http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۱ شماره ۱ بهار ۱۳۹۰ ص ص ۸۹-۱۰۱

تاریخچه مقاله:
دریافت ۸۹/۵/۳
پذیرش ۹۰/۳/۲۸
ارائه در سایت ۹۰/۳/۳۱

تحلیل ایرودینامیک ناپایا با استفاده از روش اجزای مرزی و مدل‌سازی فضای حالت زمان پیوسته

میثم محمدی امین[۱]، بهزاد قدیری[۲]*، حسن حدادپور[۳]

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس
۳- دانشیار مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف
*تهران، صندوق پستی ۱۴۱۱۵-۱۴۳. ghadirib@modares.ac.ir

چکیده- در این مقاله نوعی مدل ایرودینامیکی فضای حالت زمان پیوسته بر اساس روش اجزای مرزی مستقیم توسعه داده شده است. برای این منظور ابتدا معادلات انتگرال مرزی حاکم بر جریان پتانسیل زیرصوت ناپایا حول ترکیب‌های برآزا با تأکید بر فرمول‌بندی اصلاح شده برای بال‌های نازک ارائه می‌شود. سپس براساس دستگاه معادلات اجزای مرزی جریان ایرودینامیکی ناپایا حول بال با هندسه دلخواه و با استفاده از فرضیات کمکی، مدل فضای حالت ایجاد می‌شود. برای ارزیابی دقت و کارایی روش ارائه شده، نتایج به‌دست آمده از مدل‌سازی ضرایب ایرودینامیک ناپایا برای انواع ایرفویل و بال برای حرکت‌های ناپایای مختلف با نتایج اعتبارسنجی‌شده حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم مقایسه و تطابق خوبی مشاهده شد. با توجه به این که مدل ایرودینامیکی توسعه‌یافته در حوزه زمان پیوسته ارائه شده، این مدل به‌ویژه برای کاربردهای بهینه‌سازی و تحلیل غیرخطی مفید است. به‌علاوه توصیف فضای حالت، امکان بهره‌گیری کارامد از این مدل را در مسائل مرتبط با کنترل نیز فراهم می‌سازد.

کلیدواژگان: مدل فضای حالت زمان پیوسته، مدل‌سازی ایرودینامیکی فضای حالت، روش اجزای مرزی، ایرودینامیک ناپایا.

Unsteady Aerodynamic Analysis using Boundary Element Method and Continuous-Time State-Space Modeling

M. Mohammadi-Amin[1], B. Ghadiri[2*], H. Haddadpour[3]

1- Ph. D. student, Department of Mechanical Eng, Tarbiat Modares Univ.
2- Assistant Professor, Department of Mechanical Eng, Tarbiat Modares Univ.
3- Associate Professor, Faculty of Aerospace Eng, Sharif Univ. of Tech.
*P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran. ghadirib@modares.ac.ir

Abstract- In this paper a continuous-time state-space aerodynamic model has been developed based on the boundary element method. First, boundary integral equations for unsteady potential subsonic flow around lifting bodies are presented with emphasis on a modified formulation for thin wings. Next, the BEM discretized problem of unsteady flow around an arbitrary wing is recast in the form of a state-space model using some auxiliary assumptions. To validate the proposed model, its predictions for unsteady aerodynamic coefficients due to various unsteady flows about different wing geometries were compared to the verified results of the direct boundary element solution and good agreement was observed. Because of the resulting aerodynamic model has been constructed in the continuous-time domain, it is particularly useful for optimization and nonlinear analysis purposes. Moreover, its state-space representation is the appropriate form for an aerodynamic model in control applications.

Keywords: Continuous-Time State-Space Model, State-Space Aerodynamics Modeling, Boundary Element Method, Unsteady Aerodynamics.

