

اندازه‌گیری کارایی به صورت فازی در تحلیل پوششی داده‌ها

مریم بالاسیدقصیر¹
اسماعیل علیزاده²

چکیده

مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌های مختلف برای به وجود آوردن خروجی‌های مختلف هستند. برای بحث در مورد داده‌های نادقیق، مفهوم فازی معرفی می‌شود. این مقاله روشی را برای اندازه‌گیری میزان کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با توابع هدف فازی معرفی می‌کند. در این مقاله از اعداد فازی دوزنقه‌ای استفاده می‌شود. هدف اصلی تبدیل مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی به مدل‌های قطعی و دقیق DEA است که به وسیله α - برش‌ها، صورت می‌گیرد. دسته‌ای از مسائل پارامتریک برای توضیح دسته‌ای از مدل‌های قطعی DEA فرمول‌بندی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارائی، توابع عضویت، برنامه‌ریزی پارامتریک

¹ عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز، گروه ریاضیات، تبریز، ایران

² عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مرند، گروه ریاضیات، مرند، ایران

مقدمه

اندازه گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده، زمانی که چند ورودی و خروجی داریم مشکل است. بنابراین از مجموعه‌ای از اوزان برای جمع کردن ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت جداگانه برای محاسبه نسبت کارایی استفاده می‌شود. (Charnes, 1978:429-444)، روش تحلیل پوششی داده‌ها را معرفی کرد که در آن هر DMU وزن مورد نظر خود را انتخاب می‌کند، زمانی که نسبت مجموع خروجی‌ها بر ورودی‌های همه DMU ها کوچک‌تر یا مساوی با یک است، این نظریه به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی جزئی فرمول‌بندی می‌شود. یکی از جنبه‌های جالب این روش این است که نقطه مقابل بهینگی پارتو است.

در اقتصاد، DMU کارایی پارتو نامیده می‌شود اگر ورودی مصرف خود را کاهش دهد، و یا ورودی دیگر، به همان میزان افزایش خروجی، افزایش پیدا کند یا زمانی که تولیدات مان افزایش پیدا کند خروجی دیگر به همان میزان مصرف ورودی‌ها کاهش پیدا کند. کارهای زیادی توسط چارلز صورت گرفته است و مدل‌های گوناگون و کاربردهای زیادی گزارش شده است. اما یک روش دیگر توسط (Seiford, 1996:99-137) ارائه شده است. در این روش، میزان کارایی به میزان داده‌ها حساس است و با تغییر جزئی کارایی تغییر پیدا می‌کند. بنابراین، کلید رسیدن به موفقیت با استفاده از روش DEA، میزان درست فاکتورهاست که شامل ورودی‌ها و خروجی‌های کامل است، در این بین، بسیاری از فاکتورها را نمی‌توان به صورت دقیق اندازه گیری کرد. برای بررسی میزان کارایی با داده‌های نادقیق در مراحل تصمیم گیری (Bellman & Zade, 1970:141-164) مفهوم فازی را معرفی کردند. در روش معمول DEA، مجموعه‌ای از اوزان، یک مجموعه‌ای از محدودیت‌ها را تولید می‌کردند که قادر به اندازه گیری بیشترین میزان کارایی هر DMU بود.

حال به بررسی مدل DEA زمانی که بعضی از توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی هستند، می‌پردازیم. چون مدل DEA، یک مدل برنامه‌ریزی خطی بود، در مدل جدید اشاره شده، مدل برنامه‌ریزی خطی به صورت فازی است. متأسفانه، بسیاری از تکنیک‌ها، فقط قادر به حل مسائل برنامه‌ریزی قطعی بودند. مقالاتی وجود دارند که بحث در مورد اندازه‌گیری میزان کارایی، زمانی که توابع عضویت به صورت احتمالی و نه به صورت فازی هستند، می‌پردازند. (Sengupta, 1993: 857-871) مدل DEA را به وسیله توابع عضویت تبدیل به مدل برنامه‌ریزی خطی فازی کرد.

