مهندسی مکانیک مدرس دوره ۱۰، شماره ٤، زمستان ۱۳۸۹ صص ۱۳–۲۱ (دریافت مقاله: شهریور ۱۳۸۷، پذیرش مقاله: بهمن ۱۳۸۹)



## حل کلی استوانههای جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریهٔ تغییرشکل برشی

مهدی قنّاد<sup>۱</sup>، غلامحسین رحیمی<sup>۲\*</sup>، سیامک اسماعیلزاده خادم<sup>۳</sup> ۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس ۲- دانشیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس ۳- استاد بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس ۴- تهران، صندوق پستی ۱۴۳– ۱۴۱۱۵ ۱۴۲۱ rahimi\_gh@modares.ac.ir

چکیده- در این مقاله با استفاده از تغییرشکل برشی مرتبه اول(FSDT)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانههای جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG در حالت کلی استخراج شده و سپس جابهجایی شعاعی و تنش بیشینه برای استوانهای با دو سر بسته و مقیّد، بهصورت تحلیلی بهدست آمده است. جابهجایی و تنش، بهازای تغییرات ضرایب ناهمگنی مطالعه شده و با حالت استوانه جدار ضخیم همگن مقایسه و نتایج، با نتایج نظریهٔ الاستیسیتهٔ مستوی(PET) مقایسه و شباهتها نشان داده شده است. جنس استوانه، مادة ناهمگن و همسانگردی با تغییرات مدول الاستیسیته در راستای شعاعی بهصورت توانی و با نسبت پواسون ثابت است. کلیدواژگان: استوانهٔ جدار ضخیم، مادة ناهمگن FG، نظریه تغییرشکل برشی.

## General Solution of Shear Deformation of Axisymmetric Functionally Graded Thick Cylinderical Shells

#### M. Ghannad<sup>1</sup>, G. H. Rahimi<sup>2\*</sup>, S. Esmaeilzadeh Khadem<sup>3</sup>

Ph.D. Student of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
 Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
 Prof. of Mechanical Eng. Dept., Tech. and Eng. Faculty, Tarbiat Modarres Univ.
 \*P.O.Box 14115-143, Tehran, Iran rahimi\_gh@modares.ac.ir

**Abstract-** In this paper, an analytical formulation of FGM axisymmetric thick-walled cylinders, based on the first shear deformation theory (FSDT) is presented. The displacements and maximum stress in thick cylindrical shells are calculated. Solutions are obtained under generalized plane strain assumptions. It is assumed that the material is isotropic and heterogeneous with constant Poissn's ratio and radially varying elastic modulu. The results have been compared with findings of the plane elasticity theory (PET). **Keywords:** Thick-Walled Cylinder, FGM, Plane Elasticity.

#### مهدی قناد و همکاران

اســـتوانههـای دایـروی و در ۱۹۸۶[۷] ارتعـاش آزاد

پوسته های مخروطی ساخته شده از مواد همگن و

همسانگرد را با استفاده FSDT بررسی و به کمک سـری

فربینیوسآن را حل کردند. ایپکچی و همکاران در

۲۰۰۳[۸] معادلات استوانههای همگن و همـسانگرد بـا

جدار متغیّر را با استفاده از FSDT استخراج و به کمک

لخنيتسكي ' در ١٩٥٠ [٩] نظريه الاستيسيتة اجسام

مرکب<sup>۱۱</sup> را فرمولبندی کرد. در پوستههای ساخته شده

از مواد مرکب بهدلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده یا

ترکیب دو مادهٔ ناهمساز در کنار یکدیگر و درنتیجه

تغییر ناگهانی در رفتار مواد تمرکز تنش و گسستگی در

مرز لايهها ايجاد مى شود. مواد پيشرفته با تغييرات

پیوسته خواص(مکانیکی، حرارتی، مغناطیسی) یا

<sup>۱۲</sup> توسط نینو<sup>۱۳</sup> و همکاران در ۱۹۸۴ مطرح [۱۰]

و بهدنبال آن مطالعات تحلیلی قابل توجهی در سالهای

نخستین قرن جدید بر روی سازه های ساخته شده از

فوکویی و یاماناکا<sup>۱۴</sup> در ۱۹۹۲[۱۱] روابط الاستیک

حاکم بر لولههای جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی

را به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را بهروش

عددی رانگ-کوتا حل کردند. هورگان و چان<sup>۱۵</sup> در

Ingen [11] معادلات حاکم بر استوانه توخالی FGM را

در حالت کرنش صفحهای با توزیع توانی مدول

الاستیسیته در راستای شعاعی به کمک معادلات لامه

استخراج کردند و توزیع تنش را بدست آوردند.

توتونچو و اُزترک<sup>۶</sup> در ۲۰۰۱[۱۳] حل دقیق مخازن

تحت فشار استوانهای و کروی جدار ثابت FGM را ارائه

کردند. در مقاله ایشان رابطه و کردار تـنش محیطے و

این مواد در نقاط مختلف جهان انجام شد.

نظریه اغتشاشها<sup>۹</sup> حل کردند.

#### ۱- مقدمه

پوستهها بهطور کلّی، سازههای خمیده هستند که در برابر نیروها و لنگرها، مقاومت مطلوب ویژهای دارند. مطالعهٔ رفتار و به کارگیری نظریههای مختلف از گذشتهای نهچندان دور مورد توجّه پژوهشگران قرار گرفته و بهدلیل کاربرد فراوان، این توجه همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوستهها، پوستههای استوانهای، اهمّیت ویژهای دارند و همواره پژوهشگران در پی اعمال تغییراتی بر روی جدار و مادهٔ این پوستهها بودهاند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر بارگذاریها افزایش و وزن آنها را کاهش دهند.

لامه نخستین بار در سال ۱۸۵۲ [۱] با استفاده از نظرية الاستيسيتة مستوى، حل دقيق استوانههاي ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مادهٔ همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخـت را ارائـه کـرد و توزیـع تنش و جابهجایی را در استوانههای توخالی بهدست آورد که آن در حل مسایل مختلف مهندسی استفاده شـده و در کتـب درسـی گنجانیـده شـد. نقـدی<sup>۳</sup> در ۱۹۵۶[۲] با در نظر گرفتن اثر برش عرضی، نظریه تغییرشکل برشی را پایه گذاری کرد. میرسکی و هرمان ٔ در ۱۹۵۸[۳] با به کار گیری نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، حل یوستههای استوانهای ضخیم از مواد همگــن و همــسانگرد را ارائــه کــرد. گــرینس.یــن<sup>²</sup> در ۱۹۶۰[۴] مقایسهای بین نتایج روش های مختلف تحلیل یوسته های استوانه ای انجام داده است. زیو و یرل<sup>۷</sup> در ۱۹۷۳[۵] با به کارگیری نظریه میرزسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، یاسخ ارتعاشی یوستههای استوانهای نیمه بلند را بهدست آوردند. سروزوکی و تاکاهاشیے ^ در ۱۹۸۱ [۶] ارتعیاش آزاد