۱- مقدمه

توسعه رویکردهای محاسباتی کارامد برای مسائل ایرودینامیک ناپایا همواره مورد توجه بسیاری از محققان بوده که دلیل اصلی آن، نیاز به کاهش هرچه بیشتر هزینهٔ محاسباتی بخش ایرودینامیک در مسائل چندوجهی مانند طراحی، بهینه‌سازی و ایروالاستیسیته است. روش اجزای مرزی یکی از این رویکردهاست که به دلیل کاهش ابعاد مسأله محاسباتی, قابلیت حل جریان حول هندسه‌های نزدیک به ترکیب واقعی وسایل پرنده با هزینه‌ای به مراتب کمتر از رویکردهای CFD دامنه‌مبنا را دارد. این روش در طی دو دهه اخیر در زمینه‌های مختلف توسعهٔ چشمگیری یافته و به‌طور گسترده‌ای در کاربردهای گوناگون هوافضا مانند تحلیل ایرودینامیکی در رژیم‌های مختلف جریان به‌کار گرفته شده است [۱-۳]. همچنین تحقیقات ارزشمندی در زمینه توسعه مدل‌های رتبه کاسته ایرودینامیکی بر اساس روش اجزای مرزی صورت گرفته است [۴-۶]. در [۴] با استفاده از مودهای ویژه جریان و روش تصحیح استاتیک، مدل‌های رتبه کاسته مود ویژه برای جریان پتانسیل ناپایا حول بال‌های ضخیم دوبعدی و سه‌بعدی توسعه داده شده است. این رویکرد در [۵] با ایجاد مسأله مقدار ویژه بر اساس تنها مجهولات مربوط به دنباله اصلاح و کارایی محاسباتی آن بهبود داده شده است. همچنین نتیجه گرفته شده که در مدل‌سازی رتبه کاسته اصلاح‌شده، نیازی به تصحیح استاتیک وجود ندارد. در [۶] محاسبات مودهای ایرودینامیکی که در [۴] به‌صورت زمان گسسته ارائه شده، با عملیات جبری ماتریسی به حوزه زمان پیوسته تبدیل شده است. در این عملیات معادله مربوط به بخش شبه‌استاتیک حل، در درون محاسبات بخش دینامیک ادغام شده و به این ترتیب نیاز به تصحیح استاتیک نیز برطرف شده است [۶]. در تحقیق حاضر بدون نیاز به استفاده از معادلات مختصات مودال و فقط بر اساس استفاده از شکل زمان پیوسته معادله کلوین (معادله انتقال برای اختلاف پتانسیل بر روی سطح دنباله) مدل ایرودینامیک اجزای مرزی مستقیم در حوزه زمان پیوسته فرمول‌بندی شده است. مدل زمان پیوسته در بسیاری از مسائل مورد نیاز و مفید است. به‌عنوان مثال در بهینه‌سازی یا تحلیل غیرخطی ایروالاستیک بال به مدلی دقیق از نیروهای ایرودینامیکی ناپایا نیاز است، زیرا این نوع تحلیل‌ها باید از عهده وابستگی بین نیروهای ایرودینامیکی و پاسخ سازه برآیند و مدل باید به ویژه در تحلیل ایروالاستیک غیرخطی، شکل ایرودینامیکی مناسبی در حوزه زمان پیوسته داشته باشد [۷]. از سوی دیگر در کاربردهایی مانند طراحی و کنترل ایروالاستیک نیز مدل ایرودینامیکی در شکل فضای حالت بسیار مطلوبتر و کارامدتر از رویه اجزای مرزی معمول است [۸]. در این تحقیق برای ایجاد مدل فضای حالت زمان پیوسته در شکل استاندارد بر اساس روش اجزای مرزی، مسألهٔ ایرودینامیک بال‌های ضخیم به‌صورت تصحیح ضرایب ایرودینامیک بال تخت معادل با استفاده از اختلاف مقادیر حالت پایا مربوط به دو هندسه اصلی و معادل، مدل‌سازی شده است. برای محاسبات ضرایب ایرودینامیک بال تخت، معادلات انتگرال مرزی که فقط برای بال‌های ضخیم قابل استفاده است، به‌گونه‌ای اصلاح می‌شود که امکان به‌کارگیری روش اجزای مرزی برای بال‌های نازک نیز فراهم شود. به این ترتیب علاوه بر اینکه محاسبات یکپارچه انواع بال با ضخامت دلخواه با استفاده از یک برنامهٔ اجزای مرزی قابل انجام است، شرایط لازم برای ایجاد مدل فضای حالت استاندارد نیز ایجاد می‌شود.