در این مقاله، یک روش جدیدی را ارائه می‌کنیم که قادر به اندازه‌گیری میزان کارایی فازی را برای DMU ها با تابع هدف فازی است. ایده اصلی این روش استفاده از α - برش‌ها با استفاده از قانون توسیع زاده برای تبدیل روش فازی DEA، به مدل‌های قطعی DEA است. روش‌های معمول DEA، به وسیله روش LP حل می‌گردند. در این بخش، مثال ساده‌ای را برای توضیح این ایده در این مقاله ذکر می‌کنیم.

ایده: در روش DEA که به وسیله (Charnes, 1978: 429-444) بیان شده است، بازده به مقیاس ثابت در نظر گرفته شده است (Banker, 1984: 1078-1092) مفروضاتی را به مدل چارنز اضافه کرد که در آن بازده به مقیاس متغیر مناسب بود. این مدل به صورت زیر است:

$$E_r = \max \frac{\sum_{k=1}^t u_k Y_{rk}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j X_{rj})}$$

$$s.t \quad \frac{\sum_{k=1}^t u_k Y_{ik}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j X_{ij})} \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$u_k, v_j \geq \varepsilon > 0$$

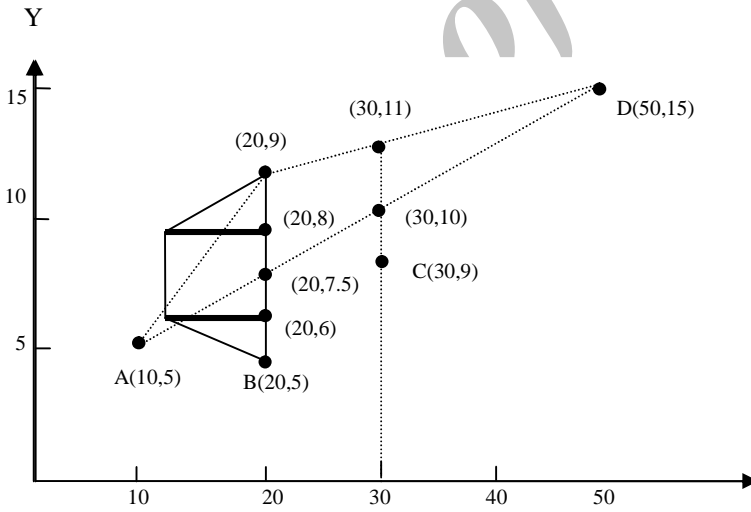
زمانی که X_{ij} و Y_{ik} ورودی و خروجی هستند و $j = 1, \dots, S$ و $k = 1, \dots, t$ و ε یک عدد غیرارشمیدی است. مدل (1) یک مساله برنامه ریزی خطی کسری است که می توان آن را به مدل برنامه ریزی خطی فازی تبدیل کرد.

$$E_r = \max \sum_{k=1}^t u_k Y_{rk}$$

$$s.t \quad v_o + \sum_{j=1}^s v_j X_{ij} = 1$$

$$\sum_{k=1}^t u_k Y_{ik} - (v_o + \sum_{j=1}^s v_j X_{ij}) \leq 0, i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$u_k, v_j \geq \varepsilon,$$



شکل (1)

بنابراین روش معمول LP را می توان برای حل E_r استفاده کرد.

یک حالت ساده را با یک ورودی و خروجی در نظر می گیریم. چهار DMU را در نظر می گیریم. D, C, B, A در شکل 1، با $50, 30, 20, 10$ واحد ورودی، برای تولید 5 و $(5, 6, 8, 9)$ و 9 و 15 واحد خروجی، زمانی که $(5, 6, 8, 9)$ یک عدد دوزنقه ای است. خروجی B ، کوچک تر یا مساوی با 7.5 است، زمانی که کارایی به صورت نسبی از خروجی بر \max کل خروجی به وجود می آید، نتایج کارایی D, C, A مساوی 1, 0.9, 1 است، و کارایی به دست آمده برای B ، ما بین $\frac{7.5}{7.5}$ ، $\frac{5}{7.5}$ بسته به میزان خروجی اش است. زمانی که خروجی B مابین 9-7.5 است، خط تولید B متصل به A است. چون D, B, A در خط تولید قرار می گیرند، نتایج کارایی به دست آمده برابر 1 است، اما کارایی C مابین $\frac{9}{11}$ ، $\frac{9}{10}$ است. در این مثال، روشن است که کارایی D, A برابر 1 است. فرض می کنیم که \tilde{E}_C, \tilde{E}_B میزان کارایی فازی DMU های C, B است. برای به دست آوردن توابع عضویت \tilde{E}_C, \tilde{E}_B ، می توان از α - برش ها استفاده کرد. برای یک مقدار خاص α ، با استفاده از کران های بالا و پایین α - برش ها خروجی B ، یک مقدار قطعی به دست می آید. با جمع آوری نتایج با α - های مختلف \tilde{E}_C, \tilde{E}_B به دست می آید. با استفاده از مشاهدات شکل 1، تابع عضویت فازی \tilde{Y}_B به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{Y}_B}(y) = \begin{cases} y - 5 & 5 \leq y \leq 6 \\ 1 & 6 \leq y \leq 8 \\ 9 - y & 8 \leq y \leq 9 \end{cases}$$