<sup>9.</sup> Perturbation Theory

 <sup>10.</sup> Lekhnitskii
 11. Composite Bodies

<sup>12.</sup> Functionally Graded Materials

<sup>13</sup> Niino

<sup>14.</sup> Fukui & Yamanaka

<sup>15.</sup> Horgan & Chan

<sup>16.</sup> Tutuncu & Ozturk

<sup>1.</sup> Lamé

<sup>2.</sup> Plane Elasticity Theory(PET)

Naghdi

 <sup>4.</sup> Mirsky & Hermann
 5. First-Order Shear Deformation Theory(FSDT)

<sup>6.</sup> Greenspon

<sup>7.</sup> Ziv & Perl

<sup>8.</sup> Suzuki & Takahashi

دورهٔ دهم، شمارهٔ ٤/ زمستان ۱۳۸۹

همچنان راست و عمود باقی بمانند و جابه جایی هر نقطه از پوسته، جابه جایی صفحه میانی در نظر گرفته می شود. در این نظریه نیز از کرنش برشی و تنش برشی چشم پوشی می شود. در نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییر شکل، راست باقی می مانند اما الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفتن می شود.

مطابق شکل ۱، فاصله هر نقطه از پوسته از محور تقارن (r)، برابر است با مجموع شعاع صفحه میانی(R) و فاصلهٔ آن نقطه از صفحهٔ میانی(z).

$$r = R + z$$
  $g - \frac{h}{r} \le z \le + \frac{h}{r}$  (1)

h ضخامت و L طول استوانه است.

$$h = r_{o} - r_{i} \quad \text{,} \quad 0 \le x \le L \tag{7}$$

براساس نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، جابهجایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_r}{r} = C_1 (R+z) + \frac{C_r}{R+z}$$
(\*)  

$$u_r = C_1 r + \frac{C_r}{r} = C_1 (R+z) + \frac{C_r}{R+z}$$

$$(*)$$

$$\begin{split} u_{r} &= C_{\gamma}(R+z) + \frac{C_{\gamma}}{R} \left( \gamma - \frac{z}{R} + \frac{z^{\gamma}}{R^{\gamma}} - \frac{z^{\gamma}}{R^{\gamma}} + \dots \right) \\ &= \left( C_{\gamma}R + \frac{C_{\gamma}}{R} \right) + \left( C_{\gamma} - \frac{C_{\gamma}}{R^{\gamma}} \right) z + \frac{C_{\gamma}}{R^{\gamma}} z^{\gamma} + \dots \end{split}$$
(f)  
 
$$: c_{\gamma} z_{\gamma} z_{$$

$$u_r = u_0 + u_y z + u_y z^y + \dots$$
 ( $\Delta$ )

براساس رابطهٔ (۵) جابهجایی شعاعی استوانه را بهصورت چندجملهای برحسب z میتوان نوشت. اگر =۰ باشد، جابهجایی صفحهٔ میانی داریم. کردار تنش شعاعی دچار اشتباه شده است. جبّاری و همکاران در ۲۰۰۲[۱۹] تنشهای مکانیکی و حرارتی در استوانه توخالی تحت بارهای متقارن ودر ۲۰۰۳[۱۵] تحت بارهای پایدار نامتقارن محوری را با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی ارائه کردند. ژیفای و هونگجون<sup>۱</sup> در ۲۰۰۶[۱۶] حل دقیق استوانههای توخالی با تغییرات خطی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با لایههای همگن ارائه کردند. ایشان در بمورت خطی و توانی، استوانه FGM را با روش چند لایهای کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو(۲۰۰۱) مقایسه کردند. توتونچو در ۲۰۰۲[۱۸] مشابه مقاله پیشین اما با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته مقایسه کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو(۲۰۰۱)

قنّاد و همکاران در ۲۰۰۸ [۱۹] حل کلی استوانههای جدار ضخیم متقارن محوری FGM را برمبنای نظریه الاستیسیتۀ مستوی بهازای ریشههای حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحهای، کرنش صفحهای و استوانه بسته ارائه و اشتباه مقاله [۱۳] را تصحیح کردند. در مقاله حاضر با استفاده از FSDT، حل کلی استوانههای جدار ضخیم FGM متقارن محوری تحت فشار یکنواخت داخلی ارائه می شود.

۲- روابط اساسی

در نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، فرض میشود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییرشکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی میمانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته نمیشود. در نظریه کلاسیک پوستههای نازک، فرض میشود که خطوط راست و عمود بر صفحه میانی، پس از تغییرشکل،

<sup>1.</sup> Zhifei & Hongjun

حل کلی استوانه های جدار ضخیم متقارن محوری ...

مدول یانگ و  $r_i$  شعاع در سطح داخلی استوانه و  $E_i$ n ثابت ناهمگنی مادہ است کے n=0 یعنے مادہ همگن است. r = R + z را در رابطهٔ (۸) قرار می دهیم:  $E(z) = E_i \left(\frac{R+z}{r_i}\right)^n = \frac{E_i}{r_i^n} (R+z)^n$ (٩) تنشها براساس روابط رفتاری<sup>۲</sup> برای مواد ناهمگن و همسانگرد عبارتند از:  $\left| \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{matrix} \right\} = \frac{E(z)}{(1+\nu)(1-\gamma\nu)} \begin{matrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{matrix} \right| \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{matrix} \right\}$  $\tau_{xz} = \frac{E(z)}{\gamma(1+\nu)} \gamma_{xz}$  $(1 \cdot)$ و به شکل خلاصهتر:  $\left[\sigma_{i} = \lambda E(z) \left[(1-v)\varepsilon_{i} + v(\varepsilon_{j} + \varepsilon_{k})\right]\right]$  $\left\{ \tau_{xz} = \frac{1 - \Upsilon V}{\Upsilon} \lambda E(z) \gamma_{xz} \right\}$  $\left| \lambda = \frac{1}{(1+V)(1-YV)} \right|$ ب منتجههای تنش برابرند با: محورى برحد  $\begin{cases} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{cases} = \int_{-h/r}^{h/r} \begin{cases} \sigma_x \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \end{cases} dz$ (١٢ - الف) ی برحسب منتجههای تنش برابرند با: لنگرهای  $\begin{cases} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{cases} = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \begin{cases} \sigma_x \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_\theta \\ \sigma(1 + \frac{z}{R}) \end{cases} z dz$ (۱۲ - ب)