شایان ذکر است که کاربرد روش اجزای مرزی به‌عنوان روشی عددی در حل معادلات انتگرال مرزی، قابل مقایسه با روش ایرودینامیکی پنل در صورت استفاده از توزیع عناصر دابلت و چشمه است. هرچند با وجود شباهتهای بین دو روش، فرمول‌بندی و نحوه به‌کارگیری عددی آنها متفاوت است. در هر دو روش امکان بکارگیری عناصر ثابت، خطی و مرتبه بالاتر وجود دارد. اما قابلیت توسعهٔ فرمول‌بندی روش اجزای مرزی به رژیم گذرصوت و همچنین عمومی‌تر بودن فرمول‌بندی عددی در آن موجب می‌شود که این رویکرد بسیار مطلوبتر از روش پنل به‌ویژه در مسائل چندوجهی باشد. از سویی بکارگیری هر دو روش پنل و اجزای مرزی، محدود به هندسه‌های ضخیم است و در مورد بال‌های نازک معمولا روش‌های مبتنی بر توزیع‌گردابه استفاده می‌شوند. البته، محدودیت به‌کارگیری روش اجزای مرزی برای بال‌های نازک (تخت یا منحنی) در

تحقیق حاضر با اصلاح معادلات انتگرال مرزی برطرف شده است. در برخی مراجع مانند [۱] روش پنل را روش اجزای مرزی غیرمستقیم نامیده‌اند زیرا بر یافتن توزیع مناسب عناصر تکین برای ارضای معادلات و شرایط مرزی مبتنی است. درحالی‌که روش اجزای مرزی مستقیم که در این تحقیق نیز استفاده شده است، بر گسسته‌سازی و حل مستقیم معادلات انتگرال مرزی برای محاسبه توزیع پتانسیل سرعت روی سطح جسم و دنباله آن مبتنی است. بنابراین به زعم نویسندگان بهتر است در مقالات علمی نوع روش استفاده شده به دقت گفته شود.

در ادامه پس از ارائه معادلات انتگرال مرزی در بخش بعدی به نحوه ایجاد مدل فضای حالت زمان پیوسته بر اساس دستگاه معادلات اجزای مرزی برای بال با هندسه دلخواه می‌پردازیم. سپس نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم و مدل فضای حالت در دو بخش جدا بررسی و ارزیابی می‌شود. در این راستا نتایج روش اجزای مرزی مبتنی بر معادلات انتگرال مرزی ارائه شده در تحقیق حاضر برای بال‌های تخت با نتایج عددی و تحلیلی مقایسه و اعتبارسنجی می‌شوند. پس از اطمینان از کارایی و دقت روش عددی در موارد مختلف، براساس آن، به ایجاد مدل فضای حالت برای ایرودینامیک انواع بال با هندسه‌های گوناگون و مقایسه نتایج حاصل با حل مستقیم اجزای مرزی اعتبارسنجی‌شده پرداخته می‌شود. سرانجام پس از جمع‌بندی سیر تحقیق انجام‌شده، به نکات مهم قابل نتیجه‌گیری اشاره می‌شود.

۲- معادلات انتگرال مرزی

فرمول‌بندی انتگرال مرزی که در این بخش ارائه می‌شود مبتنی بر فرض‌های معمول برای جریان پتانسیل ناپایا یعنی جریان غیرلزج، غیرچرخشی و تراکم‌ناپذیر است. از نظر فیزیکی این فرضها برای جریان با عدد رینولدز بالا و عدد ماخ پایین در زاویه حمله کوچک قابل قبول است [۹]. هرچند، برای جریان‌های با عدد ماخ تا ۰/۶ نیز امکان اعمال تصحیح تراکم‌پذیری از طریق به‌کارگیری مختصات پرنتل- گلاورت وجود دارد [۱۰]. معادلات ناویراستوکس برای جریان پتانسیل به معادله لاپلاس ساده می‌شوند. با شروع از قضیه دوم گرین و با استفاده از شرط مرزی در بینهایت، می‌توان به این نتیجه رسید که هر تابعی که معادلهٔ لاپلاس را برای جریان پتانسیل ناپایا حول بال ضخیم ارضا کند، معادلهٔ انتگرال مرزی زیر برحسب پتانسیل اغتشاشی را نیز ارضا خواهد کرد [۱]:

$$E(\mathbf{x}_*,t_*)\phi(\mathbf{x}_*,t_*) = \oiint_{S_B}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}G - \phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS - \iint_{S_W}\Delta\phi\frac{\partial G}{\partial n}dS \qquad (۱)$$

که در آن G حل اساسی برای عملگر لاپلاس، n بردار برونسوی عمود بر سطح (بسته) جسم S_B و سطح (باز) دنباله S_W و E ضریبی است که با توجه به موقعیت نقطه بار تعیین می‌شود.

