

## «یادداشت تحقیقاتی»

# تحلیل غیرخطی تیر چندلایه همراه با لایه پیزوالکتریک با در نظر گرفتن تغییر شکل های بزرگ

منصور درویشه<sup>۱</sup>، ابوالفضل درویشه<sup>۲\*</sup>، وحید عربزاده<sup>۳</sup> و حامد رجبی<sup>۴</sup>

۱- استاد گروه مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۲- استاد گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد بندر انزلی، بندر انزلی

۳- کارشناس ارشد گروه مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۴- کارشناس ارشد گروه مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

\*صندوق پستی: ۳۷۵۶

adarvizeh@guilan.ac.ir

(دریافت مقاله: خرداد ۱۳۸۶، پذیرش مقاله: خرداد ۱۳۸۷)

**چکیده** - در این مقاله تحلیل استاتیکی تیر چندلایه همراه با لایه پیزوالکتریک به عنوان حسگر و همچنین بدون در نظر گرفتن لایه پیزوالکتریک، تحت تغییر شکل بزرگ به روش المان محدود و با بهره گیری از فرمول بندی لاگرانژی به هنگام (ال-یو-ام)<sup>۱</sup> و اصل کار مجازی مطالعه شده است. برای تحلیل از المان چهار گرهی که در هر گره دو درجه آزادی جابه جایی و یک درجه آزادی الکتریکی دارد، استفاده شده است. برای نشان دادن قابلیت و کارایی روش محاسباتی و تحلیل حاضر، با استفاده از کدنویسی در متلب<sup>۲</sup> نتایج با سایر تحقیقات مقایسه شده است.

## «Research Note»

# Nonlinear analysis of multi-layered beams with piezoelectric layers considering large deformations

M. Darvizeh<sup>1</sup>, A. Darvizeh<sup>2</sup>, V. Arab Zadeh<sup>3</sup>, H. Rajabi<sup>4</sup>

1- Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht

2- Professor, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Anzali Branch, Bandar-e- Anzali

3- M. Sc., Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht

4- M. Sc., Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht

\*P.O.Box: 3756

adarvizeh@guilan.ac.ir

## Abstract

This paper presents a finite element solution for the static analysis of a multi-layers beam with and without piezoelectric layers. The beam is under large deformation. The virtual work principle and the Lagrangian update method (LUM) have been employed to study the static behavior of piezoelectric beams. Four-nodes element with two displacement degrees of freedom and one electrical degree of freedom has been used in this analysis. Finally, in order to prove the validity of the presented formulation and the solving process, the results are compared with the other available data.

**Keywords:** Piezoelectric, Nonlinear Analysis, Large Deformation.

## ۱- مقدمه

شده است و از آنجا که در تحلیل غیرخطی معادلات به کارگیری روش‌های تکرار ضروری است، در این پژوهش برای حل معادلات غیرخطی از روش نیوتن-رافسون استفاده شده است.

## ۲- فرمول‌بندی المان محدود تغییر شکل بزرگ برای تیر چندلایه

بردار کرنش در دستگاه مختصات دکارتی بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی با در نظر گرفتن جملات کوچک و بزرگ به صورت زیر نوشته می‌شود [۸]:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} u_{,1} \\ v_{,2} \\ w_{,3} \\ u_{,2} + v_{,3} \\ v_{,3} + w_{,2} \\ u_{,3} + w_{,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu} [u_{,1}^2 + v_{,1}^2 + w_{,1}^2] \\ \frac{1}{\nu} [u_{,2}^2 + v_{,2}^2 + w_{,2}^2] \\ \frac{1}{\nu} [u_{,3}^2 + v_{,3}^2 + w_{,3}^2] \\ u_{,1}u_{,2} + v_{,1}v_{,2} + w_{,1}w_{,2} \\ u_{,1}u_{,3} + v_{,1}v_{,3} + w_{,1}w_{,3} \\ u_{,2}u_{,3} + v_{,2}v_{,3} + w_{,2}w_{,3} \end{bmatrix} \quad (1)$$

که  $u, v, w$  مؤلفه‌های جابه‌جایی در مختصات دکارتی است. ارتباط بردار میدان الکتریکی  $E$  با پتانسیل الکتریکی  $V$  به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$E = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} V_{,1} \\ V_{,2} \\ V_{,3} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

روابط حاکم بر مواد پیزوالکتریک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\sigma} = \hat{C} \hat{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C & e^T \\ e & -\zeta \end{bmatrix} \quad (4)$$