 $\int_{V_{x}}^{V_{x}} \frac{1}{P} \left( \int_{V_{x}}^{V_{x}} \frac{1}{P} \left( \int_{V_{x}}^{V_{x}} \frac{1}{P} \left( \int_{V_{x}}^{V_{x}} \frac{1}{P} \left( \int_{V_{x}}^{V_{x}} \frac{1}{P} \right) \right) \right)$   $\frac{1}{P} \left( \int_{V_{x}}^{V_{x}} \frac{1}{P} \left( \int_{V_{x}}^{V_{x}} \frac{1}{P$ 

و کرنشها براساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dx}z \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r} = \frac{w}{R+z} + \frac{\psi}{R+z}z \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \psi \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \left(\phi + \frac{dw}{dx}\right) + \frac{d\psi}{dx}z \end{cases}$$
(Y)

$$E(r) = E_i \overline{r}^n = E_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^n \quad \mathfrak{g} \quad \overline{r} = \frac{r}{r_i} \tag{A}$$

2. Constitutive Equations

1. Axisymmetric

$$\delta W = \int_{-\infty}^{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{L} P \,\delta U_z \left( R - \frac{h}{\gamma} \right) dx d\theta$$
$$\Rightarrow \frac{\delta W}{\gamma \pi} = P R \int_{-\infty}^{L} \delta U_z \left( \gamma - \frac{h}{\gamma R} \right) dx \tag{1A}$$

با جایگذاری کرنشهای رابطه (۷) در روابط (۱۷) و (۱۸) و نیز با بهکارگیری اصول حساب وردشی<sup>۲</sup> و اصل کار مجازی داریم:

$$\begin{split} \frac{\delta U}{\tau \pi} &= \frac{\delta W}{\tau \pi} \\ \begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} &= \cdot \\ R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x &= \cdot \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta &= -PR\left(\gamma - \frac{h}{\gamma R}\right) \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z &= PR \frac{h}{\gamma} \left(\gamma - \frac{h}{\gamma R}\right) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1-19) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1-19) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1-19) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1-19) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1-19) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi\right]_0^L &= 0 \\ (1) \\ R \left[N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_x \delta \phi + Q_x \delta \psi + Q_x \delta w + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_x \delta \phi + Q_x \delta \psi + Q_x \delta \psi$$

نیروی برشی برحسب تنش برشی برابر است با:  

$$Q_x = \int_{-h/r}^{h/r} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$
  
 $Q_x = \int_{-h/r}^{h/r} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$   
 $M_{xz} = \int_{-h/r}^{h/r} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz$   
 $M_{xz} = \int_{-h/r}^{h/r} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz$   
براساس اصل کار مجازی<sup>1</sup>، تغییرات انرژی کرنـشی با  
 $J_x = \delta W$  (1۳)

انرژی کرنشی:  

$$U = \iiint_{V} U^{*} dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz$$

$$U^{*} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{x}\varepsilon_{x} + \sigma_{\theta}\varepsilon_{\theta} + \sigma_{z}\varepsilon_{z} + \tau_{xz}\gamma_{xz}}}$$
(14)

$$W = \iint_{S} \left( \overrightarrow{f \cdot u} \right) dS = r_{i} d\theta dx = (R - \frac{h}{\gamma}) d\theta dx$$
$$\overrightarrow{f \cdot u} = PU_{z}$$
(10)

انتگرالگیری در محدوده زیر انجام میشود:

$$0 \le x \le L$$
 و  $\frac{h}{r} \le z \le \frac{h}{r}$  و  $x \ge x \ge 0$  (۱۶)  
تغییرات انرژی کرنشی برابر است با:

$$\delta U = R \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{L} \int_{0}^{h/\tau} \delta U^{*} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz dx d\theta$$
  

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{\gamma \pi} = R \int_{0}^{L} \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \left( \sigma_{x} \delta \varepsilon_{x} + \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta} + \sigma_{z} \delta \varepsilon_{z} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \right) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz dx$$
(17)

<sup>1.</sup> Virtual Work Principle

<sup>2.</sup> Variational Calculus

ماتریس های 
$$_{3\times 1}[A]$$
 و  $_{3\times 1}[A]$  متقارن و  $_{3\times 1}[A]$  (۲۷)  
پادمتقارن است. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۰) دارای  
حل کلی و حل خصوصی است.

$$A_{\gamma} \{ y'' \} + A_{\gamma} \{ y' \} + A_{\gamma} \{ y \} = \{ F \}$$
  

$$\Rightarrow \{ y \} = \{ y \}_{g} + \{ y \}_{p}$$
(71)

برای حل کلی دستگاه (۲۱)، مقـدار 
$$\{y\} = \{y\} = \{y\}$$
 را  
در معادلات آن قرار میدهیم.

$$e^{mx} \left[ m^{\mathsf{T}} A_{\mathsf{T}} + m A_{\mathsf{T}} + A_{\mathsf{T}} \right] \{ v \} = \{ \cdot \}$$

$$e^{mx} \neq \cdot$$
(YY)

$$\left|m^{\mathsf{T}}A_{\mathsf{T}} + mA_{\mathsf{T}} + A_{\mathsf{T}}\right| = 0 \tag{(YT)}$$

از حل معادله (۲۳)، مقادیر ویژهٔ <sup>۱</sup> *m* محاسبه میشود که با قرار دادن آنها در معادلهٔ (۲۲)، بردارهای ویژه<sup>۲</sup> ،{v} بهدست میآیند. در نتیجه حل کلی عبارت است از:

$$\{y\}_{g} = \sum_{i=1}^{7} C_{i} \{y\}_{i} e^{m_{i}x}$$
(۲۴)

برای حل خصوصی با توجه به اینکه {F} ثابت است، جواب تابعی از x نمی شود:

$$\left\{y\right\}_{p} = \left\{K_{\cdot}\right\} \tag{7}$$

در نتيجه جواب كلي:

$$\{y\} = \{y\}_{p} + \{y\}_{g} = \{K_{\cdot}\} + \sum_{i=1}^{6} C_{i} \{v\}_{i} e^{m_{i}x}$$
 (Y9)

در یک استوانه ضخیم متقارن محوری با دو سر بسته-مقد (کرنش صفحهای)، اگر ضخامت ثابت و فشار یکنواخت باشد، جابه جایی شعاعی در نقاط دور از مرز به x بستگی ندارد. بنابراین معادلهٔ (۲۰) به صورت زیر ساده می شود:

۱۸

$$[A_{\tau}]\{y\} = \{F\} \Longrightarrow \{y\} = [A_{\tau}]^{-1}\{F\}$$
(YY)

از حل معادله (۲۷) و (۷) نتیجه می شود که کرنش برشی و تنش برشی برابر صفر بوده و این نتیجه با فرضیههای نظریه الاستیسیتهٔ مستوی هم خوانی دارد. در نتیجه ماتریس <sub>2×2</sub>[A<sub>3</sub>] برای محاسبه جابه جایی شعاعی به کار می رود.