در تحقیقات پیشین [۱-۴] با استفاده از حل اجزای مرزی معادله (۱) جریان ناپایا حول ایرفویل‌ها و بال‌های دارای ضخامت تحلیل شده است. برای این منظور پس از گسسته‌سازی معادله بالا براساس فرمول‌بندی اجزای مرزی معیّن، با اعمال شرط عدم نفوذ بر روی جسم، شرط کوتا در لبه فرار و تئوری کلوین بر روی دنباله، دستگاه معادلات جبری برای مجهولات توزیع پتانسیل بر روی جسم و اختلاف پتانسیل بر روی دنباله به‌دست می‌آید. اما به‌کارگیری رویکردی مشابه برای بال‌های نازک بدون اعمال اصلاحاتی چند نامکن است. زیرا در صورتی‌که ضخامت هندسه‌ای که المان‌های مرزی بر روی آن قرار گرفته‌اند کوچک باشد، نقاط هم‌مکانی در سطوح بالایی و زیرین بال بیش از حد به یکدیگر نزدیک شده و محاسبات ضرایب تأثیر را با مشکل روبه‌رو می‌سازند. همچنین درصورتی‌که نقاط هم‌مکانی نزدیک به هم منطبق در نظر گرفته شوند، با توجه به وجود دو بردار عمود یکسان اما در جهات مخالف در هر نقطه از سطح بال اعمال شرط مرزی عدم نفوذ موجب ناسازگاری در دستگاه معادلات خواهد شد. بنابراین باید به نوعی در معادله انتگرال مرزی (۱)، تعریف بردار عمود بر سطح جسم و نحوه تشکیل دستگاه معادلات اجزای مرزی با استفاده از شرط مرزی عدم نفوذ اصلاحاتی صورت پذیرد تا بتوان از روش اجزای مرزی برای ترکیب‌های برآزای نازک نیز استفاده کرد. برای این منظور ابتدا با توجه به ضخامت ناچیز جسم، مشابه فرضی که در توسعه معادلهٔ (۱) برای سطح دنباله

انجام می‌شود، بال به شکل سطح ناپیوستگی در نظر گرفته می‌شود. سپس دو روی سطح بسته S'_B احاطه کننده سطح بال S_B بینهایت به جسم نزدیک می‌شوند. در این فرایند، S'_B با دو روی سطح S_B یا به اصطلاح سطح خیس بال جایگزین می‌شود. با فرض جهت رو به بالا برای بردار عمود n درحالت حدی داریم،

$$\oiint_{S'_B} \phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_B} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \qquad (۲)$$

که $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$؛ درحالی‌که با توجه به شرط مرزی حاکم بر سطح ناپیوستگی در جریان پتانسیل داریم:

$$\oiint_{S'_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} G dS = \iint_{S_B} \Delta\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) G dS = 0 \qquad (۳)$$

بنابراین معادلهٔ انتگرال مرزی (۱) برای جریان حول بال نازک به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$E(x_*,t_*)\phi(x_*,t_*) = -\iint_{S_B+S_W} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \qquad (۴)$$

که S_B به‌خلاف حالت بال ضخیم، یک سطح باز است. در معادلهٔ (۱) ضریب E برای نقاط خارج از مرز عدد یک است و برای نقاط روی مرز براساس مقدار اصلی کوشی[1] و رفع تکینگی انتگرال‌های مرزی بر روی این نقاط به‌دست می‌آید [۱]. در اینجا با توجه به نبود متغیر پتانسیل در سمت راست معادلهٔ (۴) ضریب E برابر یک فرض، اما عبارتی به سمت راست اضافه می‌شود که حاصل حذف تکینگی از انتگرالهای مرزی است:

$$\phi(x_*,t_*) = -\iint_{S_B+S_W} \Delta\phi \frac{\partial G}{\partial n} dS \pm \left.\frac{\Delta\phi}{2}\right|_{x_* \in S_B} \qquad (۵)$$

که علامت مثبت مربوط به روی بال و منفی مربوط به سطح زیرین بال می‌شود. معادله (۵) را در صورت معلوم بودن توزیع اختلاف پتانسیل بر روی سطح جسم و دنباله، می‌توان برای ارزیابی پتانسیل در نقاط داخل دامنه غیرواقع بر روی مرز استفاده کرد. اما برای تعیین توزیع اختلاف پتانسیل بر روی مرز شامل بال و دنباله این معادله قابل استفاده نیست، زیرا به‌خلاف حالت بال ضخیم - که با داشتن $\partial\phi/\partial n$ بر روی S_B (شرط مرزی نیومن) دستگاه معادلات برای ارزیابی ϕ روی S_B و $\Delta\phi$ روی S_W به‌دست می‌آید- در اینجا مشتق عمود پتانسیل وجود ندارد. همچنین روی سطح جسم دو مجهول پتانسیل و اختلاف پتانسیل داریم که تعداد مجهولات را بیش از تعداد معادلات می‌سازد. برای حل این مشکلات می‌توان از معادلهٔ (۵) نسبت به جهت عمود بر سطح مشتق گرفت و با توجه به شرایط مشتق‌گیری برداری رابطه زیر را نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_*,t_*) = \nabla\phi.\mathbf{n} = -\left(\iint_{S_B+S_W} \Delta\phi \frac{\partial}{\partial n}(\nabla G) dS\right).\mathbf{n} \qquad (۶)$$

