



# تحلیل ایرودینامیک ناپایا با استفاده از روش اجزای مرزی و مدلسازی فضای حالت زمان پیوسته

میثم محمدی امین'، بهزاد قدیری'\*، حسن حدادپور ّ

۱ - دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
 ۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
 ۳- دانشیار مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف
 \* تهران، صندوق پستی ۱۴۳–۱۴۱۱۵. ۱۴۱۱۵ ghadirib@modares.ac.ir

چکیده – در این مقاله نوعی مدل ایرودینامیکی فضای حالت زمان پیوسته بر اساس روش اجزای مرزی مستقیم توسعه داده شده است. برای این منظور ابتدا معادلات انتگرال مرزی حاکم بر جریان پتانسیل زیرصوت ناپایا حول ترکیبهای برآزا با تأکید بر فرمول بندی اصلاح شده برای بالهای نازک ارائه می شود. سپس براساس دستگاه معادلات اجزای مرزی جریان ایرودینامیکی ناپایا حول بال با هندسه دلخواه و با استفاده از فرضیات کمکی، مدل فضای حالت ایجاد می شود. برای ارزیابی دقت و کارایی روش ارائه شده، نتایج به دست آمده از مدل سازی ضرایب ایرودینامیک ناپایا ممکی، مدل فضای حالت ایجاد می شود. برای ارزیابی دقت و کارایی روش ارائه شده، نتایج به دست آمده از مدل سازی ضرایب ایرودینامیک ناپایا برای انواع ایر فویل و بال برای حرکتهای ناپایای مختلف با نتایج اعتبار سنجی شده منایج به دست آمده از مدل سازی ضرایب ایرودینامیک ناپایا برای انواع ایرفویل و بال برای حرکتهای ناپایای مختلف با نتایج اعتبار سنجی شده حاصل از روش اجزای مرزی می تقیم مقایسه و تطابق خوبی مشاهده شد. با توجه به این که مدل ایرودینامیکی توسعه یافته در حوزه زمان پیوسته ارائه شده، این مرزی می این مرزی می تقیم مقایسه و تطابق خوبی مشاهده شد. با توجه به این که مدل ایرودینامیکی توسعه یافته در حوزه زمان پیوسته ارائه شده، این مرزی مرزی می برای کاربرده ای بهینه سازی و تطابق خوبی مشاهده شد. با توجه به این که مدل ایرودینامیکی توسعه یافته در حوزه زمان پیوسته ارائه شده، این مدل به ویژه برای کاربرده ای بهین ه می ازد. تحلیل غیر خطی مفید است. به علاوه توصیف فضای حالت، امکان بهره گیری کارامد از این مدل را در مسائل مرتبط با کنترل نیز فراهم می سازد. **کلیدواژگان:** مدل فضای حالت زمان پیوسته، مدل سازی ایرودینامیکی ناپیا.

# Unsteady Aerodynamic Analysis using Boundary Element Method and Continuous-Time State-Space Modeling

# M. Mohammadi-Amin<sup>1</sup>, B. Ghadiri<sup>2\*</sup>, H. Haddadpour<sup>3</sup>

1- Ph. D. student, Department of Mechanical Eng, Tarbiat Modares Univ.

2- Assistant Professor, Department of Mechanical Eng, Tarbiat Modares Univ.

3- Associate Professor, Faculty of Aerospace Eng, Sharif Univ. of Tech.

\*P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran. ghadirib@modares.ac.ir

**Abstract**- In this paper a continuous-time state-space aerodynamic model has been developed based on the boundary element method. First, boundary integral equations for unsteady potential subsonic flow around lifting bodies are presented with emphasis on a modified formulation for thin wings. Next, the BEM discretized problem of unsteady flow around an arbitrary wing is recast in the form of a state-space model using some auxiliary assumptions. To validate the proposed model, its predictions for unsteady aerodynamic coefficients due to various unsteady flows about different wing geometries were compared to the verified results of the direct boundary element solution and good agreement was observed. Because of the resulting aerodynamic model has been constructed in the continuous-time domain, it is particularly useful for optimization and nonlinear analysis purposes. Moreover, its state-space representation is the appropriate form for an aerodynamic model in control applications.

Keywords: Continuous-Time State-Space Model, State-Space Aerodynamics Modeling, Boundary Element Method, Unsteady Aerodynamics.

#### میثم محمدی امین و همکاران

#### ۱– مقدمه

توسعه رویکردهای محاسباتی کارامد برای مسائل ایرودینامیک ناپایا همواره مورد توجه بسیاری از محققان بوده که دلیل اصلی آن، نیاز به کاهش هرچه بیشتر هزینهٔ محاسباتی بخش ايروديناميک در مسائل چندوجهي مانند طراحي، بهينهسازي و ايروالاستيسيته است. روش اجرزاي مرزى يكي از اين رویکردهاست که به دلیل کاهش ابعاد مسأله محاسباتی, قابلیت حل جریان حول هندسههای نزدیک به ترکیب واقعے وسایل پرنده با هزینهای به مراتب کمتر از رویکردهای CFD دامنهمبنا را دارد. این روش در طی دو دهه اخیر در زمینههای مختلف توسعهٔ چشمگیری یافته و بهطور گستردهای در کاربردهای گوناگون هوافضا مانند تحلیل ایرودینامیکی در رژیمهای مختلف جريان بهكار گرفته شده است [۱-۳]. همچنين تحقیقات ارزشمندی در زمینه توسعه مدلهای رتبه کاسته ایرودینامیکی بر اساس روش اجزای مرزی صورت گرفتـه است [۴–8]. در [۴] بـا اســتفاده از مودهـای ویــژه جریـان و روش تصحیح استاتیک، مدلهای رتبه کاسته مود ویژه بـرای جریـان پتانسیل ناپایا حول بالهای ضخیم دوبعدی و سهبعـدی توسـعه داده شده است. این رویکرد در [۵] با ایجاد مسأله مقدار ویژه بر اساس تنها مجهولات مربوط به دنباله اصلاح و کارایی محاسباتی آن بهبود داده شده است. همچنین نتیجه گرفته شده که در مدلسازی رتبه کاسته اصلاحشده، نیازی به تصحیح استاتیک وجود ندارد. در [۶] محاسبات مودهای ایرودینامیکی که در [۴] به صورت زمان گسسته ارائه شده، با عملیات جبری ماتریسی به حوزه زمان پیوسته تبدیل شده است. در این عملیات معادله مربوط به بخش شبهاستاتیک حل، در درون محاسبات بخش دینامیک ادغام شده و به این ترتیب نیاز به تصحیح استاتیک نیز برطرف شده است [۶]. در تحقیق حاضر بدون نیاز به استفاده از معادلات مختصات مودال و فقط بر اساس استفاده از شکل زمان پیوسته معادله کلوین (معادله انتقال برای اختلاف پتانسیل بر روی سطح دنباله) مدل ایرودینامیک اجزای مرزی مستقیم در حوزه زمان پیوسته فرمول بندی شده است. مدل زمان پیوسته در بسیاری از مسائل مورد نیاز و مفید است. بهعنوان مثال در بهینهسازی یا تحلیل