$[5 + \alpha, 9 - \alpha]$ یک مجموعه α - سطح است. فرض کنیم که $(E_B)_\alpha^u, (E_B)_\alpha^l$ به عنوان کران های بالا و پایین α - برش های $\mu_{\tilde{E}_B}$ است به عنوان تابع عضویت \tilde{E}_B است.

$$\begin{aligned}
 (E_B)_\alpha^L &= \max \frac{(5 + \alpha)u}{(v_o + 20v_1)} \\
 &\frac{5u}{(v_o + 10v_1)} \leq 1 \\
 &\frac{(5 + \alpha)u}{(v_o + 20v_1)} \leq 1 \\
 \text{s.t.} \quad &\frac{9u}{(v_o + 30v_1)} \leq 1 \\
 &\frac{15u}{(v_o + 50v_1)} \leq 1 \\
 &u, v_1 \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_B)_\alpha^U &= \max \frac{(9 - \alpha)u}{(v_o + 20v_1)} \\
 &\frac{5u}{(v_o + 10v_1)} \leq 1 \\
 &\frac{(9 - \alpha)u}{(v_o + 20v_1)} \leq 1 \\
 \text{s.t.} \quad &\frac{9u}{(v_o + 30v_1)} \leq 1 \\
 &\frac{15u}{(v_o + 50v_1)} \leq 1 \\
 &u, v_1 \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

زمانی که کارایی، نسبتی از خروجی‌ها بر max مقدار خروجی‌هاست که در شکل 1 نمایش نمایش داده شده است. واضح است که

$$(E_B)_\alpha^L = \frac{(5 + \alpha)}{75}, (E_B)_\alpha^U = 1 - \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ است.}$$

$$\mu_{\tilde{E}_B}(z) = \begin{cases} \frac{(15z-10)}{2}, & \frac{2}{3} \leq z \leq \frac{4}{5} \\ 1, & \frac{4}{5} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

به طور مشابه، کران‌های بالا و پایین α - برش‌های $\mu_{\tilde{E}_C}$ به صورت زیر حل

می‌شوند:

$$\begin{aligned} (E_C)_\alpha^L = \max \quad & \frac{9u}{(v_0 + 30v_1)} \\ & \frac{5u}{(v_0 + 10v_1)} \leq 1 \\ & \frac{(5 + \alpha)u}{(v_0 + 20v_1)} \leq 1 \\ s.t \quad & \frac{9u}{(v_0 + 30v_1)} \leq 1 \\ & \frac{15u}{(v_0 + 50v_1)} \leq 1 \\ & u, v_1 \geq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_C)_\alpha^U = \max \quad & \frac{9u}{(v_0 + 30v_1)} \\ s.t \quad & \frac{5u}{(v_0 + 10v_1)} \leq 1 \\ & \frac{(9 - \alpha)u}{(v_0 + 20v_1)} \leq 1 \\ & \frac{15u}{(v_0 + 50v_1)} \leq 1 \\ & u, v_1 \geq \varepsilon \end{aligned}$$