که ∇G در حالت دوبعدی برابر $\mathbf{r}/2\pi r^2$ و در حالت سه‌بعدی برابر $\mathbf{r}/4\pi r^3$ است. اکنون با استفاده از شرط عدم نفوذ در هر نقطه از روی بال ($\partial\phi/\partial n = -\mathbf{v}_\infty.\mathbf{n}$) می‌توان دستگاه معادلاتی را برای تعیین مجهولات اختلاف پتانسیل بر روی سطح بال و دنباله تشکیل داد. برای این منظور می‌توان پس از گسسته‌سازی مرز به اجزای دارای اختلاف پتانسیل ثابت در سطح المان و با به‌کارگیری روش هم‌مکانی (نقطه هم‌مکانی در مرکز المان) روابط زیر را برای تشکیل دستگاه معادلات مرزی به‌دست آورد:

$$\chi_k(t) = \sum_{m=1}^{NB+NW} C_{km}(t)\Delta\phi_m(t) \qquad (۷)$$

که $\chi_k = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_k$ و $C_{km} = -\left(\iint_{S_m} \frac{\partial}{\partial n}(\nabla G) dS\right).\mathbf{n}_m$.

در معادلهٔ (۷) C_{km} ضرایب تأثیر است که به‌صورت عددی یا تحلیلی (پیوست الف) ارزیابی می‌شوند. در روش اجزای مرزی برای ایرودینامیک بال‌های ضخیم به‌منظور دستیابی به حل یکتا (در حالت دوبعدی) و برقراری ریزش ورتیسیته از بال به دنباله اعمال شرط کوتا در لبه فرار ضروری بود. این شرط از نظر فیزیکی یعنی این که جریان، لبه فرار را به آرامی ترک می‌کند و سرعت در آن نقطه محدود است و می‌تواند چنین تفسیر شود که جریان، لبهٔ فرار را در امتداد خط نیمساز زاویهٔ

1. Cauchy Principal Value

لبهٔ فرار ترک می‌کند. برای وارد ساختن شرط کوتا در روند حل اجزای مرزی برای بال‌های ضخیم، اختلاف پتانسیل هر المان دنباله متصل به لبهٔ فرار، برابر با تفاضل مقادیر پتانسیل بر روی المان‌های متناظر بالا و زیر بال قرار داده می‌شود. در حالت بال نازک که حاصل حل دستگاه معادلات مقادیر اختلاف پتانسیل بر روی اجزای بال است، اختلاف پتانسیل المان‌های بال و دنباله متصل به لبهٔ فرار متناظر، برابر فرض می‌شوند. به این ترتیب با اعمال شرط کوتا به المان‌های دنباله متصل به لبه فرار، معادله‌ای اضافی خواهیم داشت و دستگاه معادلات برای حل پایا بسته خواهد شد. اگر حل وابسته به زمان یا ناپایا مورد نظر باشد، سطح دنباله باید در جهت جریان نیز گسسته‌سازی شود و مشابه حالت بال ضخیم براساس تئوری کلوین، اختلاف پتانسیل هر ردیف المان دنباله غیرمتصل به لبه فرار برابر با مقادیر اختلاف پتانسیل ردیف قبلی المان‌ها در گام زمانی قبل قرار داده شوند. در هر حالت پس از حل دستگاه معادلات توزیع اختلاف پتانسیل بر روی سطح بال به‌دست می‌آید. سپس با داشتن توزیع اختلاف پتانسیل با استفاده از روابط زیر توزیع فشار و نیروهای ایرودینامیکی تعیین می‌شوند:

$$\Delta p_i^t = -\rho\left[U_\infty \frac{\Delta\phi_i^t - \Delta\phi_{i-1}^t}{\Delta l_i} + \frac{\Delta\phi_i^t - \Delta\phi_i^{t-1}}{\Delta t}\right] \qquad (۸)$$

$$L(t) = \sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^t S_i\,,\;\; M_0(t) = -\sum_{i=1}^{NB} \Delta p_i^t S_i x_i \qquad (۹)$$

که L برا و M_0 ممان ایرودینامیکی حول لبهٔ حمله است.