با توجه به افزایش کارایی و کاربرد سازه‌های هوشمند و استفاده از پیزوالکتریک به عنوان حسگر و عملگر در این گونه سازه‌ها، مطالعات دقیق و پیشرفته در زمینه پیزوالکتریک‌ها اهمیت یافته است. در میان مطالعات مرتبط با پیزوالکتریک‌ها و کاربرد آنها، می‌توان به مطالعه کراولی و لویس در زمینه کنترل ارتعاشهای تیر مرکب با لایه‌های پیزوالکتریک [۱]، کار ایم و اتلوری در زمینه اثر عملگر پیزوالکتریک بر تغییرشکل تیر مرکب [۲]، مطالعات لی در زمینه فرمول‌بندی برای صفحات چندلایه پیزوالکتریک بر اساس نظریه سستی صفحات [۳]، فرمول‌بندی المان محدود برای پوسته همراه با مواد پیزوالکتریک توسط بترا و لیانگ [۴] و فرمول‌بندی المان محدود برای پوسته همراه با پیزوالکتریک توسط تیزو و تی سانگ [۵] اشاره کرد. همچنین در زمینه تحلیل غیرخطی سازه‌های تلفیق شده با پیزوالکتریک می‌توان به فرمول‌بندی المان محدود برای سازه‌های همراه با پیزوالکتریک تحت تغییرشکل بزرگ توسط بای [۶]، فرمول‌بندی برای تحلیل غیرخطی صفحات همراه با پیزوالکتریک توسط ایکاردی و اسیوا [۷]، فرمول‌بندی المان محدود برای تحلیل تغییرشکل بزرگ سازه‌های همراه با پیزوالکتریک با به کارگیری معادلات ون-کارمن توسط موخرجی و ساها [۸]، تحلیل دینامیکی غیرخطی صفحات کامپوزیت همراه با حسگرهای پیزوالکتریک توسط سانگ‌ای و شی فوای [۹]، تحلیل دینامیکی غیرخطی تیرهای پیزوالکتریک توسط موخرجی و ساها [۱۰]، کنترل ارتعاشهای غیرخطی صفحات شامل پیزوالکتریک توسط یوهی زوونگ [۱۱]، اشاره کرد.

در مقاله حاضر برای تحلیل از المان چهار گرهی که در هر گره، دو درجه آزادی جابه‌جایی و یک درجه آزادی الکتریکی دارد بهره گرفته شده است. با استفاده از کدنویسی در متلب، تحلیل غیرخطی تیرها با در نظر گرفتن لایه پیزوالکتریک و بدون در نظر گرفتن لایه پیزوالکتریک انجام

$${}^{t+\Delta t} \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \sigma_{xx} \\ {}^{t+\Delta t} \sigma_{yy} \\ {}^{t+\Delta t} \sigma_{zz} \\ {}^{t+\Delta t} \tau_{xy} \\ {}^{t+\Delta t} \tau_{yz} \\ {}^{t+\Delta t} \tau_{xz} \\ {}^{t+\Delta t} D_x \\ {}^{t+\Delta t} D_y \\ {}^{t+\Delta t} D_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{xx} \\ {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{yy} \\ {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{zz} \\ {}^{t+\Delta t} \gamma_{xy} \\ {}^{t+\Delta t} \gamma_{yz} \\ {}^{t+\Delta t} \gamma_{xz} \\ -{}^{t+\Delta t} E_x \\ -{}^{t+\Delta t} E_y \\ -{}^{t+\Delta t} E_z \end{bmatrix} \quad (12)$$

$\delta$  تغییر مجازی کوچک و دلخواه،  $v$  حجم جسم در زمان  $t$ ،  $R$  کار مجازی مربوط به نیروهای خارجی،  ${}^{t+\Delta t} \sigma$  و  ${}^{t+\Delta t} \varepsilon$  بردارهای تعمیم یافته تنش و کرنش در لحظه  $t + \Delta t$  نسبت به لحظه  $t$  است. در به دست آوردن این روابط فرض شده بارگذاری مستقل از مسیر است و بارگذاری را می توان قبل از شروع اولین نمو به دست آورد. تنها نیروی حجمی وارد شونده بر سازه نیروی دالامبر است، که به صورت  $\rho U$  تعریف می شود.  $\rho$  معرف چگالی در لحظه صفر است. لذا کار نیروهای خارجی به صورت زیر است:

$${}^{t+\Delta t} F = - \int_V \partial u^T \cdot \rho^{t+\Delta t} \ddot{U} + \int_{\Gamma} (\partial U^T \cdot {}^{t+\Delta t} P + \partial v) d\Gamma \quad (13)$$

که  $U$  بردار جابه جایی،  ${}^{t+\Delta t} P$  بردار نیروهای کشش سطحی در لحظه  $t + \Delta t$  نسبت به لحظه صفر،  $Q$

$$\hat{\sigma} = [\sigma \quad D] \quad (5)$$

$$\hat{\varepsilon} = [\varepsilon \quad -E]^T \quad (6)$$

$T$  نشان دهنده ترانسپوز ماتریس،  $\varepsilon$  ماتریس کرنش مکانیکی،  $\sigma$  ماتریس تنش ها،  $D$  بردار جابه جایی الکتریکی و در انتها  $E$  بردار میدان الکتریکی است. ماتریس سفتی  $C$ ، ماتریس تنش پیزوالکتریک  $e$  و ماتریس ثابت های دی الکتریک  $\xi$  به صورت زیر است:

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{\varepsilon\varepsilon} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{\sigma\sigma} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{\tau\tau} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} -\xi_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\xi_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\xi_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