و v_0 آزاد

به راحتی می توان $\forall \alpha : 0 < \alpha \leq 1$ $(E_c)_\alpha^L = \frac{27}{(33-2\alpha)}$ ، $(E_c)_\alpha^U = \frac{9}{10}$ دست آورد. متناوباً $\mu_{\tilde{E}_c}(z)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\mu_{\tilde{E}_c}(z) = \begin{cases} \frac{(33z-27)}{2z} & \frac{9}{11} \leq z \leq \frac{27}{31} \\ \frac{9}{10} & \frac{27}{31} \leq z \leq \frac{9}{10} \end{cases}$$

بنابراین، تابع عضویت به صورت فازی است، هم چنین توابع عضویت را می توان برای اندازه گیری میزان کارایی فازی به وسیله α - برش ها بیان نمود، میزان کارایی واحدهای تصمیم گیرنده می تواند به صورت قطعی باشد، اگر چه تابع هدف فازی است، به عنوان مثال DMU های D,A را در نظر می گیریم. توابع عضویت میزان کارایی می تواند غیر خطی باشد.

مراحل جواب: مجموعه ای از DMU ها را در نظر می گیریم، فرض می کنیم که \tilde{X}_{ij} ورودی و \tilde{Y}_{ik} خروجی باشد و به صورت مجموعه های فازی با توابع عضویت $\mu_{\tilde{X}_{ij}}$ ، $\mu_{\tilde{Y}_{ik}}$ است. بدون خلل به کلیت، فرض می کنیم که توابع هدف فازی هستند. زمانی که مقادیر فازی را به کمک توابع عضویت به مقادیر قطعی تبدیل می کنیم، مدل DEA، فازی را می توان به صورت زیر فرمول بندی کرد:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r = \max & \frac{\sum_{k=1}^t u_k \tilde{Y}_{rk}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j \tilde{X}_{rj})} \\ \text{st} & \frac{\sum_{k=1}^t u_k \tilde{Y}_{ik}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j \tilde{X}_{ij})} \leq 1, i=1, \dots, n \\ & u_k, v_j \geq \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

فرض می‌کنیم که $S(\tilde{Y}_{ik}), S(\tilde{X}_{ij})$ ، به عنوان تکیه‌گاه $\tilde{Y}_{ik}, \tilde{X}_{ij}$ تعریف شوند. α - برش‌های $\tilde{Y}_{ik}, \tilde{X}_{ij}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(X_{ij})_{\alpha} = \{x_{ij} \in S(\tilde{X}_{ij}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\}, \quad \forall i, j \quad (4a)$$

$$(Y_{ij})_{\alpha} = \{y_{ik} \in S(\tilde{Y}_{ik}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}) \geq \alpha\}, \quad \forall i, k \quad (4b)$$

توجه کنید که $(X_{ij})_{\alpha}$ و $(Y_{ik})_{\alpha}$ ، مجموعه‌های قطعی هستند. با استفاده از α - برش‌ها، ورودی‌ها و خروجی‌ها را می‌توان با α - برش‌های متفاوت و سطح‌هایی از بازه‌های اطمینان متفاوت نشان داد.

بنابراین مدل فازی DEA، می‌تواند به خانواده‌ای از مدل‌های قطعی DEA، با مجموعه‌ای از α - برش‌های متفاوت که در آن، $\{0 < \alpha \leq 1\}$ و $\{(X_{ij})_{\alpha} \mid 0 < \alpha \leq 1\}$ تبدیل کرد.

مجموعه‌های α - سطح‌ها که در معادلات (4a), (4b) نشان داده شد، بازه‌های قطعی هستند که به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

(5a)

$$(X_{ij})_{\alpha} = \left[\begin{array}{l} \min_{x_{ij}} \{x_{ij} \in S(\tilde{X}_{ij}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\}, \\ \max_{x_{ij}} \{x_{ij} \in S(\tilde{X}_{ij}) \mid \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha\} \end{array} \right]$$

(5b)

$$(Y_{ij})_{\alpha} = \left[\begin{array}{l} \min_{y_{ik}} \{y_{ik} \in S(\tilde{Y}_{ik}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}) \geq \alpha\}, \\ \max_{y_{ik}} \{y_{ik} \in S(\tilde{Y}_{ik}) \mid \mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}) \geq \alpha\} \end{array} \right]$$

بر پایه قانون توسیع زاده، تابع عضویت کارایی DMU_r را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{E}_r}(z) = \sup_{x,y} \min \{ \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}), \forall i, j, k | z = E_r(x, y) \}, \quad (6)$$