۳- مدل فضای حالت زمان پیوسته

با استفاده از معادلات انتگرال مرزی و روش حل عددی اجزای مرزی برای هر نوع هندسه بال دستگاه معادلات زیر را در هر گام زمانی n می‌توان نوشت،

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^n = \mathbf{f}^n \qquad (۱۰)$$

که $\mathbf{A}$ ماتریس ضرایب، μ بردار مجهولات بر روی جسم و دنباله و $\mathbf{f}$ بردار حاصل از شرط مرزی عدم نفوذ بر روی نقاط هم‌مکانی جسم است. برای توسعه مدل فضای حالت زمان پیوسته ابتدا دستگاه معادلات (۱۰) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_1\boldsymbol{\mu}_\mathbf{b} + \mathbf{K}_2\boldsymbol{\mu}_{w_0} + \mathbf{K}_3\boldsymbol{\mu}_w = \mathbf{Bw} \\ \mathbf{K}_4\boldsymbol{\mu}_\mathbf{b} + \mathbf{K}_5\boldsymbol{\mu}_{w_0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_6\boldsymbol{\mu}_w - \mathbf{K}_7\boldsymbol{\mu}_{w_0} = \dot{\boldsymbol{\mu}}_w \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که در آن بردار μ به سه بردار مجهولات بر روی اجزای جسم (μ_b)، مجهولات روی اجزای دنبالهٔ متصل به لبه فرار (μ_{w0}) و مجهولات روی اجزای دنبالهٔ غیر متصل به جسم (μ_w) تقسیم شده است. معادلهٔ اول در دستگاه (۱۱) حاصل از گسسته‌سازی معادلهٔ انتگرال مرزی برای نقاط هم‌مکانی روی جسم است که در آن $\boldsymbol{B} = U_\infty\,[\mathbf{n}_{bx},\mathbf{n}_{bz}]$ و $\mathbf{w} = [\cos\alpha(t),\ \sin\,\alpha(t)]$ که $\alpha(t)$ زاویهٔ حمله لحظه‌ای مؤثر است که براساس زاویهٔ حملهٔ مرجع α_0 و مشخصات حرکات ناپایا به‌دست می‌آید [۱۱]. معادلات دوم و سوم دستگاه معادلات (۱۱) نیز از اعمال شرط کوتا در مورد اجزای دنبالهٔ متصل به لبهٔ فرار و ریزش ورتیسیته در مورد دیگر اجزای دنباله به‌دست می‌آیند (پیوست ب). شکل استاندارد مدل فضای حالت زمان پیوسته به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad (۱۲)$$

که برطبق تعریف x دربردارندهٔ حالت‌های سیستم، u متغیر ورودی و y متغیر خروجی سیستم است. با استفاده از معادلات اول و دوم دستگاه (۱۱) رابطه‌ای برای μ_{w0} به‌دست می‌آید که با جایگذاری آن در معادلهٔ سوم رابطه‌ای حاصل می‌شود که به‌عنوان معادلهٔ نخست در مدل فضای حالت تلقی می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_w = \mathbf{K}_8\boldsymbol{\mu}_w + \mathbf{K}_9\mathbf{w} \qquad (۱۳)$$

ماتریس‌های $\mathbf{K_8}$ و $\mathbf{K_9}$ از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_8 &= -\mathbf{K}_7(\mathbf{K}_4\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_5)^{-1}\mathbf{K}_4\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_6 \\ \mathbf{K}_9 &= \mathbf{K}_7(\mathbf{K}_4\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_5)^{-1}\mathbf{K}_4\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{B} \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

از مقایسه روابط (۱۲) و (۱۳) مشخص می‌شود که ورودی سیستم فضای حالت از سرعت جریان آزاد و زاویهٔ حمله به‌دست می‌آید و بردار شامل مجهولات روی اجزای دنباله غیرمتصل به جسم نشانگر حالات سیستم است. خروجی سیستم طبیعتا ضرایب ایرودینامیکی برآ و ممان هستند که از معادلهٔ برنولی ناپایا - در شکل گسسته مانند رابطه (۸) برای بال نازک- محاسبه می‌شوند. بر این اساس رابطه ماتریسی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{L_1}\boldsymbol{\mu}_b + \mathbf{L_2}\dot{\boldsymbol{\mu}}_b \qquad (۱۵)$$