## ۱-۲- روش لاگرانژی به هنگام برآی تیر چندلایه

در روش لاگرانژی به هنگام تمامی متغیرها نسبت به زمان  $t$  سنجیده می شوند. در اینجا با استفاده از اصل کار مجازی، روابط حاکم با در نظر گرفتن روش لاگرانژی به هنگام به دست می آید [۹]:

$$\int_V \partial^{t+\Delta t} \varepsilon^T \cdot {}^{t+\Delta t} \sigma \, dv = {}^{t+\Delta t} F \quad (10)$$

که  $\sigma$  و  $\varepsilon$  به صورت زیر است:

از اجزای محدود خطی می‌دانیم میدان، جابه‌جایی در هر المان را می‌توان بر حسب توابع شکل آن المان تقریب زد همین کار را می‌توان در مورد نمو جابه‌جایی درون المان نیز انجام داد. [۹]

$$U = N_{\xi} q^e \quad (20)$$

$U$  و  $q$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = [u \quad v]^T \quad (21)$$

$$q^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

در این روابط  $N_{\xi}$  ماتریس توابع شکل المان چهار گرهی در حالت دوبعدی است.  $q^e$  بردار جابه‌جایی گرهی است. به همین ترتیب می‌توان پتانسیل الکتریکی را برای هر المان به صورت زیر تعریف کرد:

$$V = N_v V^{(e)} \quad (23)$$

که در آن:

$$V^{(e)} = [V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4] \quad (24)$$

$$N_v = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (25)$$

در نتیجه نمو کلی برای جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{U} = \hat{N} \hat{q}^e \quad (26)$$

بار الکتریکی سطحی،  $v$  حجم اولیه جسم و  $\Gamma$  سطح اولیه جسم است که نیروهای خارجی و شرایط مرزی به آن وارد می‌شوند:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\sigma} = {}^t \hat{\tau} + {}^t \hat{\sigma} \quad (14)$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\varepsilon} = {}^t \hat{\varepsilon} + {}^t \hat{\varepsilon}^L + {}^t \hat{\varepsilon}^{NL} \quad (15)$$

$\varepsilon^L$  و  $\varepsilon^{NL}$  به ترتیب قسمت‌های خطی و غیرخطی کرنش است. با جایگذاری رابطه (۱۴) و (۱۵) و در رابطه مربوط به کار مجازی، رابطه زیر به دست می‌آید [۹]:

$$\int_V \partial_t \hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} dv + \int_V \partial_t \hat{\varepsilon}^{(NL)T} \hat{\tau} dv = - \int_V \partial_t \hat{\varepsilon}^L \hat{\tau} dv - \int_V \partial U^T \cdot \rho^{t+\Delta t} \bar{U} dv + \int_{\Gamma} (\partial U^T + {}^{t+\Delta t} P + \partial V) \quad (16)$$

به وسیله تقریب‌های زیر:

$${}^t \hat{\sigma} = {}^t \hat{C} {}^t \hat{\varepsilon}^L \quad (17)$$

$$\partial_t \hat{\varepsilon} = \partial_t {}^t \hat{\varepsilon}^L \quad (18)$$

در رابطه (۱۷)،  $C$  سفتی مماسی سازها در لحظه  $t$  در دستگاه مختصات کلی است. در روش لاگرانژی به‌هنگام، میدان جابه‌جایی در لحظه  $t + \Delta t$  را می‌توان بر حسب جابه‌جایی در لحظه  $t$  و مقدار نمو آن تجزیه کرد:

$${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + U \quad (19)$$

${}^t U$  جابه‌جایی در لحظه  $t$  و  $U$  نمو آن است. در این بخش هدف آن است که فرمول‌بندی به‌دست آمده را برای المان دو بعدی با چهار گره گسترش دهیم. همان‌طور که

که در رابطه (۳۳)،  ${}^t G$  و  $\Theta$  به صورت زیر است:

$${}^t G = \begin{bmatrix} {}^t N_{1,x} & \cdot & \dots & {}^t N_{i,x} & \cdot \\ \cdot & {}^t N_{1,x} & \dots & \cdot & {}^t N_{i,x} \\ {}^t N_{1,y} & \cdot & \dots & {}^t N_{i,y} & \cdot \\ \cdot & {}^t N_{1,y} & \dots & \cdot & {}^t N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_x & \cdot \\ \cdot & \theta_y \\ \theta_y & \theta_x \end{bmatrix} \quad (36)$$

که آن:

$$\theta_x = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (37)$$

$$\theta_y = \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

با جایگذاری روابط مربوط به قسمت‌های خطی و غیرخطی کرنش در اصل کار مجازی، معادله تعادل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$({}^t \hat{K}^{L(e)} + {}^t \hat{K}^{NL(e)}) q = r - f \quad (38)$$

$${}^t \hat{K}^{L(e)} = \int_{V^{(e)}} {}^t B^{(L)T} {}^t C {}^t B^{(L)} dv \quad (39)$$

$${}^t \hat{K}^{NL(e)} = \int_{V^{(e)}} [{}^t G^T \Lambda {}^t G] dv \quad (40)$$

$$r = \int_{\Gamma^{(e)}} \hat{N} \{ {}^{t+\Delta t} P \} d\Gamma \quad (41)$$

$$f = \int_{V^{(e)}} {}^t B^{LT} {}^t \tau dv \quad (42)$$

$\hat{\tau}$  تانسور مربوط به تنش کوشی است که از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\hat{U} = [U \quad V]^T \quad (27)$$