$$\begin{cases} w \\ \psi \end{cases} = \frac{P(R-h/r)r_i^n}{\lambda E_i} [A_r]_{rxr}^{-1} \begin{cases} -1 \\ h/r \end{cases}$$
(YA)

$$U_{z} = w + \psi z \rightarrow u_{r} = (w - R\psi) + \psi r \qquad (\Upsilon 9)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} = \psi \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \psi + \frac{w - R\psi}{r} \qquad (7.) \\ \vdots \\ \varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} = \psi + \frac{w - R\psi}{r} \end{cases}$$

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_\theta = \lambda E_i \overline{r}^n \left[ (1 - v) \varepsilon_\theta + v \varepsilon_r \right] \qquad (7.)$$

$$\mathbf{T}$$
 - حل استوانههای همگن  
در استوانه همگن و همسانگرد، مدول یانگ و نسبت  
پواسون (هر دو) ثابت است. با قرار دادن  $n = 0$  در رابطه  
(۹)، مادهٔ همگن نتیجه می شود:  
 $E = E_i = const.$  (۳۲)

<sup>1.</sup> Eigenvalues

<sup>2.</sup> Eigenvectors

نیروها و لنگرهای روابط (۳۳) را در معادلات دیفرانسیل (۱۹–۱) می گذاریم و ماتریس های رابط ۲ (۲۰) را بەدست مىآورىم.  $A_{1} = \begin{bmatrix} (1-\nu)Rh & (1-\nu)\frac{h^{\tau}}{1\tau} & \cdot & \cdot \\ (1-\nu)\frac{h^{\tau}}{1\tau} & (1-\nu)\frac{Rh^{\tau}}{1\tau} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu Rh & \mu\frac{h^{\tau}}{1\tau} \\ \cdot & \cdot & \mu\frac{h^{\tau}}{1\tau} & \mu\frac{Rh^{\tau}}{1\tau} \end{bmatrix}$ (1-30)  $A_{\tau} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & vh & vRh \\ \cdot & \cdot & -\mu Rh & -(\mu - \tau v) \frac{h^{\tau}}{1\tau} \\ -vh & \mu Rh & \cdot & \cdot \\ -vRh & (\mu - \tau v) \frac{h^{\tau}}{1\tau} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\tau - \tau \Delta)$  $A_{\tau} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\mu Rh & \cdot & \cdot \\ \cdot & -(1-\nu)\alpha & -[h-(1-\nu)R\alpha] \end{vmatrix}$  $\cdot \qquad \frac{-[h-}{(1-\nu)R\alpha} - (1-\nu)R^{\gamma}\alpha$  $(\pi - \pi \Delta)$  $\{F\} = \frac{P}{\lambda E} \left( R - \frac{h}{\tau} \right) \left\{ \cdot \cdot \cdot - \cdot \cdot h/\tau \right\}^{T}$ (۴-۳۵)

برای استوانه ضخیم با جدار ثابت و فـشار یکنواخـت در حالت کرنش صفحهای در نقاط دور از مرز و با اسـتفاده از معادله (۲۷) داریم:

$$\begin{cases} \mu Rh\phi = \cdot \Rightarrow \phi = \cdot \\ \gamma_{xz} = \phi + \frac{dw}{dx} + \frac{d\psi}{dx} z = \cdot \Rightarrow \tau_{xz} = \cdot \end{cases}$$
(79)

$$N_{x} = \lambda Eh \left[ (1 - \nu) \left( \frac{du}{dx} + \frac{h^{\mathsf{T}}}{\mathsf{N} \mathsf{R}} \frac{d\phi}{dx} \right) + \nu \left( \frac{w}{R} + \psi \right) \right]$$

$$N_{\theta} = \lambda E \left[ \nu h \frac{du}{dx} + (1 - \nu) \alpha w + (h - (1 - \nu) R \alpha) \psi \right]$$

$$N_{z} = \lambda Eh \left[ \nu \left( \frac{du}{dx} + \frac{h^{\mathsf{T}}}{\mathsf{N} \mathsf{R}} \frac{d\phi}{dx} \right) + \nu \frac{w}{R} + (1 - \nu) \psi \right]$$
(just of the second secon

$$\begin{cases} M_x = \lambda E \frac{h^x}{\sqrt{\pi}} \left[ (1-\nu) \left( \frac{du}{dx} + R \frac{d\phi}{dx} \right) + \sqrt{\pi} \psi \psi \right] \\ M_\theta = \lambda E \left\{ \nu \frac{h^x}{\sqrt{\pi}} \frac{d\phi}{dx} + (1-\nu) \times \left[ (h-R\alpha)w + (R^x \alpha - Rh)\psi \right] \right\} \end{cases}$$

$$Q_x = K(1-\tau v)\lambda E \frac{h}{\tau} \left[ \phi + \frac{dw}{dx} + \frac{h^{\tau}}{1\tau R} \frac{d\psi}{dx} \right] \qquad (-\tau \tau)$$

$$M_{xz} = K(1-\tau \nu)\lambda E \frac{h^{r}}{\tau \epsilon R} \left[ \phi + \frac{dw}{dx} + R \frac{d\psi}{dx} \right] \quad (-\tau \tau)$$

K ضریب تصحیح برشی<sup>۱</sup> است که بـسته بـه هندسـهٔ پوسته در عبارت تنش برشی وارد میشود. این ضـریب در حالت استاتیک برای استوانه <sub>٦</sub> = ۲ در نظر گرفتـه شـده است[۲۰].

$$\begin{cases} \alpha = \ln\left(\frac{R+h/r}{R-h/r}\right) = \ln k \quad , \quad k = \frac{r_o}{r_i} \\ \mu = \frac{K}{r}(r - r\nu) \end{cases}$$
(3.4)

1. Shear Correction Factor

$$u_r^P = \frac{(1+\nu) P R (1-\overline{h}/\tau)}{E(k^2-1)} \Big[ (1-\tau\nu) + k^{\tau} \Big]$$
  
&  $k = \frac{\tau + \overline{h}}{\tau - \overline{h}}$ 

$$u_{r}^{F} = -\frac{PR\left(1-\overline{h}/r\right)}{\lambda E \overline{h} \left[\overline{h} - r(1-\nu)\alpha\right]} \left[\overline{h}^{T} + (1-\nu)\right] \times \left(1-\overline{h}/r\right)^{T} \alpha$$
  
$$\times \left(1-\overline{h}/r\right)^{T} \alpha$$
  
$$\& \quad \alpha = \ln\left(\frac{r+\overline{h}}{r-\overline{h}}\right)$$
(f1)

(4.)