بنابراین $E_r(x, y)$ مشخص شد، روشی برای ایجاد تابع عضویت $\mu_{\tilde{E}_r}$ است که در این مقاله به وسیله α -برش ها، به محاسبه آن می پردازیم. براساس معادله (6)، $\mu_{\tilde{E}_r}$ ، مینیمم مقدار $\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})$ ، $\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik})$ است که در آن $\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha$ ، $\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}) \geq \alpha$ است، و حداقل یکی از $\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij})$ ، $\mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik})$ برابر α است. و $Z = E_r$ ، $\mu_{\tilde{E}_r}(z) = \alpha$ $\forall i, j, k$ فرض می کنیم که $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 1$ باشد در این صورت داریم:

$$[(x_{ij})_{\alpha_1}^L, (x_{ij})_{\alpha_1}^U] \subseteq [(x_{ij})_{\alpha_2}^L, (x_{ij})_{\alpha_2}^U] \quad [(y_{ik})_{\alpha_1}^L, (y_{ik})_{\alpha_1}^U] \subseteq [(y_{ik})_{\alpha_2}^L, (y_{ik})_{\alpha_2}^U]$$

بنابراین،

$$\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha, \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) = \alpha, \mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}) \geq \alpha, \mu_{\tilde{Y}_{ik}}(y_{ik}) = \alpha$$

برای به دست آوردن تابع عضویت $\mu_{\tilde{E}_r}$ ، کران های بالا و پایین $\mu_{\tilde{E}_r}$ را به وسیله α -برش ها به دست می آوریم.

$$\begin{aligned}
 (E_r)_\alpha^L &= \min E_r(x, y) \\
 \text{s.t} \quad & (X_{ij})_\alpha^L \leq x_{ij} \leq (X_{ij})_\alpha^U, \quad \forall i, j \\
 & (Y_{ik})_\alpha^L \leq y_{ik} \leq (Y_{ik})_\alpha^U, \quad \forall i, k
 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned}
 (E_r)_\alpha^U &= \max E_r(x, y) \\
 \text{s.t} \quad & (X_{ij})_\alpha^L \leq x_{ij} \leq (X_{ij})_\alpha^U, \quad \forall i, j \\
 & (Y_{ik})_\alpha^L \leq y_{ik} \leq (Y_{ik})_\alpha^U, \quad \forall i, k
 \end{aligned} \quad (7b)$$

و فرم کلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 (E_r)_\alpha^L &= \min_{\substack{(X_{ij})_\alpha^L \leq x_{ij} \leq (X_{ij})_\alpha^U \\ (Y_{ik})_\alpha^L \leq y_{ik} \leq (Y_{ik})_\alpha^U \\ \forall i, j, k}} \{ E_r = \max \frac{\sum_{k=1}^t u_k y_{rk}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j x_{rj})} \\
 \text{s.t} \quad & \frac{\sum_{k=1}^t u_k y_{ik}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j x_{ij})} \leq 1, i = 1, \dots, n \quad (8a) \\
 & u_k, v_j \geq \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_r)_\alpha^U &= \max_{\substack{(X_{ij})_\alpha^L \leq x_{ij} \leq (X_{ij})_\alpha^U \\ (Y_{ik})_\alpha^L \leq y_{ik} \leq (Y_{ik})_\alpha^U \\ \forall i, j, k}} \left\{ \begin{aligned}
 & E_r = \max \frac{\sum_{k=1}^t u_k y_{rk}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j x_{rj})} \\
 & \frac{\sum_{k=1}^t u_k y_{ik}}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j x_{ij})} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (8b) \\
 & u_k, v_j \geq \varepsilon,
 \end{aligned} \right. \text{s.t}
 \end{aligned}$$