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} \hat{N}_i & \cdot \\ \cdot & N_V \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$q^e = [q^{(e)} \quad V^{(e)}] \quad (29)$$

به همین ترتیب می‌توان بردارهای کرنش را به صورت ترکیبی بیان کرد. بردار تعمیم یافته کرنش بر حسب نمو جابه‌جایی به صورت زیر است:

$${}^t \varepsilon^{(l)} = {}^t B^{(L)} q^{(e)} = \begin{bmatrix} {}^t B^{(L)} & 0 \\ 0 & {}^t B_V^{(L)} \end{bmatrix} q^{(e)} \quad (30)$$

که،  ${}^t B^{(L)}$  و  ${}^t B_V^{(L)}$  به صورت زیر در می‌آید:

$${}^t B^{L} = \begin{bmatrix} {}^t N_{1,x} & \cdot & \dots & {}^t N_{i,x} & \cdot \\ \cdot & {}^t N_{1,y} & \dots & \cdot & {}^t N_{i,y} \\ {}^t N_{1,y} & {}^t N_{1,x} & \dots & {}^t N_{i,y} & {}^t N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$${}^t B_V^{L} = \begin{bmatrix} {}^t N_{1,x} & \dots & {}^t N_{i,x} \\ {}^t N_{1,y} & \dots & {}^t N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (32)$$

در رابطه (۳۱) مشتقات جزئی به صورت زیر تعریف میشوند:

$${}^t N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad (33)$$

$${}^t N_{i,y} = \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

برای به دست آوردن قسمت غیرخطی کرنش می‌توان ماتریس تبدیلی را به صورت زیر به دست آورد تا با استفاده از آن بتوان قسمت غیرخطی کرنش را به دست آورد:

$${}^t \varepsilon^{(n)} = {}^t B^{(n)} q^{(e)} = \begin{bmatrix} 1/2 {}^t \Theta {}^t G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q^{(e)} \quad (34)$$

### ۳- بحث و بررسی

#### ۳-۱- تیر چندلایه بدون لایه پیزوالکتریک

تیر یک سر گیردار با طول ۱۰۰ میلی متر و ضخامت ۱ میلی متر و پهنای ۵ میلی متر از دو لایه با جنس های گرافیت اپوکسی<sup>۱</sup> و گلاس اپوکسی<sup>۲</sup> برای تحلیل در نظر گرفته شده است. این تیر در شکل ۱ نشان داده شده است. برای تحلیل از دو ردیف المان که به هر یک خواص یکی از مواد نسبت داده شده استفاده می شود. نیروی ۵ نیوتنی مطابق شکل ۱ به انتهای تیر وارد می شود. با توجه به طبیعت تحلیل غیرخطی، این نیرو در ۵ مرحله به تیر وارد می شود. نتایج در هر مرحله از بارگذاری در جدول ۱ آورده شده است.

همچنین برای مقایسه حل غیرخطی با حل خطی، تیر تحت بارگذاری های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ نیوتن، به طور جداگانه تحلیل استاتیکی خطی و غیرخطی شده و نتایج در جدول های ۲ و ۳ آورده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول های ۲ و ۳ تفاوت تحلیل خطی و غیرخطی کاملاً مشهود است. تحلیل غیرخطی مقادیر کمتری را برای جابه جایی انتهای آزاد تیر پیش بینی می کند، که این به دلیل افزایش تدریجی سفتی سازه در مراحل اعمال نیرو در تحلیل غیرخطی است. این تفاوت با افزایش بارگذاری افزایش می یابد. در شکل ۲ تفاوت تحلیل خطی و غیرخطی تحت بار ۵ نیوتن نمایش داده شده است. در این شکل نیز تفاوت تحلیل خطی و غیرخطی، ناشی از در نظر گرفتن جملات مرتبه دوم در جمله های کرنش در تحلیل غیرخطی، مشخص است. در شکل ۳ جابه جایی عمودی بر حسب تغییرات طول تیر در هر مرحله از بارگذاری برای نیروی ۵ نیوتنی تحت تحلیل غیرخطی نشان داده شده است.

$${}^t \Lambda = \begin{bmatrix} {}^t \tau_{11} I & {}^t \tau_{12} I \\ {}^t \tau_{21} I & {}^t \tau_{22} I \end{bmatrix} \quad (43)$$

در این رابطه  $I$  ماتریس یکه  $(2 \times 2)$  است. با ترکیب کردن ماتریس های مربوط به المانها در دستگاه مختصات کلی، شکل کلی معادلات حرکت به صورت زیر است به دست می آید:

$$({}^t \hat{K}^L + {}^t \hat{K}^{NL}) \hat{U} = {}^{t+\Delta t} \hat{r} - {}^{t+\Delta t} \hat{f} \quad (44)$$

در ادامه روش حل المان محدود غیرخطی که در این مقاله برای کدنویسی از آن استفاده شده آورده می شود.

۱- در شروع، اطلاعات مربوط به هندسه و مواد مسأله وارد می شوند.

۲- ماتریس سفتی خطی که در تمامی مراحل تحلیل ثابت است، تشکیل داده می شود.