شکل ۲ توزیع جابهجایی شعاعی در استوانه همگن

شـكل ۳ درصـد اخـتلاف مقـادير جابـهجـايى شـعاعى بهدست آمده از FSDT و FSDT را نـشان مـىدهـد. هرچـه استوانه بهسمت توپر شدن بيشتر پـيش مـىرود، اخـتلاف نتايج نيز بيـشتر مـىشـود. بيـشينه اخـتلاف در محـدوده نتايج نيز بيـشتر مـىشـود. بيـشينه اخـتلاف در محـدوده انتايج نيز بيـشتر مـىشـود. بيـشينه اخـتلاف در محـدوده السوانههاى جدار ضخيم دقت قابل قبولى است. در حـالتى كه ضخامت جدار با شعاع صفحه ميانى برابر باشد ( $\overline{h} = 1$ ) اختلاف در حدود ۲۵٪ مىشود.

$$Diff = \left(\frac{u_r^P - u_r^F}{u_r^P}\right) \times \cdots$$
 (F7)

صفر شدن کرنش برشی و تـنش برشـی بـرای اسـتوانه مذکور با فرضیههای نظریه الاستیسیتهٔ مستوی همخـوانی دارد. براساس رابطه (۲۸) داریم:

$$\begin{cases} w \\ \psi \end{cases} = \begin{bmatrix} (1-\nu)\alpha & h-(1-\nu)R\alpha \\ h-(1-\nu)R\alpha & (1-\nu)R^{T}\alpha \end{bmatrix}^{-1} \\ \times \frac{P(R-h/T)}{\lambda E} \begin{cases} 1 \\ -h/T \end{cases}$$
(TV)

و جابهجایی شعاعی مطابق رابطه (۲۹) نتیجه می شود:

$$u_{r} = \frac{\Pr_{i}^{\Upsilon}}{\lambda E h \left[ h - \Upsilon(1 - \nu) R \alpha \right]} \left\{ \left[ h - (1 - \nu) \right] \times r_{i} \alpha \right] \overline{r} - hk \right\}$$

$$(\Upsilon \Lambda)$$

# ۴- مقایسهٔ نتایج FSDT و PET ۲- براساس نظریهٔ الاستیسیتهٔ مستوی، جابهجایی شعاء

حالت کرنش صفحهای بهصورت زیر نوشته میشود [۱۹]:

$$u_r^P = \frac{\Pr_i \overline{r}(1+\nu)}{E(k^{\gamma}-1)} \left[ (1-\gamma\nu) + \frac{k^{\gamma}}{\overline{r}^{\gamma}} \right]$$
(٣٩)

برای مقایسه و بررسی نتایج دو روش، استوانه جدار ضخیمی را با مشخصات: شعاع داخلی  $r_i = \epsilon \cdot mm$  و شعاع خارجی  $r_o = 7 \cdot mm$  تحت فشار یکنواخت داخلی سعاع خارجی P = ۸۰ MPa با مدول یانگ E = ۲۰۰ GPa و نسبت پواسون ۳/۰ = ۷ در نظر می گیریم.

شکل ۲ نشان می دهد که جابه جایی شعاعی ناشی از دو روش در محدودهٔ لایهٔ میانی، تقریباً یکسان است و در سطح داخلی اختلاف بیشتر می شود اما در مجموع اختلاف اندکی وجود دارد(کمتر از ۴٪). برای بررسی تأثیر ضخامت جـدار بـر جابـهجـایی شـعاعی، (۳۸) و (۳۹) را بر حسب  $\frac{h}{R} = \frac{h}{R}$  در جدار داخلی که منشأ بروز بیشترین اختلاف است، می نویسیم.

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i} (R + z) \tag{fa}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11} &= (1 - \nu) \left( \mathbf{R}^{\mathsf{Y}} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}^{\mathsf{Y}}}{1 \mathsf{Y}} \right) \\ \mathbf{a}_{11} &= (1 - \nu) \left( \frac{\mathbf{R}^{\mathsf{Y}} \mathbf{h}^{\mathsf{Y}}}{1 \mathsf{Y}} + \frac{\mathbf{h}^{\mathsf{o}}}{\Lambda} \right) \\ \mathbf{a}_{11} &= \mu \left( \mathbf{R}^{\mathsf{Y}} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}^{\mathsf{Y}}}{1 \mathsf{Y}} \right) \\ \mathbf{a}_{11} &= \mu \left( \frac{\mathbf{R}^{\mathsf{Y}} \mathbf{h}^{\mathsf{Y}}}{1 \mathsf{Y}} + \frac{\mathbf{h}^{\mathsf{o}}}{\Lambda} \right) \\ \mathbf{a}_{11} &= \mathbf{a}_{11} = (1 - \nu) \frac{\mathbf{R} \mathbf{h}^{\mathsf{Y}}}{1} \\ \mathbf{a}_{11} &= \mathbf{a}_{12} = \mu \frac{\mathbf{R} \mathbf{h}^{\mathsf{Y}}}{1} \end{aligned}$$
(1-45)

$$\begin{split} \mathbf{b}_{i\tau} &= -\mathbf{b}_{\tau_{i}} = \nu \mathbf{R} \mathbf{h} \\ \mathbf{b}_{it} &= -\mathbf{b}_{ti} = \nu \left( \mathbf{R}^{\mathsf{r}} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}^{\mathsf{r}}}{\tau} \right) \\ \mathbf{b}_{\tau\tau} &= -\mathbf{b}_{\tau\tau} = -\mu \left( \mathbf{R}^{\mathsf{r}} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}^{\mathsf{r}}}{\tau} \right) + \nu \frac{\mathbf{h}^{\mathsf{r}}}{\tau} \\ \mathbf{b}_{\tau t} &= -\mathbf{b}_{t\tau} = -(\tau \mu - \tau \nu) \frac{\mathbf{R} \mathbf{h}^{\mathsf{r}}}{\tau} \\ &: \left[ A_{\mathsf{r}} \right]_{t\times t} \text{ orallots and the states of th$$

$$c_{r_i} = c_{ir} = -\nu Rh \tag{(7-48)}$$

$$\{F\} = \frac{\Pr_i}{\lambda E_i} \left( R - \frac{h}{r} \right) \left\{ \cdot \cdot - \cdot h/r \right\}^T \qquad (f - f \mathcal{P})$$