غیرخطے ایروالاستیک بال به مدلی دقیق از نیروهای ایرودینامیکی ناپایا نیاز است، زیرا این نوع تحلیلها باید از عهده وابستگی بین نیروهای ایرودینامیکی و پاسخ سازه برآیند و مدل باید به ویژه در تحلیل ایروالاستیک غیرخطی، شکل ایرودینامیکی مناسبی در حوزه زمان پیوسته داشته باشد [۷]. از سوی دیگر در کاربردهایی مانند طراحی و کنترل ایروالاستیک نیز مدل ایرودینامیکی در شکل فضای حالت بسیار مطلوبتر و کارامدتر از رویه اجزای مرزی معمول است [۸]. در این تحقیق برای ایجاد مدل فضای حالت زمان پیوسته در شـکل اسـتاندارد بـر اسـاس روش اجـزای مـرزی، مسـألهٔ ايروديناميك بالهاى ضخيم بهصورت تصحيح ضرايب ایرودینامیک بال تخت معادل با استفاده از اختلاف مقادیر حالت پایا مربوط به دو هندسه اصلی و معادل، مدلسازی شده است. برای محاسبات ضرایب ایرودینامیک بال تخت، معادلات انتگرال مرزی که فقط برای بالهای ضخیم قابل استفاده است، به گونهای اصلاح می شود که امکان به کار گیری روش اجزای مرزی برای بالهای نازک نیز فراهم شود. به این ترتیب علاوه بر اینکه محاسبات یکپارچه انواع بال با ضخامت دلخواه با استفاده از یک برنامهٔ اجزای مرزی قابل انجام است، شرایط لازم برای ایجاد مدل فضای حالت استاندارد نیز ایجاد می شود.

شایان ذکر است که کاربرد روش اجزای مرزی بهعنوان روشی عددی در حل معادلات انتگرال مرزی، قابل مقایسه با روش ایرودینامیکی پنل در صورت استفاده از توزیع عناصر دابلت و چشمه است. هرچند با وجود شباهتهای بین دو روش، فرمول بندی و نحوه بهکار گیری عددی آنها متفاوت است. در هر دو روش امکان بکار گیری عناصر ثابت، خطی و مرتبه بالاتر رژیم گذرصوت و همچنین عمومیتر بودن فرمول بندی عددی رژیم گذرصوت و همچنین عمومیتر بودن فرمول بندی عددی در آن موجب میشود که این رویک د بسیار مطلوبتر از روش پنل بهویژه در مسائل چندوجهی باشد. از سویی بکار گیری هر دو روش پنل و اجزای مرزی، محدود به هندسه های ضخیم است و در مورد بال های نازک معمولا روش های مبتنی بر روش اجزای مرزی برای بال های نازک (تخت یا منحنی) در روش اجزای مرزی برای بال های نازک (تخت یا منحنی) در

٩.

تحقیق حاضر با اصلاح معادلات انتگرال مرزی برطرف شده است. در برخی مراجع مانند [۱] روش پنل را روش اجزای مرزی غیرمستقیم نامیدهاند زیرا بر یافتن توزیع مناسب عناصر تکین برای ارضای معادلات و شرایط مرزی مبتنی است. درحالی که روش اجزای مرزی مستقیم که در این تحقیق نیز استفاده شده است، بر گسستهسازی و حل مستقیم معادلات انتگرال مرزی برای محاسبه توزیع پتانسیل سرعت روی سطح جسم و دنباله آن مبتنی است. بنابراین به زعم نویسندگان بهتر است در مقالات علمی نوع روش استفاده شده به دقت گفته شود.

در ادامه پس از ارائه معادلات انتگرال مرزی در بخش بعدی به نحوه ایجاد مدل فضای حالت زمان پیوسته بر اساس دستگاه معادلات اجزای مرزی برای بال با هندسه دلخواه می پردازیم. سپس نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم و مدل فضای حالت در دو بخش جدا بررسی و ارزیابی می شود. در این راستا نتایج روش اجزای مرزی مبتنی بر معادلات انتگرال مرزی ارائه شده در تحقیق حاضر برای بالهای تخت با نتایج عددی و تحلیلی مقایسه و اعتبارسنجی می شوند. پس از اطمینان از ایجاد مدل فضای حالت برای ایرودینامیک انواع بال با ایجاد مدل فضای حالت برای ایرودینامیک انواع بال با اجزای مرزی اعتبارسنجی شده پرداخته می شود. سرانجام پس از جمع بندی سیر تحقیق انجام شده، به نکات مهم قابل نتیجه گیری اشاره می شود.

## ۲- معادلات انتگرال مرزی

فرمول بندی انتگرال مرزی که در این بخش ارائه می شود مبتنی بر فرضهای معمول برای جریان پتانسیل ناپایا یعنی جریان غیرلزج، غیر چرخشی و تراکمناپذیر است. از نظر فیزیکی این فرضها برای جریان با عدد رینول دز بالا و عدد ماخ پایین در زاویه حمله کوچک قابل قبول است [۹]. هرچند، برای جریانهای با عدد ماخ تا ۰/۶ نیز امکان اعمال تصحیح تراکم پذیری از طریق به کارگیری مختصات پرنتل - گلاورت وجود دارد [۱۰]. معادلات ناویر استوکس برای جریان پتانسیل

به معادله لاپلاس ساده میشوند. با شروع از قضیه دوم گرین و با استفاده از شرط مرزی در بینهایت، میتوان به این نتیجه رسید که هر تابعی که معادلهٔ لاپلاس را برای جریان پتانسیل ناپایا حول بال ضخیم ارضا کند، معادلهٔ انتگرال مرزی زیر برحسب پتانسیل اغتشاشی را نیز ارضا خواهد کرد [1]:

$$E(\mathbf{x}_{*},t_{*})\phi(\mathbf{x}_{*},t_{*}) = \bigoplus_{S_{B}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}G - \phi\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS - \iint_{S_{W}} \Delta\phi\frac{\partial G}{\partial n} dS$$
(1)

که در آن G حل اساسی برای عملگر لاپلاس، n بردار برونسوی عمود بـر سـطح (بسـته) جسـم S<sub>B</sub> و سـطح (بـاز) دنبالـه S<sub>W</sub> و E ضریبی است که با توجه به موقعیت نقطه بار تعیین میشود.

در تحقیقات پیشین [۱-۴] با استفاده از حل اجزای مرزی معادلـه (۱) جریـان ناپایـا حـول ایرفویـلهـا و بـالهـای دارای ضـخامت تحليـل شـده اسـت. بـرای ايـن منظـور پـس از گسستهسازی معادله بالا براساس فرمولبندی اجزای مرزی معیّن، با اعمال شرط عدم نفوذ بر روی جسم، شرط کوتا در لبه فرار و تئوری کلوین بر روی دنباله، دستگاه معادلات جبری برای مجهولات توزیع پتانسیل بر روی جسم و اختلاف پتانسیل بر روی دنباله بهدست میآید. اما به کار گیری رویکردی مشابه برای بالهای نازک بدون اعمال اصلاحاتی چند ناممکن است. زیرا در صورتی که ضخامت هندسهای که المانهای مرزی بر روی آن قرار گرفتهاند کوچک باشد، نقاط هممکانی در سطوح بالایی و زیرین بال بیش از حد به یک دیگر نزدیک شده و محاسبات ضرایب تأثیر را با مشکل روبهرو میسازند. همچنین درصورتی که نقاط هم مکانی نزدیک به هم منطبق در نظر گرفته شوند، با توجه به وجود دو بردار عمود یکسان اما در جهات مخالف در هر نقطه از سطح بال اعمال شرط مرزی عدم نفوذ موجب ناسازگاری در دستگاه معادلات خواهد شد. بنابراین باید به نوعی در معادله انتگرال مرزی (۱)، تعریف بـردار عمـود بـر سطح جسم و نحوه تشکیل دستگاه معادلات اجزای مرزی با استفاده از شرط مرزی عدم نفوذ اصلاحاتی صورت پذیرد تا بتوان از روش اجزای مرزی برای ترکیبهای برآزای نازک نیز استفاده کرد. برای این منظور ابتدا با توجه به ضخامت ناچیز جسم، مشابه فرضی که در توسعه معادلهٔ (۱) برای سطح دنباله