این مدل دو مرحله‌ای را می‌توان به یک مدل یک مرحله‌ای تبدیل کرد. زمانی که ورودی‌ها و خروجی‌ها برای هر DMU، در دامنه‌های مختلف تغییر می‌کند، برای پیدا کردن کوچک‌ترین نسبت کارایی هر DMU، یک را می‌توان به عنوان خروجی این DMU و ورودی کلیه DMU‌هایی که با مقادیر کم‌ترین هستند، قرار داد. متقابلاً، بر پیدا کردن بیشترین کارایی DMU‌ها، یک را می‌توان به عنوان خروجی این DMU و ورودی کلیه DMU‌هایی که با مقادیر بیشترین هستند، قرار داد. بنابراین مدل‌های (8a)، (8b) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(E_r)_\alpha^L = \max \frac{\sum_{k=1}^t u_k (Y_{rk})_\alpha^L}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j (X_{rj})_\alpha^U)}$$

$$s.t \quad \frac{\sum_{k=1}^t u_k (Y_{rk})_\alpha^L}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j (X_{rj})_\alpha^U)} \leq 1, i = 1, \dots, n, i \neq r \quad (9a)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^t u_k (Y_{ik})_\alpha^U}{(v_0 + \sum_{j=1}^s v_j (X_{ij})_\alpha^L)} \leq 1$$

$$u_k, v_j \geq \varepsilon$$

این جفت از مسائل ریاضی در بردارنده مطالعات سیستمی در مورد این که چگونه می‌توان جواب‌های بهین $(X_{ij})_\alpha^U, (X_{ij})_\alpha^L, (Y_{ik})_\alpha^U, (Y_{ik})_\alpha^L$ را در بازه $\alpha \in (0,1]$ ، تغییر داد. در این صورت دسته‌ای از معادلات پارامتری به جود می‌آید.

اگر $(E_r)_\alpha^L, (E_r)_\alpha^U$ به وسیله α -برش‌ها تولید شود، تابع سمت چپ برابر با، $L(z) = [(E_r)_\alpha^L]^{-1}$ و تابع سمت راست برابر، $R(z) = [(E_r)_\alpha^U]^{-1}$ است. تابع عضویت $\mu_{\bar{E}_r}$ به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{E}_r}(z) = \begin{cases} L(z) & z_1 \leq z \leq z_2 \\ 1 & z_2 \leq z \leq z_1 \\ R(z) & z_3 \leq z \leq z_4 \end{cases}$$

در غیر این صورت، مجموعه‌ای از بازه‌های $\{(E_r)_\alpha^L, (E_r)_\alpha^U\} \alpha \in (0,1]$ منعکس کننده شکل $\mu_{\tilde{E}_r}$ است.

البته شکل کامل تابع کاملاً مشخص نیست. برای نشان دادن روش پیشنهادی و توانایی آن در محاسبه میزان کارایی فازی، چهار DMU را در نظر می‌گیریم. در یک سطح خاص، کران‌های بالا و پایین به صورت زیر است:

ورودی و خروجی چهار DMU

DMU	Input	$\alpha - Cut$	Output	$\alpha - Cut$
A	(11,12,14)	$[11+\alpha, 14-2\alpha]$	10	$[10,10]$
B	30	$[30,30]$	(12,13,14,16)	$[12+\alpha, 16-2\alpha]$
C	40	$[40,40]$	11	$[11,11]$
D	(45,47,52,55)	$[45+2\alpha, 55-3\alpha]$	(12,15,19,22)	$[12+3\alpha, 22-3\alpha]$

α - برش ها بر حسب معادلات (9) به صورت زیر حل می شوند:

$$(E_A)_\alpha^L = \max \frac{10u}{[v_0 + (14 - 2\alpha)v_1]}$$

$$s.t \quad \frac{10u}{[v_0 + (14 - 2\alpha)v_1]} \leq 1$$

$$\frac{(16 - 2\alpha)u}{[v_0 + 30v_1]} \leq 1$$

$$\frac{11u}{[v_0 + 40v_1]} \leq 1$$

$$\frac{(22 - 3\alpha)u}{[v_0 + (45 + 2\alpha)v_1]} \leq 1$$

$$u, v_1 \geq \varepsilon$$

$$(E_A)_\alpha^U = \max \frac{10u}{[v_0 + (11 + \alpha)v_1]}$$

$$s.t \quad \frac{10u}{[v_0 + (11 + \alpha)v_1]} \leq 1$$

$$\frac{(12 + \alpha)u}{[v_0 + 30v_1]} \leq 1$$

$$\frac{11u}{[v_0 + 40v_1]} \leq 1$$

$$\frac{(12 + 3\alpha)u}{[v_0 + (55 - 3\alpha)v_1]} \leq 1$$

$$u, v_1 \geq \varepsilon$$

کران های بالا و پایین α - برش های $\mu_{\tilde{E}_D}, \mu_{\tilde{E}_C}, \mu_{\tilde{E}_B}$ را نیز می توان به طور

مشابه حل کرد.