۳- با توجه به مراحل، بارگذاری نیرو به چند قسمت تقسیم می شود. و ماتریس نیروی خارجی  $f$  در مرحله جاری تشکیل می شود.

۴- ماتریس سفتی غیرخطی که در مراحل تحلیل مقدارش تغییر خواهد کرد، تشکیل داده می شود.

۵- ماتریس نیروهای داخلی  $r$  تشکیل می شود.

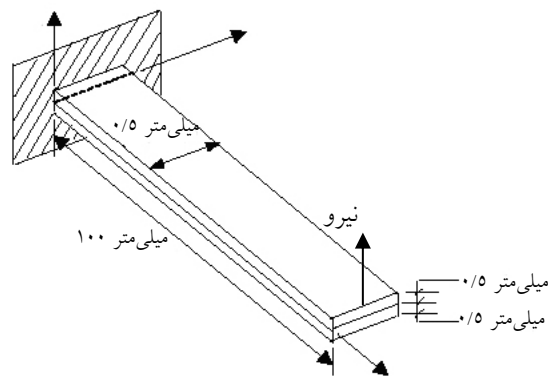
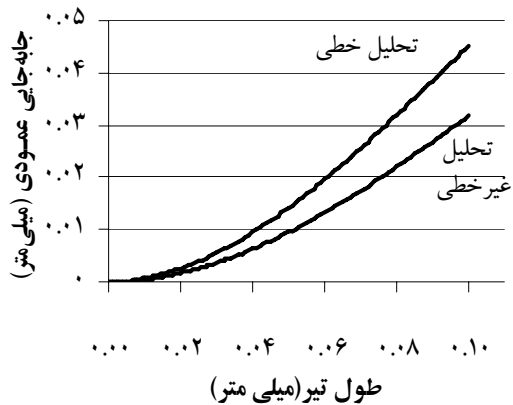
۶- معادله  $(K_L + K_{NL})U = r - f$  حل می شود.

۷- در صورت همگرایی، جابه جایی به دست آمده از مرحله ۷ با جابه جایی های به دست آمده از تکرارهای قبلی جمع می شود سپس به مرحله ۹ می رویم. در غیر این صورت جابه جایی به دست آمده از مرحله ۷ با جابه جایی های به دست آمده از تکرارهای قبلی جمع می شود. سپس به مرحله ۴ می رویم.

۸- اگر بارگذاری کامل شده است، تحلیل پایان

می یابد. در غیر این صورت به مرحله ۳ می رویم.

1. Graphit-Epoxy  
2. Glass-Epoxy

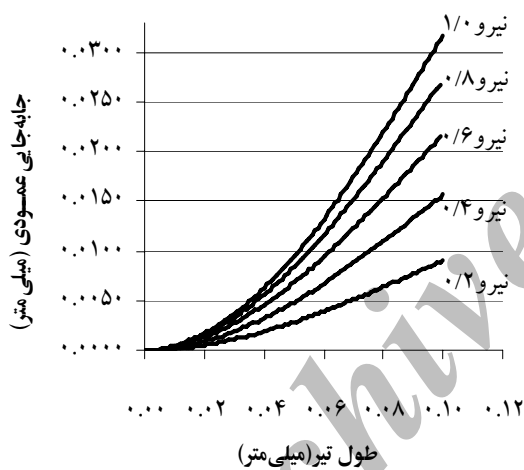


شکل ۱ تیر دو لایه گرافیت اپوکسی - گلاس اپوکسی

شکل ۲ تفاوت جابه‌جایی عمودی تیر گرافیت اپوکسی - گلاس اپوکسی در تحلیل خطی و غیر خطی

جدول ۱ جابه‌جایی عمودی سر آزاد تیر در مراحل مختلف بارگذاری

جاب‌جایی (میلی متر)	نیرو (نیوتن)	جنس
۰/۰۰۹۷	۱	گرافیت اپوکسی و گلاس اپوکسی
۰/۰۱۸۱	۲	
۰/۰۲۷۱	۳	
۰/۰۳۶۱	۴	
۰/۰۴۲۵	۵	



جدول ۲ تحلیل غیر خطی تحت بارگذاری‌های مختلف

جاب‌جایی (میلی متر)	نیرو (نیوتن)	جنس
۰/۰۰۹۷	۱	گرافیت اپوکسی و گلاس اپوکسی
۰/۰۱۸۱	۲	
۰/۰۲۷۱	۳	
۰/۰۳۶۱	۴	
۰/۰۴۲۵	۵	