مرز شامل بال و دنباله این معادلـه قابـل اسـتفاده نیسـت، زیـرا به خلاف حالت بال ضخیم – که بـا داشـتن  $\partial \phi \partial n$  بـر روی  $S_B$ (شرط مرزی نیومن) دستگاه معادلات بـرای ارزیـابی  $\phi$  روی  $S_B$ و  $\phi \Delta$  روی  $S_W$  به دست میآید– در اینجا مشتق عمود پتانسیل و وجود ندارد. همچنین روی سطح جسم دو مجهـول پتانسـیل و اختلاف پتانسیل داریم که تعـداد مجهـولات را بـیش از تعـداد معادلات میسازد. برای حل این مشکلات میتوان از معادلهٔ (۵) نسبت به جهت عمود بـر سطح مشـتق گرفت و بـا توجـه بـه شرایط مشتق گیری برداری رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_*, t_*) = \nabla \phi \mathbf{n} = -\left(\iint_{S_B + S_W} \Delta \phi \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS\right) \mathbf{n} \qquad (\mathcal{F})$$

کـه  $\nabla G$  در حالـت دوبعـدی برابـر  $\mathbf{r}^2 \pi r^2$  و در حالـت سهبعدی برابر  $\nabla G$  در حالـت سهبعدی برابر  $\mathbf{r}^7 / 4\pi r^3$  است. اکنون با اسـتفاده از شـرط عـدم نفوذ در هر نقطـه از روی بـال (  $\mathbf{n} - \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}$ ) مـی تـوان دستگاه معادلاتی را برای تعیین مجهولات اختلاف پتانسـیل بـر روی سطح بال و دنباله تشکیل داد. برای این منظـور مـی تـوان پس از گسستهسازی مرز به اجزای دارای اختلاف پتانسیل ثابت در سطح المان و با به کارگیری روش هممکانی (نقطه هم مکـانی در مرکز المان) روابط زیـر را بـرای تشـکیل دستگاه معادلات معادلات معرفی مرز به مرزی به مرانی دارای اختلاف معادلات معرفی مرکانی معرفی محمد می مرزی به در مرکز المان) روابط زیـر را بـرای تشـکیل دستگاه معادلات معادلات معرزی به دست آورد:

$$\chi_{k}(t) = \sum_{m=1}^{NB+NW} C_{km}(t) \Delta \phi_{m}(t)$$
(Y)

$$\cdot C_{km} = -\left(\iint_{S_m} \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS\right) \cdot \mathbf{n}_m \circ \chi_k = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_k dS$$

در معادلهٔ (۲)  $C_{km}$  ضرایب تأثیر است که به صورت عددی یا تحلیلی (پیوست الف) ارزیابی می شوند. در روش اجزای مرزی برای ایرودینامیک بال های ضخیم به منظور دستیابی به حل یکتا (در حالت دوبعدی) و برقراری ریزش ورتیسیته از بال به دنباله اعمال شرط کوتا در لبه فرار ضروری بود. این شرط از نظر فیزیکی یعنی این که جریان، لبه فرار را به آرامی ترک می کند و سرعت در آن نقطه محدود است و می تواند چنین تفسیر شود که جریان، لبهٔ فرار را در امتداد خط نیمساز زاویهٔ انجام می شود، بال به شکل سطح ناپیوستگی در نظر گرفته می شود. سپس دو روی سطح بسته  $S'_B$  احاطه کننده سطح بال  $S_B$  می شود. در این فرایند،  $S'_B$  با دو روی سطح  $S_B$  بینهایت به جسم نزدیک می شوند. در این فرایند، می در وی دوی سطح  $S_B$  با دو سطح خیس بال جایگزین می شود. با فرض جهت رو به بالا برای بردار عمود n در حالت حدی داریم،

$$\oint_{S'_{B}} f \frac{\P G}{\P n} dS = \iint_{S_{B}} Df \frac{\P G}{\P n} dS$$
(7)

که 1 $\phi=\phi_2-\phi_1$ ؛ درحالیکه با توجه به شرط مرزی حاکم بر سطح ناپیوستگی در جریان پتانسیل داریم:

$$\oint_{S_{b}} \frac{\P \phi}{\P n} G dS = \iint_{S_{b}} \Delta \left( \frac{\P \phi}{\P n} \right) G dS = \cdot \tag{(7)}$$

بنابراین معادلهٔ انتگرال مـرزی (۱) بـرای جریـان حـول بـال نازک بهصورت زیر ساده میشود:

$$E(x_*,t_*)\phi(x_*,t_*) = -\iint_{S_B + S_W} \Delta \phi \frac{\P G}{\P n} dS \tag{(f)}$$

که  $S_B$  به خلاف حالت بال ضخیم، یک سطح باز است. در معادلهٔ (۱) ضریب E برای نقاط خارج از مرز عدد یک است و برای نقاط روی مرز براساس مقدار اصلی کوشی<sup>۱</sup> و رفع تکینگی انتگرالهای مرزی بر روی این نقاط به دست میآید [۱]. در اینجا با توجه به نبود متغیر پتانسیل در سمت راست معادلهٔ (۴) ضریب E برابر یک فرض، اما عبارتی به سمت راست اضافه می شود که حاصل حذف تکینگی از انتگرالهای مرزی است:

$$\phi(x_*,t_*) = -\iint_{S_B + S_W} \Delta \phi \frac{\P G}{\P n} dS \pm \frac{\Delta \phi}{\Upsilon} \bigg|_{x_* f_{S_B}}$$
(\Delta)

که علامت مثبت مربوط به روی بال و منفی مربوط به سطح زیرین بال میشود. معادله (۵) را در صورت معلوم بودن توزیع اختلاف پتانسیل بر روی سطح جسم و دنباله، میتوان برای ارزیابی پتانسیل در نقاط داخل دامنه غیرواقع بر روی مرز استفاده کرد. اما برای تعیین توزیع اختلاف پتانسیل بر روی

<sup>1.</sup> Cauchy Principal Value

جسم است. برای توسعه مـدل فضـای حالـت زمـان پیوسـته ابتـدا دستگاه معادلات (۱۰) بهصورت زیر بازنویسی میشود:

 $\begin{cases} \mathbf{K}_{1}\mathbf{\mu}_{b} + \mathbf{K}_{2}\mathbf{\mu}_{w_{0}} + \mathbf{K}_{3}\mathbf{\mu}_{w} = \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{K}_{4}\mathbf{\mu}_{b} + \mathbf{K}_{5}\mathbf{\mu}_{w_{0}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{6}\mathbf{\mu}_{w} - \mathbf{K}_{7}\mathbf{\mu}_{w_{0}} = \mathbf{\mu}_{w} \end{cases}$ (11)

که در آن بردار  $\mu$  به سه بردار مجهولات بر روی اجزای جسم ( $\mu_{\mu}$ )، مجهولات روی اجزای دنبالهٔ متصل به لبه فرار ( $\mu_{w0}$ ) و مجهولات روی اجزای دنبالهٔ غیر متصل به جسم ( $\mu_{w0}$ ) و مجهولات روی اجزای دنبالهٔ غیر متصل به جسم ( $\mu_{w0}$ ) تقسیم شده است. معادلهٔ اول در دستگاه (۱۱) حاصل از گسسته سازی معادلهٔ انتگرال مرزی برای نقاط همکانی روی جسم است که در آن  $[n_{bx}, n_{bz}] = B \ e \ (n_{bx}, n_{bz}]$   $\mathbf{w} = [\cos \alpha(t), \mathbf{g}] = B = \mathbf{U}_{\alpha} (\mathbf{n} \sum \alpha(t))$   $\mathbf{w} = [\cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz}]$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz}]$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}]$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}]$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}] = \mathbf{g} \ (n_{bx}, n_{bz})$   $\mathbf{w} = [cos \alpha(t), \mathbf{g}]$   $\mathbf{w} = [c$ 

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$
(17)

که برطبق تعریف x دربردارندهٔ حالتهای سیستم، u متغیر ورودی و y متغیر خروجی سیستم است. با استفاده از معادلات اول و دوم دستگاه (۱۱) رابطهای برای  $\mu_{w0}$  بهدست میآید که با جایگذاری آن در معادلهٔ سوم رابطهای حاصل می شود که بهعنوان معادلهٔ نخست در مدل فضای حالت تلقی می شود:

$$\boldsymbol{\mu}_{w} = \mathbf{K}_{8}\boldsymbol{\mu}_{w} + \mathbf{K}_{9}\mathbf{w} \tag{17}$$

ماتریسهای K<sub>8</sub> و K<sub>9</sub> از روابط زیر بهدست میآیند:

$$\mathbf{K}_{8} = -\mathbf{K}_{7} (\mathbf{K}_{4} \mathbf{K}_{1}^{-1} \mathbf{K}_{2} - \mathbf{K}_{5})^{-1} \mathbf{K}_{4} \mathbf{K}_{1}^{-1} \mathbf{K}_{3} - \mathbf{K}_{6}$$
  
$$\mathbf{K}_{9} = \mathbf{K}_{7} (\mathbf{K}_{4} \mathbf{K}_{1}^{-1} \mathbf{K}_{2} - \mathbf{K}_{5})^{-1} \mathbf{K}_{4} \mathbf{K}_{1}^{-1} \mathbf{B}$$
 (14)

$$\Delta p_i^t = -\rho \left[ U_{\infty} \frac{\Delta \phi_i^t - \Delta \phi_{i-1}^t}{\Delta l_i} + \frac{\Delta \phi_i^t - \Delta \phi_i^{t-1}}{\Delta t} \right] \qquad (\lambda)$$

$$L(t) = \sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^{t} S_i, \quad M_0(t) = -\sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^{t} S_i x_i$$
(9)

که L برا و  $M_0$  ممان ایرودینامیکی حول لبهٔ حمله است.

### ۳- مدل فضای حالت زمان پیوسته

با استفاده از معادلات انتگرال مرزی و روش حل عددی اجـزای مرزی برای هر نوع هندسه بال دستگاه معـادلات زیـر را در هـر گام زمانی n میتوان نوشت،

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^n = \mathbf{f}^n \tag{1}$$

که A ماتریس ضرایب، µ بردار مجهولات بر روی جسم و دنباله و f بردار حاصل از شرط مرزی عدم نفوذ بـر روی نقـاط هـممکـانی میثم محمدی امین و همکاران

هندسه بال اصلی را درنظرمی گیریم. بال تخت معادل در واقع تصویر هندسه اصلی در صفحه  $y \cdot x$  (x در جهت وتر و y در جهت دهانه بال) است که تعداد اجزای روی آن و دنباله متناظر جهت دهانه بال) است که تعداد اجزای روی آن و دنباله متناظر با آن، مانند مسأله اصلی است. در این حالت بردارهای عمود اجزا فقط مؤلفه z دارند و ( $\alpha$ ) این حالت بردارهای عمود فرض جریان پتانسیل و کوچک بودن زاویهٔ حملهٔ مرجع و دامنهٔ فرض جریان پتانسیل و کوچک بودن زاویهٔ حملهٔ مرجع و دامنهٔ از محاسبه مجدد ماتریسهای  $\mathbf{K}_1$ - $\mathbf{K}_8$  و  $\mathbf{K}_1$ - $\mathbf{K}_8$  هندسه و نمیک از محاسبه مجدد ماتریسهای  $\mathbf{K}_1$ - $\mathbf{K}_8$  و  $\mathbf{K}_1$ - $\mathbf{K}_1$  می مددسه و شبکه بال تخت معادل به صورت زیر در میآید،

$$\mathbf{\hat{\mu}}_{w} = \mathbf{K}_{8}\mathbf{\mu}_{w} + \mathbf{K}_{9}\boldsymbol{\alpha}$$
$$\begin{bmatrix} C_{L} \\ C_{M} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{8}\mathbf{\mu}_{w} + \mathbf{L}_{9}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{L}_{7}\boldsymbol{\alpha}$$

اکنون با در نظر گرفتن  $\alpha$  بهعنوان ورودی سیستم (u)،  $\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix}$  بهعنوان بردار حالت سیستم (x) و  $\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix}$  بهعنوان  $\alpha \end{bmatrix}$ خروجی سیستم (y)، مدل فضای حالت زمان پیوسته به شکل استاندارد زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_8 & \mathbf{K}_9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_8 & \mathbf{L}_9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{L}_7 u \end{cases}$$
(19)

در این حالت زاویه حملهٔ آنی جزئی از بردار حالت سیستم است و با محاسبه حالات سیستم بهازای ورودی مشتق زمانی زاویهٔ حملهٔ مؤثر، ضرایب ایرودینامیکی ناپایا بهعنوان خروجی مدل فضای حالت تعیین خواهند شد. محاسبات فضای حالت را میتوان به کمک نرمافزارهای ریاضی به آسانی انجام داد. چنانچه گفته شد ضرایب ایرودینامیکی که به این روش بهدست میآیند، مربوط به بال تخت با ابعاد مشابه هندسه اصلی هستند. برای محاسبهٔ ضرایب ایرودینامیکی بالهای ضخیم یا انحنادار میتوان با توجه به فرض جریان پتانسیل و خطی بودن تغییرات ضرایب ایرودینامیکی نسبت به زاویهٔ حمله، حرکت از مقایسه روابط (۱۲) و (۱۳) مشخص می شود که ورودی سیستم فضای حالت از سرعت جریان آزاد و زاویهٔ حمله بهدست می آید و بردار شامل مجهولات روی اجزای دنباله غیرمتصل به جسم نشانگر حالات سیستم است. خروجی سیستم طبیعتا ضرایب ایرودینامیکی برآ و ممان هستند که از معادلهٔ برنولی ناپایا – در شکل گسسته مانند رابطه ماتریسی زیر بال نازک- محاسبه می شوند. بر این اساس رابطه ماتریسی زیر بهدست می آید:

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1 \boldsymbol{\mu}_b + \mathbf{L}_2 \, \boldsymbol{\mu}_b$$
(1 $\boldsymbol{\Delta}$ )

با استفاده از معادلات اول و دوم دستگاه معادلات (۱۱) رابطه زیر را برای **له** میتوان بهدست آورد،

$$\boldsymbol{\mu}_{b} = \mathbf{L}_{3}^{-1} \mathbf{K}_{1}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{w} - \mathbf{L}_{3}^{-1} \mathbf{K}_{1}^{-1} \mathbf{K}_{3} \boldsymbol{\mu}_{w}$$
(19)

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{L}_4 \mathbf{\mu}_w + \mathbf{L}_5 \mathbf{w} + \mathbf{L}_6 \dot{\mathbf{\mu}}_w + \mathbf{L}_7 \dot{\mathbf{w}}$$
(17)  
$$\mathbf{L}_4 = -\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{K}_3$$
  
$$\mathbf{L}_5 = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{B}$$
  
$$\mathbf{L}_6 = -\mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{K}_3$$
  
$$\mathbf{L}_7 = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{L}_8 \boldsymbol{\mu}_w + \mathbf{L}_9 \mathbf{w} + \mathbf{L}_7 \mathbf{w}$$
(1A)

که  $L_8 = L_4 + L_6 K_8 = L_5 + L_6 K_9$ و  $L_8 = L_4 + L_6 K_8$  برای بهدست آوردن مدل استاندارد فضای حالت ابتـدا بـال تخـت معـادل بـا

ناپایای بال را به صورت نوعی بخش گذرای یکسان برای بالهایی با ابعاد مشابه و با مقاطع مختلف، به اضافه بخش مرجع پایای وابسته به شکل مقطع بال در نظر گرفت. بنابراین اثر ضخامت و انحنا در تفاوت ضرایب ایرودینامیک بالها در حالت مرجع پایا خود را نشان میدهند. به این ترتیب با در اختیار داشتن مدل فضای حالت برای هر بال تخت با ابعاد مشخص میتوان بدون تکرار مراحل گفته شده، از مدل حاصل برای بالهای ضخیم و منحنی ولی با ابعاد مشابه استفاده کرد. برای این منظور کافی است ضرایب حالت پایا محاسبه شده و بیس از اختلاف آنها برای تصحیح خروجی مدل فضای حالت به صورت زیر استفاده شود:

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \delta C_L \\ \delta C_M \end{bmatrix}$$
(7.)

 $\mathcal{E}_{M} = \mathcal{E}_{Ms} - \mathcal{E}_{M0s} = \mathcal{E}_{Ls} - \mathcal{E}_{Ls} - \mathcal{E}_{L0s} \in \mathcal{E}_{Ls}$ و زیرنویسهای *s* و *0* بهترتیب برآورد در حالت پایا و بال تخت معادل را نشان میدهند. برای ایجاد مدل فضای حالت برای بال با هندسه دلخواه میتوان با توجه به معادله (۲۰) با تغییر ورودی فضای حالت (*u*) به شکل  $\begin{bmatrix} \alpha & \mathcal{E}_{L} & \mathcal{E}_{M} \end{bmatrix}^{T}$ مدل زیر را بهدست آورد:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_8 & \mathbf{K}_9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_8 & \mathbf{L}_9 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_7 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{cases}$$
(71)

شایان ذکر است که با توجه به این که محاسبات حالت پایا بدون گامبرداری زمانی و فقط با یک بار اجرای روش اجزای مرزی انجام می شوند، هزینهٔ محاسباتی چندانی ندارند. به این ترتیب برای بال داده شده، پس از تعیین ماتریس های مدل فضای حالت برای بال تخت معادل با آن، با استفاده از ورودی فضای حالت برای بال تخت معادل با آن، با استفاده از ورودی فضای حالت برای بال تخت معادل با آن، با مقادیر تصحیحی فضایب ناشی از ضخامت یا انحنای بال، خروجی مدل یعنی ضرایب ایرودینامیک ناپایای بال بدون نیاز به گامبرداری زمانی محاسبه خواهند شد.

#### ۴- نتایج و بحث

برای اعتبارسنجی روش ارائه شده، نخست نتایج حاصل از به کارگیری معادلات انتگرال مرزی توسعه داده شده برای ایرودینامیک بال نازک بررسی می شود. سپس با توجه به اعتبار نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم، نتایج مدل فضای حالت برای هر نوع هندسه و شبکه بال با حل مستقیم اجزای مرزی متناظر، مقایسه و ارزیابی می شوند. به عنوان حالت آزمایشی کلاسیک، حل جریان دوبعدی پایا حول ایرفویل نازک سهموی با انحنای 0.1 =3 را در نظر می گیریم. توزیع فشار تحلیلی از رابطهٔ زیر به دست می آید [11]:

$$\Delta C_{p} = 4 \sqrt{\frac{c - x}{x}} \alpha + 32 \frac{\varepsilon}{c} \sqrt{\frac{x}{c} (1 - \frac{x}{c})}$$
(TT)  
$$\eta/\epsilon \stackrel{1.0}{=} \underbrace{\frac{1}{00} \frac{1}{0.2 - 0.4 - 0.6 - 0.8 - 1.0}}_{x/c}$$

چنانچه در شکل (۱) دیده می شود، توزیع فشار و ضریب برآی حاصل از روش حاضر در زاویهٔ حملهٔ برابر ۱۰ درجه تطابق خوبی با نتایج عددی و تحلیلی ارائه شده در [۱۲] دارند و با افزایش تعداد المانها، تغییـر چنـدانی در نتـایج ایجاد نشده است. شایان ذکر است که برای موارد آزمایشی كلاسيك بدون انحنا، بيشترين دقت روش عددى همان دقت روش تحلیلی است. اما برای موارد غیر تخت مانند حالت آزمایشی بالا، اختلاف نتایج عددی و تحلیلی، ناشی از تفاوت محل اعمال شرط مرزی است. زیرا شرط مرزی در روش عددی بر روی سطح منحنی و در روش تحلیلی بر روی خط وتر اعمال می شود. از این رو مقایسه نتایج با حل تحلیلی در صورتی صحیح است که انحنای سطح بال کمتر از ۱۰ درصد وتر باشد، یعنی اغتشاشهای ناشی از جسم کوچک فرض شود [17]. روش این تحقیق نیز با توجه به استفاده از معادلـه برنـولی اغتشـاش کوچـک (معادلـه ۸) محـدود بـه هندسههای دارای انحنای کم است. البته تمامی روشهای مبتنی بر فرض جریان پتانسیل، کم و بیش با محدودیتهایی مشابه روبهرو هستند.