با استفاده از معادلات اول و دوم دستگاه معادلات (۱۱) رابطه زیر را برای $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{b}$ می‌توان به‌دست آورد،

$$\boldsymbol{\mu}_\mathbf{b} = \mathbf{L_3^{-1}K_1^{-1}Bw - L_3^{-1}K_1^{-1}K_3}\boldsymbol{\mu}_\mathbf{w} \qquad (۱۶)$$

که در آن $\mathbf{L_3 = I - K_1^{-1}K_2K_5^{-1}K_4}$. با مشتق‌گیری از رابطه (۱۶) و جایگذاری در معادلهٔ (۱۵) این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{L}_4\boldsymbol{\mu}_w + \mathbf{L_5 w} + \mathbf{L}_6\dot{\boldsymbol{\mu}}_w + \mathbf{L_7}\dot{\mathbf{w}} \qquad (۱۷)$$

که در آن:

$$\mathbf{L_4 = -L_1L_3^{-1}K_1^{-1}K_3}$$
$$\mathbf{L_5 = L_1L_3^{-1}K_1^{-1}B}$$
$$\mathbf{L_6 = -L_2L_3^{-1}K_1^{-1}K_3}$$
$$\mathbf{L_7 = L_2L_3^{-1}K_1^{-1}B}$$

و با استفاده از معادلهٔ (۱۳) می‌توان رابطه (۱۷) را به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{L}_8\boldsymbol{\mu}_w + \mathbf{L_9 w} + \mathbf{L_7}\dot{\mathbf{w}} \qquad (۱۸)$$

که $\mathbf{L_8 = L_4 + L_6K_8}$ و $\mathbf{L_9 = L_5 + L_6K_9}$. برای به‌دست آوردن مدل استاندارد فضای حالت ابتدا بال تخت معادل با هندسه بال اصلی را درنظرمی‌گیریم. بال تخت معادل در واقع تصویر هندسه اصلی در صفحه x-y (x در جهت وتر و y در جهت دهانه بال) است که تعداد اجزای روی آن و دنباله متناظر با آن، مانند مسأله اصلی است. در این حالت بردارهای عمود اجزا فقط مؤلفه z دارند و $\mathbf{Bw} = U_\infty \mathbf{n_z}\sin(\alpha)$. با توجه به فرض جریان پتانسیل و کوچک بودن زاویهٔ حملهٔ مرجع و دامنهٔ تغییرات ناپایا، $\mathbf{w}$ به α ساده شده و معادلات (۱۳) و (۱۸) پس از محاسبه مجدد ماتریس‌های $\mathbf{K_1}$-$\mathbf{K_8}$ و $\mathbf{L_1}$-$\mathbf{L_8}$ برای هندسه و شبکه بال تخت معادل به‌صورت زیر در می‌آید،

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_w = \mathbf{K}_8\boldsymbol{\mu}_w + \mathbf{K}_9\alpha$$
$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{L}_8\boldsymbol{\mu}_w + \mathbf{L}_9\alpha + \mathbf{L_7}\dot{\alpha}$$

اکنون با در نظر گرفتن $\dot{\alpha}$ به‌عنوان ورودی سیستم (u)، $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_\mathbf{w} \\ \alpha \end{bmatrix}$ به‌عنوان بردار حالت سیستم (x) و $\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix}$ به‌عنوان خروجی سیستم (y)، مدل فضای حالت زمان پیوسته به شکل استاندارد زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_8} & \mathbf{K_9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{L_8} & \mathbf{L_9} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \mathbf{L_7} u \end{cases} \qquad (۱۹)$$

در این حالت زاویه حملهٔ آنی جزئی از بردار حالت سیستم است و با محاسبه حالات سیستم به‌ازای ورودی مشتق زمانی زاویهٔ حملهٔ مؤثر، ضرایب ایرودینامیکی ناپایا به‌عنوان خروجی مدل فضای حالت تعیین خواهند شد. محاسبات فضای حالت را می‌توان به کمک نرم‌افزارهای ریاضی به آسانی انجام داد. چنانچه گفته شد ضرایب ایرودینامیکی که به این روش به‌دست می‌آیند، مربوط به بال تخت با ابعاد مشابه هندسه اصلی هستند. برای محاسبهٔ ضرایب ایرودینامیکی بال‌های ضخیم یا انحنادار می‌توان با توجه به فرض جریان پتانسیل و خطی بودن تغییرات ضرایب ایرودینامیکی نسبت به زاویهٔ حمله، حرکت