**شکل ۳** تغییر درصد اختلاف جابه جایی شعاعی با تغییر ضخامت

### ۵- حل استوانههای ناهمگن

با استفاده از روابط (۹ و ۱۰) و توزیع مـدول الاسـتیک در محدوده 2 ≥ n ≥ 2-، تنشها را برحسب کرنشها، سپس با بهرهگیری از (۷)، کـرنشها را برحسب پارامترهای جابهجایی و سرانجام با انتگـرالگیـری از (۱۲)، نیروها و لنگرها را بهدست میآوریم. با قرار دادن آنها در معادلات (۱-۱۹)، ماتریسهای معادلـه (۲۰) و در نهایـت براساس روابط (۲۸) و (۲۹)، جابهجایی شـعاعی و با رابطـه (۳۱)، تنش بیشینه را بـهصورت پارامتری محاسـبه میکنـیم. ماتریسهای معادله (۲۰) عبارتند از:

$$\begin{cases} \left[ \mathbf{A}_{\gamma} \right]_{i \times i} = \left[ \mathbf{a}_{ij} \right] & \& \quad \left[ \mathbf{A}_{\gamma} \right]_{i \times i} = \left[ \mathbf{c}_{ij} \right] \\ \left[ \mathbf{A}_{\gamma} \right]_{i \times i} = \left[ \mathbf{b}_{ij} \right] \end{cases}$$
(FT)

$$\begin{cases} k = \frac{r_o}{r_i} \qquad \alpha = \ln k \qquad \mu = \frac{K}{\tau} (1 - \tau V) \\ \beta = \frac{h}{(R - h/\tau)(R + h/\tau)} = \frac{k - \tau}{kr_i} \end{cases}$$
(FF)

$$u_{r} = \frac{\Pr_{i}}{\lambda E_{i} \left[ \alpha^{\mathsf{T}} - \mathsf{T}(\mathsf{1} - \nu)h\beta \right]} \times \left\{ \left[ \alpha - (\mathsf{1} - \nu)\beta r_{i} \right]\overline{r} + \left( \alpha - \frac{\mathsf{T}h}{r_{i}} \right) \right\}$$
( $\Delta$ .)

n= ۲-۵ ثابت ناهمگنیn= ۲ مدهل الاستیک براساس رابطه (۹) عبارت است از:

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i^{\mathsf{r}}} (R + z)^{\mathsf{r}} \tag{(\Delta1)}$$

$$\left[A_{i}
ight]_{i imes i}$$
 درایههای غیر صفر ماتریس متقارن

$$a_{11} = (1 - \nu) \left( R^{r} h + \frac{Rh^{r}}{\epsilon} \right)$$

$$a_{11} = (1 - \nu) \left( \frac{R^{r} h^{r}}{1 r} + \frac{rRh^{\circ}}{\epsilon} \right)$$

$$a_{1r} = \mu \left( R^{r} h + \frac{Rh^{r}}{\epsilon} \right)$$

$$a_{1i} = \mu \left( \frac{R^{r} h^{r}}{1 r} + \frac{rRh^{\circ}}{\epsilon} \right)$$

$$a_{1i} = a_{1i} = (1 - \nu) \left( \frac{R^{r} h^{r}}{\epsilon} + \frac{h^{\circ}}{\epsilon} \right)$$

$$a_{1i} = a_{1i} = \mu \left( \frac{R^{r} h^{r}}{\epsilon} + \frac{h^{\circ}}{\epsilon} \right)$$

$$(1 - \Delta Y)$$

درایههای غیر صفر ماتریس پادمتقارن 
$$\left[A_{\mathsf{r}}
ight]_{\mathsf{i} imes \mathsf{i}}$$

$$\begin{split} \mathbf{b}_{i\tau} &= -\mathbf{b}_{\tau i} = \nu \left( \mathbf{R}^{\tau} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{h}^{\tau}}{i\tau} \right) \\ \mathbf{b}_{it} &= -\mathbf{b}_{it} = \nu \left( \mathbf{R}^{\tau} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{\delta} \mathbf{R} \mathbf{h}^{\tau}}{i\tau} \right) \\ \mathbf{b}_{i\tau} &= -\mathbf{b}_{\tau\tau} = -\mu \left( \mathbf{R}^{\tau} \mathbf{h} + \frac{\mathbf{R} \mathbf{h}^{\tau}}{i} \right) + \nu \frac{\mathbf{R} \mathbf{h}^{\tau}}{\tau} \\ \mathbf{b}_{\tau i} &= -\mathbf{b}_{i\tau} = -\mu \left( \frac{\mathbf{R}^{\tau} \mathbf{h}^{\tau}}{i} + \frac{\mathbf{h}^{\circ}}{i} \right) + \nu \left( \frac{\mathbf{R}^{\tau} \mathbf{h}^{\tau}}{\tau} + \frac{\mathbf{h}^{\circ}}{i} \right) \\ &: \left[ A_{\tau} \right]_{i \times i} \text{ since and is a since and its set of the set of$$

$$u_{r} = \frac{\Pr_{i}^{\gamma}}{\lambda E_{i} h \left[ (\gamma - \gamma V) R^{\gamma} + (\gamma - V) \frac{h^{\gamma}}{\gamma} \right]} \times \left[ \left( R k r_{i} + \frac{h^{\gamma}}{\gamma} \right) - \left( \frac{h}{\gamma} + V r_{i} \right) r_{i} \overline{r} \right]$$
(FY)

دول الاستیک براساس رابطه (۹) عبارت است از:  

$$E(z) = \frac{E_i r_i}{(R+z)}$$
(۴۸)

$$a_{ii} = (i - \nu)h$$

$$a_{iv} = (i - \nu)\frac{h^{v}}{iv}$$

$$a_{iv} = \mu h$$

$$a_{ii} = \mu \frac{h^{v}}{iv}$$
(1-fq)

درایههای غیر صفر ماتریس پادمتقارن 
$$_{_{ imes imes }}[A_{_{ imes }}]$$
:

$$\begin{split} \mathbf{b}_{\tau\tau} &= -\mathbf{b}_{\tau\tau} = \nu \alpha \\ \mathbf{b}_{\tau\iota} &= -\mathbf{b}_{\iota\tau} = \nu \left( \tau \mathbf{h} - \mathbf{R} \alpha \right) \\ \mathbf{b}_{\tau\tau} &= -\mathbf{b}_{\tau\tau} = \nu \left( \mathbf{h} - \mathbf{R} \alpha \right) - \mu \mathbf{h} \\ \mathbf{b}_{\tau\iota} &= -\mathbf{b}_{\iota\tau} = \nu \left( \mathbf{R}^{\tau} \alpha - \mathbf{R} \mathbf{h} \right) \end{split}$$
(7-F9)

$$\left[A_{r}\right]_{i imes i}$$
 درایههای غیر صفر ماتریس متقارن

$$c_{\tau\tau} = -\mu h$$

$$c_{\tau\tau} = -(1-\nu)\beta$$

$$c_{\varepsilon} = \tau(R\alpha - h) - (1-\nu)R^{\tau}\beta$$

$$c_{\tau} = c_{\varepsilon\tau} = -\alpha + (1-\nu)R\beta$$
(T-F9)

$$\{F\}_{i imes i}$$
و بردار ا

$$\{F\} = \frac{P}{\lambda E_i r_i} \left( R - \frac{h}{r} \right) \left\{ \cdot \cdot - \cdot h/r \right\}^T \qquad (f - f q)$$

$$\begin{aligned} &: \left[A_{r}\right]_{t \times t} \text{ (constraints)} \\ & b_{rr} = -b_{rr} = \nu\beta \\ & b_{rt} = -b_{rr} = \nu(r\alpha - R\beta) \\ & b_{rr} = -b_{rr} = -\mu\alpha + \nu(\alpha - R\beta) \\ & b_{rr} = -b_{rr} = -\mu(h - R\alpha) \\ &+\nu(rh - rR\alpha + R^{r}\beta) \end{aligned}$$
(۲-۵۵)