شروع است که قدرتمندترین گردابه در حرکت ناپایای بال است. بنابراین فقط با یک گام زمانی تأثیر این گردابه شروع و با دور شدن آن از بال ضریب ناپایا به مقدار پایا نزدیک می شود. منظور از دقت حل در این نوع حرکت ناپایا، توانایی روش در تسخیر رفتار در لحظات ابتدایی در مقایسه با حل کلاسیک است. تقریب جونز برای بال سهبعدی مشابه تابع واگنار و حال تئودورسون برای ایرفویل مبتنی بر روابط تحلیلی است. این تقریب مبتنے بر به کارگیری توابع نمایی برای ضرایب ایرودینامیکی بوده و در [۱۳] به تفصیل ارائه شده است. اختلاف بین منحنی محاسبه شده و نتایج کلاسیک جونز را می توان به نرخ محدود شتاب حین اولین گام زمانی نسبت داد. زیرا در حل جونز، زمان شتاب صفر و مقدار برآ بلافاصله یس از شروع حرکت ( $t = 0^+$ ) برابر بینهایت است. اثر شـتاب محـدود، افزایش تند برآ در طبی شتاب و افزایش نرم آن در لحظات بعدی است. همچنین مشابه حالت پایا مشاهده شد که تعداد اجزای روی جسم تأثیر چندانی بر حل ندارد که این رفتار ناشی از آن است که نتیجه مستقیم و نهایی پیشینه چرخش حول بال در شکل دنباله و اختلاف پتانسیل روی آن نمود می یابد. بهعلاوه چنانچه گفته شد، اندازه المانهای دنباله نیز ارتباطی مستقیم با گام زمانی دارند. شایان ذکر است که ضریب برآی حالت یایا با در نظر گرفتن المان دنباله طویل و حل اجزای مرزی مستقل از زمان بهدست میآید.







بررسی استقلال جواب از مشخصات دنباله نشان داد که طول دنباله و شکل آن تأثیر قابل ملاحظهای بر حل اجزای مرزی دارد. هرچه طول دنباله بیشتر باشد جواب به حل تحلیلی نزدیکتر میشود که این با توجه به مبتنی بودن حل تحلیلی بر دنبالهٔ بینهایت قابل انتظار است. نکته دیگر، جهت قرارگیری صفحهٔ دنباله است که از بین سه گزینهٔ مماس بر وتر، مماس برلبهٔ فرار و مماس بر جهت جریان، حالت دوم بهترین نتایج را بهدست میدهد. دلیل این را میتوان حساسیت حل اجزای مرزی به جهت بردار عمود به ویژه در محاسبهٔ ضرایب تأثیر دانست.

برای بررسی قابلیت روش مستقیم در حل جریانهای ایرودینامیکی ناپایا، حرکت ناگهانی بال تخت با ضریب منظری برابر ۶ و زاویهٔ حملهٔ ۵ درجه درنظر گرفته میشود. ۱۵۰ المان (۶ عدد در جهت دهانه و ۲۵ در جهت وتر) بر روی جسم و در دو حالت آزمایشی ۴۵۰ و ۱۸۰۰ المان بر روی دنباله به طول ده برابر وتر قرار میگیرد. همان طور که درشکل (۲) دیده میشود، نتایج بهدست آمده از روش اجزای مرزی دقت خوبی در مقایسه با تقریب نمایی جونز [۱۳] و روش حلقه گردابه در مقایسه با تقریب نمایی جونز [۱۳] و روش حلقه گردابه دارد و هرچه تعداد اجزای دنباله بیشتر شده، کیفیت تسخیر ازد و هرچه تعداد اجزای دنباله بیشتر شده است. دلیل این، وابستگی گام زمانی به اندازه اجزای دنباله از طریق معادلهٔ جابهجایی است. در حرکت ناگهانی بال از حالت سکون به سرعتی ثابت، مهمترین بخش پیشینه زمانی، گردابه لحظه دورهٔ یازدهم، شمارهٔ ۱/ بهار ۱۳۹۰

است که گام زمانی کوچکتر و درنتیجه تعداد المان بیشتری را بر روی دنباله برای بالا بردن دقت حل میطلبد. در هر دو حالت حل اجزای مرزی طول دنباله ۱۰ برابر طول وتر و تعداد المان بر روی جسم ۱۰۰ عدد درنظر گرفته شد که با افزایش اجزای روی جسم تغییری در نتایج مشاهده نشد.







شکل ۴ تغییرات ضریب نیروی عمودی ایرفویل تختدر سیکل نوسان انتقالی

برای ارزیابی مدل ایرودینامیکی فضای حالت توسعه داده شده، روندی مشابه اعتبارسنجی نتایج روش مستقیم طی میشود. با این تفاوت که کاربرد مدل فضای حالت محدود به هندسه خاصی نیست و برای بالهای ضخیم نیز قابل استفاده است. ابتدا حرکت

پس از ارزیابی روش اجزای مرزی توسعهیافته در این تحقیق در مسائل حرکت ناگهانی بال از سکون به بررسی انواع دیگر حرکت ناپایا یعنی حرکت های نوسانی پیچشی و انتقالی می یردازیم. در شکل (۳) حلقه تغییرات ضرایب برآی ایرفویل تخت در حرکت نوسان پیچ با دامنه ۱۰ درجه حول زاویه حمله ۳ درجه نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می شود با توجه به دامنه حلقه برآ و روند تغییرات، تطابق خوبی بین نتایج روش اجزای مرزی مستقیم، داده تجربی و حل روش پنل ناپایای ارائه شده در [۱۲] برای ایرفویل متقارن وجود دارد. البته هدف از این حالت آزمایشی، فقط بررسی کارایی روش اجزای مرزی مستقیم توسعهیافته در پیشبینی ضرایب ایرودینامیکی ناپایای ایرفویل نازک در حرکت نوسانی بوده و چنانچه در بخش قبل در توسعه مدل فضای حالت گفته شد برای مقایسه دقیق نتایج ايرفويل تخت با ايرفويل ضخيم بايد از جملات تصحيح براي ضرایب ایرودینامیکی استفادہ شود. دراینجا با وجبود تصحیح نشدن مقادیر روش اجزای مرزی مستقیم، اختلاف انـدکی بـین نتایج (کمتر از ۵٪) وجود دارد که این تأییدی است بـر تقریـب مهندسي تشابه تغييرات ناپايا براي ايرفويلها و بالهايي با ابعاد مشابه اما با ضخامت متفاوت که در توسعه مدل فضای حالت استفاده شد. در محاسبات اجزای مرزی، این حالت آزمایشی بهدلیل فرکانس بیبعد کم حرکت نوسانی، برای پوشش یک سیکل کامل از حرکت طول دنباله ۴۰ برابر وتر در نظر گرفته شد. مانند حالت آزمایشی قبل و به دلیلی مشابه مشاهده شد که تعداد المانهای روی جسم به خلاف تعداد اجزای دنباله تأثیری بر حل ندارند و چنانچه در شکل (۳) نیز دیده می شود، با افزایش تعداد اجزای دنباله دقت نتایج بهبود یافته است.

