12}\right)_{0.2}^{U}}$$
$$=0.3443\times 6.1377=2.1132$$

که مشاهد می شود همان کران پایین بدست آمده از مدل (۳) است. برای درک و روشنی هر چه بیشتر مطلب بقیه محاسبات برای برش های دیگر در جدول های زیر جمع آوری شده است.

جدول ٤. جواب های بهینه مدل (۳) با استفاده از حالت *Best –Worst* و *Worst – Best* برای $\alpha = 0.5$

ربات j ام		v^*	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*
1	L	2.1149	0.3394	0.3394	0.3394	0.3394
	U	2.3063	0.3514	0.3514	0.3514	0.3514
2	L	2.3019	0.3694	0.3694	0.3694	0.3694
	U	2.4349	0.3710	0.3710	0.3710	0.3710
3	L	2.7063	0.4343	0.4343	0.4343	0.4343
	U	2.8503	0.4371	0.4371	0.4371	0.4371
4	L	5.3534	0.8591	0.8591	0.8591	0.8591
	U	5.7769	0.8802	0.8802	0.8802	0.8802
5	L	3.1824	0.5107	0.5107	0.5107	0.5107
	U	3.3688	0.5133	0.5133	0.5133	0.5133
6	L	3.1799	0.5103	0.5103	0.5103	0.5103
	U	3.3662	0.5129	0.5129	0.5129	0.5129
7	L	2.5661	0.4113	0.4113	0.4113	0.4113
	U	2.7138	0.4141	0.4141	0.4141	0.4141
8	L	2.5374	0.4072	0.4072	0.4072	0.4072
	U	2.7099	0.4129	0.4129	0.4129	0.4129
9	L	2.9543	0.4741	0.4741	0.4741	0.4741
	U	3.1385	0.4782	0.4782	0.4782	0.4782
10	L	2.3037	0.3697	0.3697	0.3697	0.3697
	U	2.4434	0.3723	0.3723	0.3723	0.3723
11	L	2.2202	0.3563	0.3563	0.3563	0.3563
	U	2.3476	0.3577	0.3577	0.3577	0.3577
12	L	2.2233	0.3568	0.3568	0.3568	0.3568
	U	2.3561	0.3590	0.3590	0.3590	0.3590

جدول فوق مقادیر کران های بالا و پایین v^* را در $\alpha = 0.5$ نشان می دهد که این مقادیر با مقادیر بدست آمده از روش دوم یکسان هستند. به عنوان مثال برای ربات ۱ داریم:

$$\left(v^*\right)_{0.5}^{L} = \frac{1}{\left(1_S \tilde{y}_k\right)_{0.5}^{U}} Max \left\{ \frac{\left(1_s \tilde{y}_j\right)_{0.5}^{L}}{\left(\tilde{x}_j\right)_{0.5}^{U}} : j = 1, \ldots, n \right\} = \left(\varepsilon^*\right)_{0.5}^{L} \frac{1_S \left(\tilde{y}_{12}\right)_{0.5}^{L}}{\left(\tilde{x}_{12}\right)_{0.5}^{U}}$$
$$= 0.3394 \times 6.2315 = 2.1149$$

جدول۵. جواب های بهینه مدل (۳) با استفاده از حالت *Best –Worst* و *Worst – Best* برای $\alpha = 0.7$

ربات j ام		v^*	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*
1	L	0.3449	0.3449	0.3449	0.3449	0.3449
	U	0.3511	0.3511	0.3511	0.3511	0.3511
2	L	0.3697	0.3697	0.3697	0.3697	0.3697
	U	0.3707	0.3707	0.3707	0.3707	0.3707
3	L	0.4308	0.4308	0.4308	0.4308	0.4308
	U	0.4365	0.4365	0.4365	0.4365	0.4365
4	L	0.8602	0.8602	0.8602	0.8602	0.8602
	U	0.8790	0.8790	0.8790	0.8790	0.8790
5	L	0.5112	0.5112	0.5112	0.5112	0.5112
	U	0.5127	0.5127	0.5127	0.5127	0.5127
6	L	0.5106	0.5106	0.5106	0.5106	0.5106
	U	0.5123	0.5123	0.5123	0.5123	0.5123
7	L	2.5943	0.4121	0.4121	0.4121	0.4121
	U	2.6834	0.4132	0.4132	0.4132	0.4132
8	L	2.5855	0.4107	0.4107	0.4107	0.4107
	U	2.6776	0.4123	0.4123	0.4123	0.4123
9	L	2.9896	0.4749	0.4749	0.4749	0.4749
	U	3.1004	0.4774	0.4774	0.4774	0.4774
10	L	2.3305	0.3702	0.3702	0.3702	0.3702
	U	2.4146	0.3718	0.3718	0.3718	0.3718
11	L	2.2449	0.3566	0.3566	0.3566	0.3566
	U	2.3210	0.3574	0.3574	0.3574	0.3574
12	L	2.2487	0.3572	0.3572	0.3572	0.3572
	U	2.3282	0.3585	0.3585	0.3585	0.3585