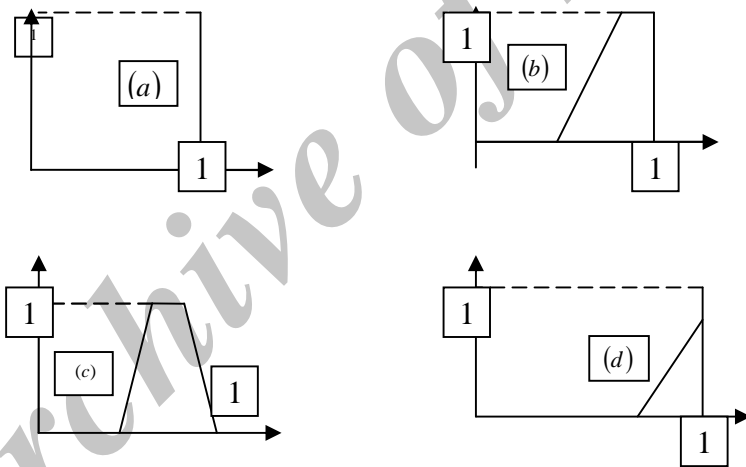
چون جواب‌های تحلیلی مان در این مثال قابل وصول نیستند، ما از پنجاه و یک مقدار برای α ، به ازای $0, 0.02, 0.04, \dots, 100$ ، استفاده می‌کنیم. در شکل دو قسمت ناهموار $\mu_{\tilde{E}_D}$ ، $\mu_{\tilde{E}_C}$ ، $\mu_{\tilde{E}_B}$ ، از این مقادیر α تشکیل یافته است. شکل ناهموار به صورت یک تابع پیوسته نشان داده شده است.

در این مثال متذکر می‌شویم که اگر چه ورودی و خروجی DMU_A ، فازی است، اما میزان کارایی آن یک مقدار قطعی است. به عبارت دیگر تابع عضویت \tilde{E}_A مقدار یک را نشان می‌دهد. نکته دیگری که باید مدنظر داشت این است که هیچ تناظر یک به یکی مابین، توابع عضویت و میزان کارایی وجود ندارد. به عنوان مثال، تابع عضویت ورودی و خروجی D ذوزنقه‌ای است، ولی میزان کارایی D ، ذوزنقه‌ای نیست. و به درستی با مراجعه به شکل 2، شکل $\mu_{\tilde{D}}$ ، نامنظم است.

بحث:

در این بخش با استفاده از روش α -برش‌ها، نشان خواهیم داد، زمانی که برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها نادقیق هستند، میزان کارایی آن‌ها نیز نادقیق است. دامنه کارایی DMU‌ها را می‌توان در سطوح مختلف به دست آورد. DMU_C را در مثال پیشین در نظر می‌گیریم. در سطح $\alpha = 1$ ، میزان کارایی C برابر $[0, 6395, 0, 7908]$ ، است و هم‌چنین در سطح $\alpha = 1$ ، میزان کارایی برابر $[0, 5436, 0, 9166]$ است.

شکل (2): توابع عضویت، $\mu_{E_A}(a)$ ، $\mu_{E_B}(b)$ ، $\mu_{E_C}(c)$



بعد از این که کارایی همه DMU‌ها محاسبه شد، کار دیگری که باید انجام دهیم، رتبه‌بندی DMU‌ها برای انتخاب بهترین DMU است. روش‌های زیادی برای رتبه‌بندی فازی DMU‌ها وجود دارد. به هر حال، توابع عضویت اعداد فازی باید رتبه‌بندی شوند. روش (Chen & Klein, 1997: 26-35) بر پایه α -برش‌ها بنا