در شکل (۴) نتایج حاصل از محاسبهٔ ضریب نیروی عمودی ایرفویل تخت برای نوسان انتقالی در جهت عمودی با مشخصات داده شده، آورده شده است. همانطور که مشاهده میشود نتایج حاصل از محاسبه به روش حاضر در مقایسه با حل کلاسیک تئودورسون [۱۴] همچنین نتایج [۱۲] که با مدل گردابه جدا بهدست آمده از تطابق خوبی برخوردار است. همچنین با افزایش تعداد اجزای دنباله، خطای محاسبات کاهش یافته که علت آن بزرگ بودن فرکانس بی بعد نوسان ها

نایایای ناگهانی ایرفویل تخت در زاویهٔ حملهٔ ۵ درجه از حالت سکون به سرعت ثابت در نظر گرفته می شود. در شکل (۵) نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم و مدل فضای حالت متناظر بهازای دو نوع شبکه با ۱۰۰ و ۴۰۰ المان بر روی دنباله نشان داده شده است. همان طور که دیده می شود با توجه به اینکه مدل فضای حالت براساس زمان پیوسته عمل می کند با افزایش اجزای بر روی دنباله و درنتیجه کاهش گام زمانی در روش اجزای مرزی، اخـتلاف بین مدل فضای حالت و روش مستقیم کاهش یافته است. نکته بسیار مهم، دقت بیشتر مدل فضای حالت مبتنی بر دستگاه اجزای مرزی با شبکه درشت بر روی دنباله نسبت به حل اجزای مستقیم متناظر است. در واقع با شبکهای یکسان، مدل فضای حالت دقیقتری را نتیجه داده است؛ زیرا این مدل در حوزه زمان پیوسته که متناظر با گام زمانی بسیار کوچک است فرمول بندی شده است. بنابراین با استفاده از مدل فضای حالت عـلاوه بـر اینکـه نیـازی بـه گامبرداری زمانی برای محاسبات وابسته به زمان نیست، به ازای هزينه محاسباتي اوليه يكسان براي تشكيل ماتريس هاي ضرايب تأثير نتايج دقيقتري بهدست خواهد آمد.



**شکل ۵ تغ**ییرات ضریب برآی ایرفویل تخت پـس از شـروع ناگهـانی حرکت با سرعت ثابت

نمودارهای مشابه با حالت آزمایشی قبل در شکلهای (۶) و (۷) برای حرکت ناگهانی انواع ایرفویلها و بالها نشان میدهند که نتایج حاصل از مدل فضای حالت حتی با وجود شبکه درشت بر روی دنباله (۱۰۰ المان در حالت دوبعدی و

۴۰۰ المان در حالت سهبعدی) برای انواع ترکیبهای بال دقیق است.

برای اعتبارسنجی مدل فضای حالت در حرکتهای نوسانی از حرکت پیچ ایرفویل تخت – که نتایج محاسبات مستقیم آن در شکل (۳) نشان داده شد – شروع می شود. نتایج حاصل از حل اجزای مرزی و مدل فضای حالت در شکل (۸) نشان داده شده که تطابق نتایج بسیار خوب است. دلیل آن را می توان انطباق شرایط توسعه مدل فضای حالت با شرایط مسأله – که هندسه تخت بدون انحنا است– دانست. در حل این مسأله از ۱۰۰ المان بر روی بدنه و ۲۰۰ المان بر روی دنباله استفاده شد.





#### مهندسی مکانیک مدرس



شکل ۸ تغییرات ضرایب برآ و ممان حول لبهٔ حملهٔ ایرفویـل تخـت در نوسان پیچشی حول مرکز ایرودینامیکی

در شکل (۹) تغییرات ضریب نیروی عمودی محاسبه شده به دو روش مستقیم و فضای حالت با استفاده از دو نوع شبکهٔ دنباله برای حرکت انتقالی ایرفویل سهموی نشان داده شده است. مشخصات حرکت انتقالی مشابه موارد مربوط به شکل (۴) برای ایرفویل تخـت اسـت و تعـداد اجـزای روی جسـم و دنباله به ترتیب برابر ۱۰۰ و ۴۰۰ در نظر گرفته شد. همانطور که در شکل (۹) دیده می شود، با وجود انحنادار بودن ایرفویل، دقت نتایج مـدل فضـای حالـت در مقایسـه بـا حـل مستقیم مناسب است و با افزایش تعداد اجزای روی دنباله، تطابق نتایج مدل فضای حالت و حل اجزای مرزی بیشتر شده است. شایان ذکر است که با توجه به ماهیت روش اجزای مرزی ناپایا و اینکه بردار حالت سیستم در مدل فضای حالت مبتنی بر توزیع مجهولات اجزای دنباله غیرمتصل به جسم است، تعداد المان بر روی جسم تأثیری بر نتایج مـدل فضـای حالت ندارد. سرانجام برای بررسی کارایی مدل فضای حالت زمان پیوستهٔ ابداع شده در حل مسائل ناپایای پیچیده، حرکت نوسانی ترکیبی بال سهبعدی با مقطع NACA0012 و ضریب منظری ۴ بررسی شد. حرکت ناپایا شامل ترکیب نوسان انتقالی با فرکانس بی بعد ۵/۰ و دامنه نوسانات ۱/۰ وتر و نوسان پیچشی حول مرکز ایرودینامیکی با فرکانس بیبعد ۰/۳ و دامنه ۱۰ درجه حول زاویهٔ حملهٔ ۳ درجه است که

دورهٔ یازدهم، شمارهٔ ۱/ بهار ۱۳۹۰

برای حل آن از ۲۰۰ المان بر روی جسم و ۴۰۰ المان بر روی دنباله به طول ۲۰ برابر وتر استفاده شد. نتایج حاصل از حل اجزای مرزی و مدل فضای حالت متناظر در شکل (۱۰) نشان داده شده که نشان میدهند مدل فضای حالت ارائه شده، توانایی پیشبینی تغییرات ضرایب ایرودینامیکی را در حرکات ناپایای پیچیده و برای انواع هندسههای بال نازک و ضخیم دارد و با توجه به عملکرد آن در حوزه زمان پیوسته، رویکردهای زمان گسسته فقط در صورت استفاده از شبکهای ریز بر روی دنباله، به دقتی قابل مقایسه با مدل فضای حالت نزدیک می شوند.



شکل ۹ تغییرات ضریب نیروی عمودی ایرفویل سهموی در نوسان انتقالی



شکل ۱۰ تغییرات ضرایب برآ و ممان حول لبهٔ حملهٔ بال با مقطع ایرفویل NACA0012 در حرکت نوسان ترکیبی

تحلیل ایرودینامیک ناپایا با استفاده از روش ...