شکل ۳ جابه‌جایی در جهت عمودی تیر گرافیت اپوکسی - گلاس اپوکسی

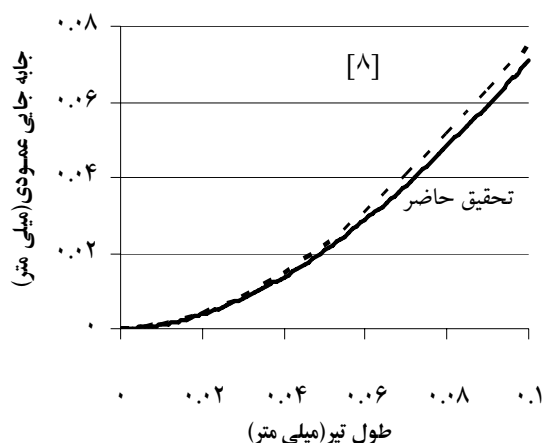
جدول ۳ تحلیل خطی تحت بارگذاری‌های مختلف

جاب‌جایی (میلی متر)	مرحله بارگذاری
۰/۰۰۹۷	۱
۰/۰۱۵۷	۲
۰/۰۲۱۵	۳
۰/۰۲۶۸	۴
۰/۰۳۱۷	۵

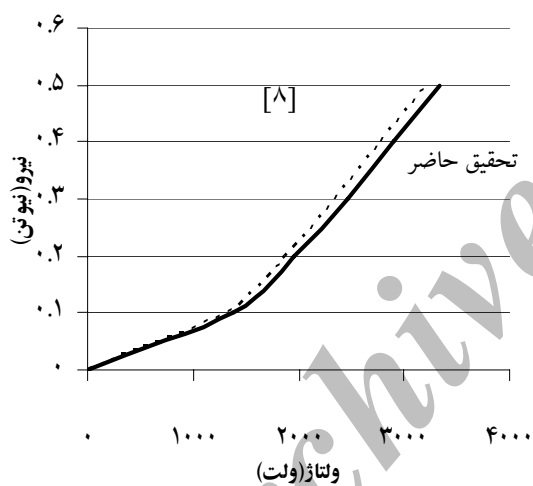
### ۳-۲- تیر دولایه پیزوالکتریک

تیر یک سرگیردار با طول ۱۰۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ میلی‌متر و پهنا ۵ میلی‌متر از جنس پی‌وی‌دی‌اف<sup>۱</sup>، برای تحلیل استاتیکی با تغییر شکل بزرگ در نظر گرفته شده

1. PVDF



شکل ۴ مقایسه جابه‌جایی تحقیق حاضر با [۸]



شکل ۵ مقایسه ولتاژ غیر خطی تحقیق حاضر با [۸]

جدول ۵ نتایج تحلیل غیرخطی تیر پیزوالکتریک مربوط به [۸]

ولتاژ سرگردار (ولتاژ)	جابه‌جایی سر آزاد (میلی‌متر)	نیرو (نیوتن)	جنس
۳۲۰۰	۰/۰۷۵	۰/۵	پی وی دی اف- پی وی دی اف

است. هندسه تیر مشابه تیر قسمت قبل است. نیرویی مانند قسمت قبل اما به مقدار ۰/۵ نیوتن به انتهای تیر وارد می‌شود. برای حل این مثال از ۲۰۰ المان در دو ردیف روی هم استفاده شده که هر المان دو درجه آزادی جابه‌جایی و یک درجه آزادی الکتریکی دارد. با توجه به طبیعت تحلیل غیرخطی، این نیرو در ۵ مرحله به تیر وارد می‌شود. نتایج حاصل از تحلیل حاضر که به ترتیب در جدول ۴ و شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده، با نتایج [۸] مقایسه شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در [۸] که به صورت جدول ۵ نیز ارائه شده، می‌توان هماهنگی و مطابقت بسیار خوبی را که نشان‌دهنده کارایی روش حاضر است، مشاهده کرد. لازم است ذکر شود که در [۸] تیر با شرایط کاملاً یکسان اما با روشی متفاوت و با به‌کارگیری معادلات ون-کارمن، تحلیل استاتیکی غیرخطی شده است. همانطور که در شکل ۶ نشان داده شده، در اینجا نیز تحلیل غیرخطی مقادیر کمتری را برای جابه‌جایی انتهای آزاد تیر پیش‌بینی می‌کند. این به دلیل افزایش تدریجی سفتی سازه در مراحل اعمال نیرو در تحلیل غیرخطی است. در شکل ۷ می‌توان حساسیت پاسخ ولتاژی تیر پیزوالکتریک دولایه را برای دو حالت تحلیل غیرخطی و خطی مشاهده کرد. به‌خوبی مشهود است که تحلیل غیرخطی مانند جابه‌جایی باعث ایجاد ولتاژ کمتری نسبت به تحلیل خطی می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده اثرپذیری ولتاژ از تغییر شکل‌های بزرگ است.

جدول ۴ نتایج تحلیل غیرخطی تیر پیزوالکتریک

ولتاژ سرگردار (ولتاژ)	جابه‌جایی سر آزاد (میلی‌متر)	نیرو (نیوتن)	جنس
۳۳۳۶	۰/۰۷۸	۰/۵	پی وی دی اف- پی وی دی اف