درایههای غیر صفر ماتریس متقارن 
$$_{_{ixi}}[A_{_{r}}]_{_{ixi}}$$
:

$$c_{\tau\tau} = -\mu\alpha$$

$$c_{\tau\tau} = -(1-\nu)\frac{R}{h}\beta^{\tau}$$

$$c_{\iota\iota} = -\tau\alpha + (\tau+\nu)R\beta - (\tau-\nu)\frac{Rh}{4}\beta^{\tau}$$

$$c_{\tau\iota} = c_{\iota\tau} = -\nu\beta + (\tau-\nu)\frac{h}{4}\beta^{\tau}$$
(\vec{\tau}-\Delta\Delta)

$$\{F\} = \frac{P}{\lambda E_i r_i^{\mathsf{T}}} \left( R - \frac{h}{\mathsf{T}} \right) \{ \cdot \cdot - \cdot h/\mathsf{T} \}^T \qquad (\mathfrak{f}-\mathfrak{d}\mathfrak{d})$$
  
equation of the set of the se

$$u_{r} = \frac{P}{\lambda E_{i} \left[ 1 - Y(1 - V) \frac{R\alpha}{h} \right] \beta^{Y}} \times \left\{ \left[ V\beta - (1 - V) \left( \frac{h}{\varepsilon} - \frac{R}{Y} \right) \beta^{Y} \right] \overline{r} + \left( \beta - \frac{Y\alpha}{r_{i}} \right) \right\}$$
 ( $\Delta F$ )

۶- بررسی نتایج

برای مطالعه موردی و بررسی کردارهای به دست آمده از نتایج عددی، استوانه ای جدار ضخیم با مشخصات زیر را با توزیع متغیر مدول الاستیک در راستای جدار در نظر  $r_i = 1.0 \text{ mm}$  می گیریم. استوانهٔ جدار ثابت با شعاع داخلی  $r_i = 1.0 \text{ mm}$  و شعاع خارجی  $r_o = 7.0 \text{ mm}$ 

$$c_{\tau\tau} = -\mu \left( R^{\tau} h + \frac{Rh^{\tau}}{\epsilon} \right)$$

$$c_{\tau\tau} = -(1 - \nu)Rh$$

$$c_{\epsilon\epsilon} = -(1 - \nu)R^{\tau}h - \frac{Rh^{\tau}}{\tau}$$

$$c_{\tau\epsilon} = c_{\epsilon\tau} = -\left(\nu R^{\tau}h + \frac{h^{\tau}}{\tau}\right)$$
(Y-\DeltaY)

$$\{F\}_{i\times i}$$
و بردار

$$\{F\} = \frac{Pr_i^{\mathsf{T}}}{\lambda E_i} \left( R - \frac{h}{\mathsf{T}} \right) \{ \cdot \cdot - \cdot h/\mathsf{T} \}^T$$

$$(\mathfrak{F} - \Delta \mathsf{T})$$

جابهجایی شعاعی براساس رابطه(۲۹) برابر است با:  

$$u_{r} = \frac{\Pr_{i}^{i}}{\lambda E_{i}h \left[\frac{h^{i}}{1 i i} - (1 - \Upsilon V) \left(R^{\Upsilon} + h^{\Upsilon}/\Upsilon\right)R^{\Upsilon}\right]} \times \left\{ \left[ (R + h/\Upsilon) \frac{h}{\Upsilon} + V R r_{i} \right] \overline{r} - \left[ (R + h/\Upsilon) \frac{h^{\Upsilon}}{i r_{i}} + R^{\Upsilon} k \right] \right\}$$
( $\Delta \Upsilon$ )

$$E(z) = \frac{E_i r_i^{\mathsf{Y}}}{(R+z)^{\mathsf{Y}}} \tag{\DeltaF}$$

$$\left[A_{i}
ight]_{i imes i}$$
درایههای غیر صفر ماتریس متقارن

$$a_{11} = (1 - \nu)\alpha$$

$$a_{11} = (1 - \nu)(R^{\tau}\alpha - Rh)$$

$$a_{11} = \mu\alpha$$

$$a_{11} = \mu(R^{\tau}\alpha - Rh)$$

$$a_{11} = a_{11} = (1 - \nu)(h - R\alpha)$$

$$a_{11} = a_{11} = \mu(h - R\alpha)$$
(1- $\Delta\Delta$ )

ورار گرفته است. مدول الاستیک سطح E<sub>i</sub> = ۲۰۰ GPa قرار گرفته است. مدول الاستیک سطح داخلـی اسـتوانه برابـر GP برابـر و E<sub>i</sub> = ۲۰۰ GPa و نـسبت پواسـون برابر ۳/۰ =  $\nu = \nu = \nu$  است. شکل ۴ توزیع مدول الاستیک را نسبت بما به شـعاع  $\frac{E}{E_i} = \left(\frac{r}{r_i}\right)^n$  در اسـتوانه نـاهمگن و همـسانگرد به ازای مقادیر صحیح n نشان میدهد.



شکل ۵ توزیع نرمال جابهجایی شعاعی استوانهٔ ناهمگن را در راستای جدار بهازای مقادیر مختلف n نشان می دهد. بهازای ۰> n جابهجایی استوانه نسبت به مادهٔ همگن بیشتر بوده و بهازای  $\cdot < n$  کمتر می شود، اما این نسبت در طول جدار تقریباً ثابت باقی می ماند؛ یعنی تغییرات جابهجایی مادهٔ ناهمگن مشابه تغییرات جابهجایی در مادهٔ همگن است و میزان تغییرات به |n| بستگی دارد.



شکل ۶ توزیع نرمال تنش محیطی استوانه ناهمگن را در راستای جدار بهازای مقدار مختلف n نا شان می دهد. (در [۱۳] این کردار به اشتباه ترسیم شده است). تنش محیطی بهازای 0 > n در نیمه داخلی جدار، بیشتر از مادهٔ همگن و در نیمه خارجی جدار، کمتر از مادهٔ همگن است و برعکس بهازای 0 < n در نیمه داخلی جدار، کمتر از مادهٔ همگن و در نیمه خارجی جدار، بیشتر از مادهٔ همگن است. در محدوده لایه میانی استوانه، رفتار مادهٔ ناهمگن مانند رفتار مادهٔ همگن می شود.