#### ۵- نتیجهگیری

در این مقاله به ارائه مبانی نظری و کاربرد نوعی مدل فضای حالت برای حل مسائل ایرودینامیک ناپایا در حوزه زمان پیوسته پرداخته شد. در این راستا روشی برای توسعهٔ مدلهای فضای حالت برمبنای دستگاه اجزای مرزی برای انواع ترکیبهای ایرودینامیک بال ابداع شد که به کارگیری آن در حالتهای آزمایشی مختلف، نتایج بسیار مناسبی را نشان داد. این مدلها در پایینترین سطح، حل دستگاه معادلات در هـر گام زمانی در شبیه سازی های ناپایا را حذف می کنند. به علاوه با داشتن چنین مدلی برای هندسه و شبکه مشخص، به حل مکرر مسأله ایرودینامیک به ازای حرکتهای مختلف و ترکیبهای مشابه نياز نيست؛ بلكه كافي است نرخ تغييرات زاوية حملة آني و مقادیر تصحیح ضرایب مربوط به اثر ضخامت/انحنا مشخص باشد تا ضرایب ایرودینامیکی لحظهای را بتـوان محاسـبه کـرد. کارامدی محاسبات بهویـژه در صورت مسـتقل از زمـان بـودن ضرایب تأثیر، بسیار بالا خواهد بود. این ضرایب در عمـل وقتـی حرکت شامل نوسان،هایی کوچک حول یک ترکیب مرجع حالت پایا باشد و سطح دنباله بهطور صلب بـه سـطح جسـم متصـل فرض شود، ثابت هستند. سرانجام با توجه به توسعهٔ مدل فضای حالت در حوزهٔ زمان پیوسته، این نوع مدل های ایرودینامیکی بهویژه در مسائل طراحی، بهینهسازی و کنترل ایروالاستیک مفيد خواهند بود.

# ۶-پیوست الف. محاسبهٔ تحلیلی ضرایب تأثیر

در حل اجزای مرزی جریان حول ایرفویل نازک با اختلاف پتانسیل ثابت بر روی هر المان (معادلهٔ ۷) انتگرالی برای ضرایب تأثیر در حالت دوبعدی بهدست میآید که در مختصات محلی به شکل زیر نوشته میشود:

$$\int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n} (\nabla G) dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \right) dx$$

$$= \lim_{x_1} (r_i = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*\| - \|\mathbf{x}_i - \|\mathbf{$$

1 . .

$$\frac{\partial \mu_W}{\partial t} = U_\infty \frac{\partial \mu_W}{\partial x}$$

$$\int \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \right) dx$$
$$= \frac{z - z_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \mathbf{i} - \frac{x - x_*}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2} \mathbf{k}$$

میثم محمدی امین و همکاران

درنتیجه انتگرال معین در مختصات محلی بهدست می آید:

$$\int_{x_{1}}^{x_{2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{*}}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{*}\|^{2}} \right) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{z_{*} - z_{1}}{r_{1}^{2}} - \frac{z_{*} - z_{2}}{r_{2}^{2}} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{x_{*} - x_{2}}{r_{2}^{2}} - \frac{x_{*} - x_{1}}{r_{1}^{2}} \right) \mathbf{k}$$

برای حالت سهبعدی نیز با فرض اختلاف پتانسیل ثابت بر روی المان چهاروجهی تخت میتوان انتگرالهای ضرایب تـأثیر را بهصورت تحلیلی بهدست آورد که برای اختصار مـیتوانـد بـه شکل برداری زیر نوشته شود،

$$\begin{split} &\iint \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_*}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^3} \right) ds = \\ &- \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{4\pi \|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|^2} \left( \frac{\mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|} - \frac{\mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|} \right) - \frac{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3}{4\pi \|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3\|^2} \left( \frac{\mathbf{r}_{32} \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|} - \frac{\mathbf{r}_{32} \cdot \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|} \right) \\ &- \frac{\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4}{4\pi \|\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_4\|^2} \left( \frac{\mathbf{r}_{43} \cdot \mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|} - \frac{\mathbf{r}_{43} \cdot \mathbf{r}_4}{\|\mathbf{r}_4\|} \right) - \frac{\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_1}{4\pi \|\mathbf{r}_4 \times \mathbf{r}_1\|^2} \left( \frac{\mathbf{r}_{14} \cdot \mathbf{r}_4}{\|\mathbf{r}_4\|} - \frac{\mathbf{r}_{14} \cdot \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|} \right) \end{split}$$

www.SID.ir

دورهٔ یازدهم، شمارهٔ ۱/ بهار ۱۳۹۰

- [7] Zhao, Y.H., Hu, H.Y., "Aeroelastic Analysis of a Non-linear Airfoil Based on Unsteady Vortex Lattice Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 276, pp. 491–510, 2004.
- [8] Mor, M., Livne, E., "State-Space Unsteady Aerodynamics for Aeroservoelastic Configuration Shape Optimization of Flight Vehicle", 45<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics & Materials Conference, California, USA, 2004.
- [9] Gaunaa, M., "Unsteady 2D Potential-flow Forces on Thin Variable Geometry Airfoil Undergoing Arbitrary Motion", Risø–R–1478, Risø National Lab., Denmark, 2006.
- [10] Mohammadi-Amin, M., Razi, M., Ghadiri, B., "Aeroelastic Analysis of a Swept Wing Containing Cubic and Freeplay Nonlinearities in a Subsonic Compressible Flow", Proceedings of 9th Conference on Flow-Induced Vibration, pp. 501-506, Czech Republic, 2008.
- [11] Yang, S.C., Luo, S.J., Liu, F., Tsai, H.M., "Optimization of Unstalled Pitching and Plunging Motion of an Airfoil", AIAA Paper 2006-1055, Jan. 2006.
- [12] Katz, J., Low Speed Aerodynamics, Cambridge University Press, 2001.
- [13] Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., Halfman, R.L., Aeroelasticity, Dover Science Books, 1996.
- [14] Theodorsen, T., "General Theory of Aerodynamical Instability and Mechanism of Flutter", NACA Report 496, 1935.

بنابراین با درنظر گرفتن شکل ماتریسی این رابطه و ایجاد ارتباط بین مقادیر  $\mu_{\Omega}$  بر روی اجزای غیرمتصل به لبهٔ فرار با س $\Box$  مربوط به المانهای متصل به لبهٔ فرار میتوان با حفظ مشتق زمانی غیر گسسته رابطه زیر را بهدست آورد،

 $\mathbf{K}_{6}\mathbf{\mu}_{w} - \mathbf{K}_{7}\mathbf{\mu}_{w_{0}} = \mathbf{\mu}_{w}$ 

۸- منابع

- Morino, L., Gennaretti, M., "Boundary Integral Equation Method for Aerodynamics", Progress in Astronautics and Aeronautics 146, pp. 279-320, 1992.
- [2] Morino, L., Gennaretti, M., Iemma, U., Salvatore, F., "Aerodynamics & Aeroacoustics of Wings and Rotors via BEM - Unsteady, Transonic, & Viscous Effects", Computational Mechanics, Vol.21, pp. 265-275, 1998.
- [3] Morino, L., Gennaretti, M., Bernardini, G., "a Method Boundary Element for the of Aircraft Aerodynamic Analysis in Arbitrary Motions", Computational Mechanics, Vol.32, pp. 301-311, 2003.
- [4] Behbahni-Nejad, M., "Reduced order modeling of 3D unsteady flows using fluid eigenmodes and boundary element method", PhD Dissertation, University of Tehran, Tehran, Iran, 2002.
- [5] Shahverdi, H., Nobari, A.S., Behbahani-Nejad, M., Haddadpour, H., "an Efficient Reduced-Order Modeling Approach Based on Fluid Eigenmodes and Boundary Element Method", Journal of Fluids and Structures, Vol. 23, pp. 143-153, 2007.
- [6] Haddadpour, H., Behbahani-Nejad, M., Firouz-Abadi, R.D., "Reduced-Order Aerodynamic Model for Aeroelastic Analysis of Complex Configurations in Incompressible Flow", AIAA Journal of Aircraft, Vol. 44, pp. 1015-1017, 2007.