تا اینجا مقادیر بدست آمده برای برش های مختلف محاسبه شده است. جدول ۶ مقادیر قبلی محاسبه شده در برش های مختلف را برای $\alpha = 1$ نشان می دهد. مشاهد می شود که این برش کران های بالا و پایین یکسان هستند. در واقع این برش مقادیر حالت قطعی را نشان می دهند.

جدول۶. جواب های بهینه مدل (۳) با استفاده از حالت *Best –Worst* و *Worst – Best* برای $\alpha = 1$

ربات j ام		v^*	u_1^*	u_2^*	u_3^*	u_4^*
1	L	2.2077	0.3453	0.3453	0.3453	0.3453
	U	2.2077	0.3453	0.3453	0.3453	0.3453
2	L	2.3669	0.3702	0.3702	0.3702	0.3702
	U	2.3669	0.3702	0.3702	0.3702	0.3702
3	L	2.7856	0.4357	0.4357	0.4357	0.4357
	U	2.7856	0.4357	0.4357	0.4357	0.4357
4	L	5.6033	0.8764	0.8764	0.8764	0.8764
	U	5.6033	0.8764	0.8764	0.8764	0.8764
5	L	3.2735	0.5099	0.5099	0.5099	0.5099
	U	3.2735	0.5140	0.5140	0.5140	0.5140
6	L	3.2703	0.5115	0.5115	0.5115	0.5115
	U	3.2703	0.5115	0.5115	0.5115	0.5115
7	L	2.6386	0.4127	0.4127	0.4127	0.4127
	U	2.6386	0.4127	0.4127	0.4127	0.4127
8	L	2.6309	0.4115	0.4115	0.4115	0.4115
	U	2.6309	0.4115	0.4115	0.4115	0.4115
9	L	3.0446	0.4762	0.4762	0.4762	0.4762
	U	3.0446	0.4762	0.4762	0.4762	0.4762
10	L	2.3720	0.3710	0.3710	0.3710	0.3710
	U	2.3720	0.3710	0.3710	0.3710	0.3710
11	L	2.2825	0.3570	0.3570	0.3570	0.3570
	U	2.2825	0.3570	0.3570	0.3570	0.3570
12	L	2.2889	0.3580	0.3580	0.3580	0.3580
	U	2.2889	0.3580	0.3580	0.3580	0.3580

حال با در دسترس بودن مضارب وزنی و خروجی ها و ورودی بازه ای با استفاده از مدل های DEA فازی در ماهیت خروجی کارایی های ۱۲ ربات محاسبه شده و در جدول ۷ نشان داده شده است.

جدول۷- مقادیر کارایی داده های فازی ۱۲ ربات

ربات j ام	Efficiency	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 1$
1	L	0.4107	0.4146	0.4354	0.4529
	U	0.4911	0.4944	0.4633	0.4529
2	L	0.5177	0.5344	0.5543	0.5632
	U	0.6126	0.5935	0.5813	0.532
3	L	0.5674	0.5988	0.6064	0.6387
	U	0.7167	0.6861	0.6741	0.6387
4	L	0.5133	0.5707	0.5602	0.6350
	U	0.8134	0.7194	0.7370	0.6350
5	L	0.5596	0.5918	0.6183	0.6513
	U	0.7649	0.7193	0.6908	0.6513
6	L	0.3481	0.3666	0.3763	0.3915
	U	0.4469	0.4180	0.4074	0.3915
7	L	0.3896	0.4079	0.4169	0.4331
	U	0.4821	0.4598	0.4506	0.4331
8	L	0.6291	0.6472	0.6527	0.6762
	U	0.7262	0.7163	0.6955	0.6762
9	L	0.5337	0.5531	0.5638	0.5844
	U	0.6396	0.6173	0.6057	0.5844
10	L	0.4184	0.4465	0.4601	0.4817
	U	0.5672	0.5203	0.5045	0.4817
11	L	0.5788	0.6001	0.6149	0.6376
	U	0.7031	0.6778	0.6613	0.6376
12	L	0.9114	0.9448	0.9646	1
	U	1.0972	1.0584	1.0366	1