نهاده شده است. فرض می‌کنیم که h ، بیشترین ارتفاع $\mu_{\tilde{E}_j}$ به ازای $j = 1, \dots, m$ باشد، و همچنین فرض می‌کنیم که h به n زیربازه تقسیم شده است، به طوری که $\alpha_i = \frac{ih}{n}$ (Chen & Klein, 1997:26-35) شاخص زیر را برای رتبه‌بندی انتخاب کردند:

$$I_j = \left[\frac{\sum_{i=0}^n ((E_i)_{\alpha_1}^U)}{\sum_{i=0}^n ((E_j)_{\alpha_1}^U - c) - \sum_{i=0}^n ((E_j)_{\alpha_1}^L - d)} \right], n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

که در آن، $c = \min_{i,j} \{(E_{ji})_{\alpha_1}^L\}$ ، $d = \max_{i,j} \{(E_{ji})_{\alpha_1}^U\}$ است. هر چه قدر شاخص I_j بیشتر باشد، عدد فازی مطلوب به دست می‌آید. به صورت تئوری، این روش زمانی معتبر است که n ، مقدار α -برش‌ها به بی‌نهایت میل می‌کند. در مثال قبل، α -برش‌ها با یازده مقدار α ، در شکل دو مشاهده شده است به طوری که: $I_A = 1.0$ ، $I_B = 0.6966$ ، $I_C = 0.3928$ ، $I_D = 0.8121$ ، در نتیجه $\tilde{E}_A > \tilde{E}_D > \tilde{E}_B < \tilde{E}_C$ به دست می‌آید.

شکل (2): α - برش های میزان کارایی یازده مقدار α :

α	$(E_A)_\alpha^L, (E_A)_\alpha^U$	$(E_B)_\alpha^L, (E_B)_\alpha^U$	$(E_C)_\alpha^L, (E_C)_\alpha^U$	$(E_D)_\alpha^L, (E_D)_\alpha^U$
0.0	1.0	1.0	0.7183	1.0
0.1	1.0	1.0	0.7340	1.0
0.2	1.0	1.0	0.7500	1.0
0.3	1.0	1.0	0.7662	1.0
0.4	1.0	1.0	0.7829	1.0
0.5	1.0	1.0	0.7997	1.0
0.6	1.0	1.0	0.8169	1.0
0.7	1.0	1.0	0.8343	1.0
0.8	1.0	1.0	0.8522	1.0
0.9	1.0	1.0	0.8703	1.0
1	1.0	1.0	0.8887	1.0

نتیجه گیری:

کارهای اولیه در زمینه DEA، در سال 1978، صورت گرفته است و مدل های گوناگون و کاربرد های زیادی از DEA در مدیریت اجرائی تأثیر به سزایی پیدا کرد. در بسیاری از مطالعات، مربوط به حالت قطعی بود و میزان کارایی به صورت قطعی و دقیق محاسبه می شد، مطالعات کمی نیز در زمینه حالت های احتمالی صورت گرفته است. در این مقاله روشی را برای پیدا کردن میزان کارایی فازی زمانی که توابع هدف به صورت فازی هستند بیان کردیم. این ایده بر پایه قانون توسیع زاده برای تبدیل مدل DEA فازی به مدل های قطعی DEA، به وسیله α - برش هاست.

منابع:

- R.D.Banker, A.Charnes, w.w.Cooper," Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis", management Sci.30 (1984)1078-1092.
- R. E. Bellman, L.A. Zade"Decision-making in a fuzzy environment, Management" Sci .17 (1970) B141-164.
- J.J. Buckley," Possibilistic linear programming with triangular fuzzy" Fuzzy Sets and Systems 26(1989)329-341.
- A.Charnes, W.WCooper, E. Rhodes," Measuring the efficiency of decision making units", Eur.j.Oper.Res.2 (1978)429-444.
- L.M. Seiford, "Data envelopment analysis, the evolution of the state of the art (1978-1995), j.Productivity Anal .7(1996)99-137.
- L. M.Sengupta," A fuzzy system approach in data envelopment analysis", Comput.Math. Appl.24 (1992)259-266.
- L.M.Sengupta,"Non-parametric approach to stochastic programming", Internet .J.Systems Sci.24 (1993)857-871.
- C.B Chen, C.M Klein, A simple approach to ranking a group of aggregated Fuzzy utilities, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. Part B: Cybernet. 27(1997)26-35