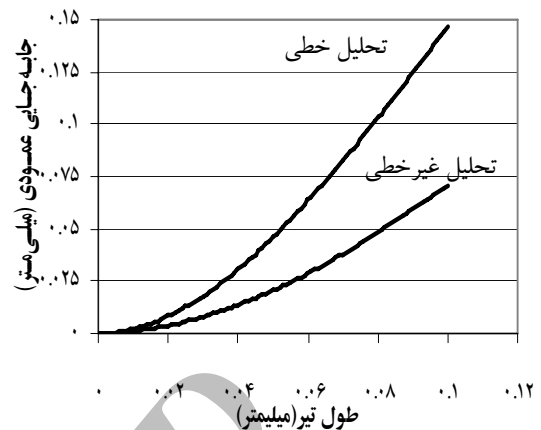
پی وی دی اف و گرافیت اپوکسی برای تحلیل استاتیکی با تغییر شکل بزرگ در نظر گرفته شده است. نیروی ۰/۵ نیوتنی به انتهای تیر وارد می شود. برای حل این مثال از دو ردیف المان که روی هم قرار گرفته، در مجموع شامل ۲۰۰ المان، استفاده شده است. هر المان علاوه بر دو درجه آزادی جابه جایی، یک درجه آزادی الکتریکی نیز دارد. با توجه به طبیعت تحلیل غیرخطی، این نیرو در ۵ مرحله به تیر وارد می شود. نتایج تحلیل غیرخطی در جدول ۶ آورده شده است. همچنین نتایج مربوط به تحلیل غیرخطی در هر مرحله در شکل ۸ آورده شده است. نتایج تحلیل در دو حالت خطی و غیرخطی در شکل ۹، نمایانگر مقادیر کمتر در تحلیل غیرخطی نسبت به تحلیل خطی است. این به دلیل افزایش تدریجی سفتی سازه در مراحل اعمال نیرو در تحلیل غیرخطی است. در مورد ولتاژ نیز همان طور که در شکل ۱۰ نشان داده شده، تحلیل غیرخطی مانند جابه جایی، باعث ایجاد ولتاژ کمتری نسبت به تحلیل خطی می شود. در این مورد نیز شاهد اثرپذیری ولتاژ از تغییر شکل های بزرگ هستیم.

جدول ۶ نتایج تحلیل غیرخطی تیر کامپوزیت - پیزوالکتریک

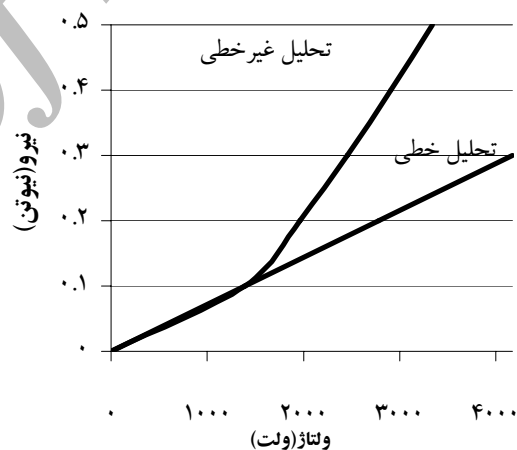
جنس	نیرو (نیوتن)	جابه جایی سر آزاد (میلی متر)	ولتاژ سر گیردار (ولتاژ)
پی وی دی اف - گرافیت اپوکسی	۰/۵	۰/۰۱۱۴	۵۱۲

جدول ۷ نتایج تحلیل خطی تیر کامپوزیت - پیزوالکتریک

جنس	نیرو (نیوتن)	جابه جایی سر آزاد (میلی متر)	ولتاژ سر گیردار (ولتاژ)
پی وی دی اف - گرافیت اپوکسی	۰/۵	۰/۰۱۵۶	۷۴۲/۵۶



شکل ۶ تفاوت جابه جایی در تحلیل خطی و غیرخطی برای تیر پیزوالکتریک



شکل ۷ مقایسه ولتاژ خطی و غیرخطی تیر

### ۳-۳ تیر دولایه شامل یک لایه پیزوالکتریک و یک لایه ماده مرکب

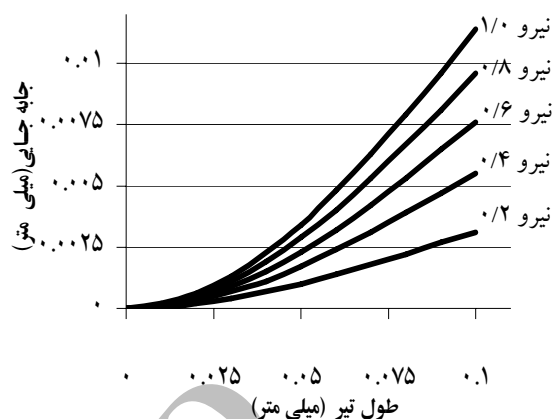
در این مثال یک تیر یک سر گیرداری با طول ۱۰۰ میلی متر و ضخامت ۱ میلی متر و پهنای ۵ میلی متر، با هندسه مشابه دو قسمت قبل، با دو لایه از جنس های