شکل ۶ توزیع تنش بیشینه در استوانه ناهمگن

۷- نتیجه گیری

نتایج جدول ۱ نشان میدهد که جابهجاییهای بهدست آمده از روش FSDT در سطح میانی با روش PET کاملاً همخوانی داشته و در سطح داخلی، کمتر از ۴٪ اختلاف دارند؛ یعنی روش FSDT با دقّت قابل قبولی، جابهجاییها را بهدست میدهد.

نتایج جدول ۲ نشان میدهد که تنشهای بهدست آمده از روش FSDT در سطح میانی با روش PET تقریباً همخوانی دارند اما در سطح داخلی، روش FSDT مقادیر بیشتری را نسبت به روش PET نشان میدهد. البته این در طراحی مهندسی، موجب افزایش ضریب اطمینان میشود و ازاینرو مشکلی برای پیشبینی تنش بحرانی(تنش تسلیم) ایجاد نمیکند. برای دستیابی به دورهٔ دهم، شمارهٔ ٤/ زمستان ۱۳۸۹

- [2] Naghdi P.M. & Cooper R.M.; Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia, J. Acoustical Sc. America; vol. 28(1), 1956, 56-63.
- [3] Mirsky I. & Hermann G.; Axially motions of thick cylindrical shells, J. Appl. Mech.; vol. 25, 1958, 97-102.
- [4] Greenspon J.E.; Vibration of a thick-walled cylindrical shell-camparison of the exact theory with approximate theories, J. Acoustical Sc. America; vol. 32(5), 1960, 571-578.
- [5] Ziv M. & Perl M.; Impulsive deformation of Mirsky-Hermann's thick cylindrical shells by a numerical method, J. Appl. Mech.; 1973, 1009-1016.
- [6] Suzuki K. & Konno M. & Takahashi S.; Axisymmetric Vibrations of a cylindrical shell with variable thickness, JSME; vol. 24(198), 1981, 2122-2132.
- [7] Takahashi S. & Suzuki K. & Kosawada T.; Vibrations of conical shells with variable thickness, JSME; vol. 29(285), 1986, 4306-4311.
- [8] Eipakchi H.R. & Rahimi G.H. & Esmaeilzadeh Khadem S.; Closed form solution for displacements of thick cylindrs with varying thickness subjected to nonuniform internal pressure, J. Struc. Eng. and Mech.; vol. 16(6), 2003, 731-748.
- [9] Lekhnitskii S.G.; Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscow, Mir Pub., 1981.
- [10] Koizumi M.; FGM activities in Japan, Composites: Part B(Engineering); vol. 28, 1997, 1-4.
- [11] Fukui Y., Yamanaka N.; Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure, JSME Int. J. Ser. I: Solid Mech.; vol. 35(4), 1992, 379-385.
- [12] Horgan C.O., Chan A.M.; The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, J. Elasticity; vol. 55,1999, 43-59.
- [13] Tutuncu N., Ozturk M.; Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels, composites: Part B(Engineering); vol. 32, 2001, 683-686.
- [14] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to

دقّتهای بالاتر، میتوان از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه دو<sup>۱</sup> یا بالاتر استفاده کرد.

درمجموع می توان چنین نتیجه گرفت که بهازای n مثبت یا منفی، تنش بیشینه در یک نیمه جدار استوانه، کاهش و در نیمه دیگر جدار، افزایش مییابد. بازای n مثبت، جابه جایی شعاعی در جدار استوانه، کاهش و بازای n منفی، افزایش مییابد و هر چه |n| بزرگتر باشد، کاهش یا افزایش تنش یا جابه جایی استوانهٔ ناهمگن نسبت ب استوانهٔ همگن بیشتر می ود. بنابراین بهتر است |n|بزرگ نباشد. n مثبت موجب کاهش جابه جایی و تنش در سطح داخلی می شود که برای بسیاری از صنایع اهمیت دارد. به ازای 1 = n حدود ۲۰٪ تغییرات در رفتار ماده

**جدول ۱** مقایسه نتایج جابهجایی شعاعی محاسبه شـده بـا PET و FSDT

N		-					
		$u_r[mm]$	<i>n</i> = -۲	n=-1	$n=\cdot$	<i>n=</i> \	<i>n</i> = -۲
	سطح داخلی	PET[19]	•/•\$71\$٣	•/•۵۲۶۷۳	•/•44•99	•/•٣۶۴٧١	•/•٣٩٨١١
	$r = r_i$	FSDT	•/•۶•۵۱۲	•/•۵•٩٨۴	•/•۴۲۳۸۸	•/•84784	•/•78048
	سطح میانی	PET[19]	•/•۵۴۵۴۱	•/•۴۵٩٨٩	•/•٣٨٢٧٢	•/•٣١۴٢۶	•/•75458
	r = R	FSDT	•/•۵۴۳•٩	•/•۴۵٧٩•	۰/۰۳۸۰۹۶	•/•٣١٢۶۶	•/•7۵۵۹٨

PET جدول ۲ مقایسهٔ نتایج تنش بیشینهٔ محاسبه شده با FSDT و

	$\sigma_{\theta}[MPa]$	<i>n</i> = -۲	<i>n</i> = - \	$n=\cdot$	n=1	<i>n</i> = -۲
سطح داخلی	PET[19]	8.1/21	۲۵۵/۱۳	۲۰۸	188/11	189/01
$r = r_i$	FSDT	۳۳۵/۷۲	27/222	۳۵/۷۸	193/88	101/18
سطح میانی	PET[19]	141/80	149/20	100/88	18./	188/88
r = R	FSDT	144/10	۱۵۱/۰۸	108/18	109/17	۱۵۹/۸۱

#### ۸- منابع

 Timoshenko S.P.; Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3<sup>rd</sup> ed., New York, Van Nostrand Reinhold Co.; 1976.

<sup>1.</sup> Second-Order Shear Deformation Theory

- [۱۹] قنّاد مهدی و رحیمی غلامحسین و اسماعیلزاده خادم سیامک؛ حل کلی استوانههای جدار ضخیم متقارن محوری سهخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه الاستیسیتهٔ مستوی، مجلّه مهندسی مکانیک مدرّس، دوره ۱۰، شماره ۳ (۱۳۸۹) ص ص ۳۵–۴۳
- [20] Vlachoutsis S., Shear correction factors for plates and shells, Int. J. Num. Math. in Eng.; 33, 1992, 1537-1552.

حل کلی استوانههای جدار ضخیم متقارن محوری ...

radially symmetric loads, Int. J. Pressure Vessel and Piping; vol. 79, 2002, 493-497.

- [15] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.; General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmeteic steady-state loads, J. App. Mech.; vol. 70, 2003, 111-118.
- [16] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, Mech. Res. Comm.; vol. 33, 2006, 681-691.
- [17] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, J. Composite Struc.; vol. 79, 2007, 140-147.
- [18] Tutuncu N.; Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, J. Eng. Struc.; vol. 29, 2007, 2032-2035.