ملاحظه می شود که تنها واحد کارا ربات ۱۲ است. چون کارایی ها بصورت یک بازه است در نتیجه با توجه به اختلاف کم بین کران های بالا و پایین میانگین مقدار کارایی ربات ۱۲ مساوی یک است. بنابراین طبق تعریف کارایی در مدلهای DEA ربات ۱۲ کارا است. مزیت این تحقیق محاسبه جوابهای بهینه مدلهای (۳) و (۴) با روشهای ریاضی فشرده وکارا اثبات شده در قضایای (۱) و (۲) است. تمام محاسبات برحسب اندازه داده ها چندجمله ای زمانی انجام شده اند. واضح است که بدترین حالت پیچیدگی روش پیشنهاد شده O(n) است که در آن n تعداد AMT ها است. درحالیکه حل هر یک از مدل های (۳) و (۴) نیاز به حل ۱۲ LP است که هر LP متناظر یک ربات است.

نتیجه گیری

در این مقاله یک روش ریاضی ساده برای یافتن جواب بهینه مدل انتخاب تکنولوژی با داده های فازی ارائه شده است. این روش نشان می دهد که می توان بدون حل هیچ LP ای جواب بهینه مساله انتخاب تکنولوژی در AMT با داده های فازی را بدست آید. واضح است سهم این کار بهبود بیشتر سرعت محاسباتی در یافتن مقادیر کارایی AMT ها با داده های فازی است که هنگام سروکار داشتن با پیچیدگی با اهمیت تر خواهد بود.

منابع:

- Amin GR, Toloo M, Sohrab B, (2006), An Improved MCDM DEA model for technology selection, International of production Research 44(13), 2681-2686.
- Amin GR, (2009), optimal solution of technology selection model: A computational efficient form, In press, DOI 11.1007/s00170-008-1514-5.
- Braglia M, Petroni A, (1999), a robust multivariate statistical procedure for evaluation and selection of industrial robots. International Journal of production Research, 37, 4157-4178.
- Charnes A, Cooper W.W, Rhodes E, (1978), measuring the efficiency of Decision Making Units, European Journal of Operational Research 2(6), 429-444.
- Cook WD, Kress M, Seiford LM, (1996), Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors. Journal of the Operational Research Society, 47, 945-953.
- Cooper W.W, Seiford L.M, Tone K, (2006), Introduction to Data envelopment analysis and its uses with DEA – solver software and references. Springer, USA,221-431.
- Farzipoor SR, (2008), Technology selection in the presence of imprecise data, weight restrictions, and nondiscretionary factors. In press, DOI 10.1007/s00170-008-1514-5.
- Guo, P., & Tanaka, H.,(1998), Extended fuzzy DEA, in: Proceedings of the 3rd Asian Fuzzy Systems Symposium,517–521.
- Guo, P., & Tanaka, H., (2001), Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method, Fuzzy Sets and Systems, 119, 149-160.
- Kao, C., & Liu, S. T. (2000), Fuzzy Efficiency Measures in Data envelopment Analysis, Fuzzy Sets and Systems, 113, 427-437.

- Karsak EE, Ahiska S.S, (2005), Practical common weight multi-criteria decision making approach with an improved discriminating power for technology selection. International Journal of production Research 43(8), 1537-1554.
- Sun S, (2002), assessing computer numerical control machines using data envelopment analysis. International Journal of production Research, 40, 2011-2039.
- Talluri S, Yoon KP, (2000), a cone–ratio DEA approach for AMT justification. International Journal of Production Economics 66, 119-129.
- Zimmermann, H. J.(1996), Fuzzy set Theory and Its Application, Kluwer Academic Publishers, London.