### ۳-۴- نتیجه گیری

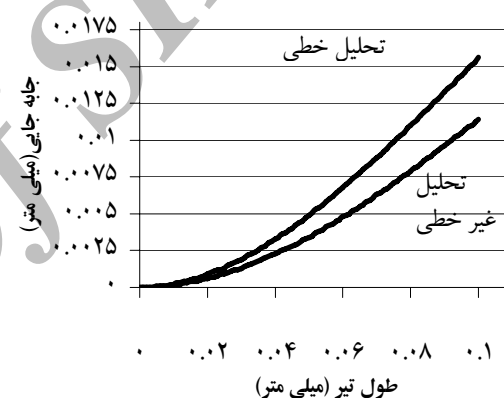
در این مقاله، نتایج تحلیل غیرخطی استاتیکی و خطی استاتیکی تیرهای چندلایه فاقد پیزوالکتریک، دو لایه کاملاً پیزوالکتریک و دو لایه که یک لایه پیزوالکتریک و لایه دیگر مواد مرکب باشد، ارائه شده است. با استفاده از روش لاگرانژی به‌هنگام و کدنویسی در متلب، نتایج برای حالت‌های فوق به‌صورت منحنی‌ها و جدول‌ها آورده شده است. با استفاده از تحلیل غیرخطی حاضر به‌خوبی می‌توان رفتار تیرها را تحت بارهای استاتیکی مطالعه نمود. همچنین با استفاده از روش تحلیل غیرخطی به‌کار گرفته شده به‌خوبی می‌توان نشان داد که تحلیل غیرخطی جابه‌جایی‌های کمتری را در مقایسه با تحلیل خطی به‌دست می‌دهد. در مورد ولتاژ نیز تحلیل غیرخطی نسبت به تحلیل خطی مفادیر کمتری را پیش‌بینی می‌کند که ناشی از افزایش تدریجی سفتی سازه در مراحل اعمال نیرو در تحلیل غیرخطی است. این موضوع نشان‌دهنده آن است که پیزوالکتریک‌ها با در نظر گرفتن تحلیل غیرخطی در مقایسه با تحلیل خطی، رفتار دقیق‌تری را به‌عنوان حسگر از خود نشان می‌دهند. نکته قابل توجه دیگر، اختلاف کمتر بین تحلیل غیرخطی و تحلیل خطی در تیر پی وی دی اف - گرافیت اپوکسی نسبت به تیر پی وی دی اف - پی وی دی اف، تحت شرایط هندسی و بارگذاری یکسان است، که این نشان‌دهنده آن است که هر چه از انعطاف‌پذیری سازه کاسته شود، تفاوت پاسخ‌های خطی و غیرخطی کاهش می‌یابد.

### ۴- منابع

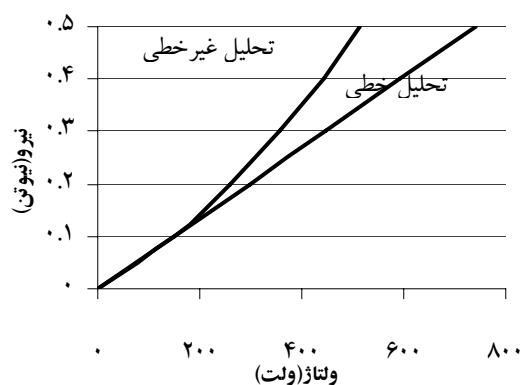
- [1] E. F. Crawley., J. deLuis, Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures, AIAA J,(1987); pp 1373-1385.



شکل ۸ جابه‌جایی در جهت عمودی تیر کامپوزیت پیزوالکتریک



شکل ۹ تفاوت تحلیل خطی و غیرخطی در محاسبه جابه‌جایی انتهای آزاد تیر کامپوزیت پیزوالکتریک



شکل ۱۰ مقایسه ولتاژ خطی و غیرخطی در تیر کامپوزیت پیزوالکتریک

- [7] Icardi U., Sciuva. , Large- deformations and stress analysis of multilayered plates with induced-strain actuators, *J Smart Mater Struct*; (1996); pp 140-64.
- [8] Mukherjee A., Saha Chaudhuri., A Piezolaminated beams with large deformations., *Int J Solids Struct*; (2002); pp 4567-82.
- [9] Sung Yi. , Shih Fu Ling. , Ming Ying., Large deformation finite element analyses of composite structures integrated with piezoelectric sensors and actuators, *Finite Elements in Analysis and Design* 35,2000;pp 1104-1114.
- [10] Mukherjee A., Saha Chaudhuri. , nonlinear dynamic response of piezolaminated smart beams, *Computers and Structures* 83, 2005; pp 1304-1298.
- [11] You-He Zhou., Jizeng Wang. , vibration control of piezoelectric beam-type plates with geometrically nonlinear deformation, *International Journal of non-Linear Mechanics* 39, 2005; pp 909-920.
- [2] S. Im., S. N. Atluri., Effects of a piezo-actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading, *AIAA J*,(1989); pp 1801-1807.
- [3] C. K. Lee. , Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators Part I governing equations and reciprocal relationships, *J. Acoust. Soc. Amer.*; (1990); pp 1144-1158.
- [4] R. C. Batra. , X. Q. Liang. , vibration of a rectangular laminated elastic plate with embedded piezoelectric sensors and actuators, *Comput. Struct*, (1990); pp 203-216.
- [5] H. S. Tzou. , M. Gadre. , Theoretical analysis of a multi-layered thin shell coupled with piezoelectric shell actuators for distributed vibration controls, *J. Sound and vibration*, (1989); pp 433-450.
- [6] R. bay. , The application of a finite shell element for composites containing piezoelectric polymers in vibration control, *J Compute Struct*, (1991); pp 1101-1109.