ناپایای بـال را بـه‌صـورت نـوعی بخـش گـذرای یکسـان بـرای بال‌هایی با ابعاد مشابه و بـا مقـاطع مختلـف، بـه اضـافه بخـش مرجع پایای وابسته به شکل مقطع بال در نظر گرفـت. بنـابراین اثر ضخامت و انحنا در تفاوت ضـرایب ایرودینامیـک بـال‌هـا در حالت مرجع پایا خود را نشان می‌دهنـد. بـه ایـن ترتیـب بـا در اختیار داشتن مدل فضای حالت برای هـر بـال تخـت بـا ابعـاد مشخص می‌توان بدون تکرار مراحل گفته‌شده، از مـدل حاصـل برای بال‌های ضخیم و منحنی ولی با ابعاد مشابه اسـتفاده کـرد. برای این منظور کافی است ضرایب حالت پایا محاسـبه شـده و سپس از اختلاف آنها برای تصحیح خروجی مدل فضـای حالـت به‌صورت زیر استفاده شود:

$$\begin{bmatrix} C_L \\ C_M \end{bmatrix} = \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \delta C_L \\ \delta C_M \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

کـه $\delta C_L = C_{Ls} - C_{L0s}$ و $\delta C_M = C_{Ms} - C_{M0s}$ و زیرنویس‌های s و 0 به‌ترتیب برآورد در حالت پایـا و بـال تخـت معادل را نشان می‌دهند. برای ایجاد مدل فضای حالت برای بال با هندسه دلخواه می‌توان بـا توجـه بـه معادلـه (۲۰) بـا تغییـر ورودی فضای حالت (u) به شکل $\begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \delta C_L & \delta C_M \end{bmatrix}^T$ مـدل زیر را به‌دست آورد:

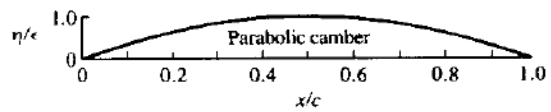
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K_8} & \mathbf{K_9} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{L_8} & \mathbf{L_9} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{L_7} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{cases} \tag{۲۱}$$

شایان ذکر است که با توجه به این‌که محاسبات حالـت پایـا بدون گام‌برداری زمانی و فقط بـا یـک‌بـار اجـرای روش اجـزای مرزی انجام می‌شوند، هزینهٔ محاسباتی چندانی ندارند. بـه ایـن ترتیب برای بال داده شده، پس از تعیـین مـاتریس‌هـای مـدل فضای حالت برای بال تخت معادل با آن، بـا اسـتفاده از ورودی تغییرات زاویهٔ حملهٔ ناشی از حرکت ناپایـا و مقـادیر تصـحیحی ضرایب ناشی از ضخامت یا انحنای بـال، خروجـی مـدل یعنـی ضرایب ایرودینامیک ناپایای بال بدون نیاز به گام‌برداری زمـانی محاسبه خواهند شد.

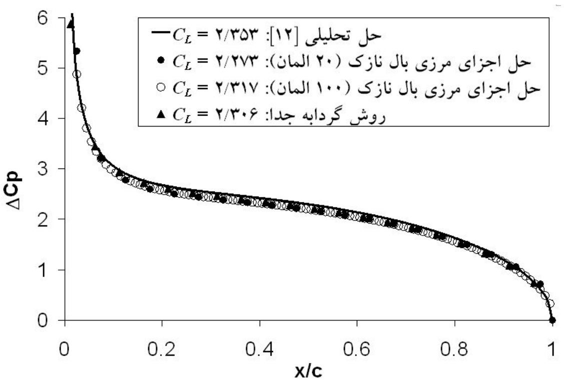
۴- نتایج و بحث

برای اعتبارسـنجی روش ارائـه شـده، نخسـت نتـایج حاصـل از به‌کارگیری معـادلات انتگـرال مـرزی توسـعه داده شـده بـرای ایرودینامیک بال نازک بررسی می‌شود. سپس با توجه به اعتبـار نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم، نتایج مـدل فضـای حالت برای هر نوع هندسه و شبکه بال با حل مسـتقیم اجـزای مرزی متناظر، مقایسـه و ارزیـابی مـی‌شـوند. بـه‌عنـوان حالـت آزمایشی کلاسیک، حل جریان دوبعدی پایا حول ایرفویل نازک سهموی با انحنای ε=0.1 را در نظر مـی‌گیـریم. توزیـع فشـار تحلیلی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [۱۲]:

$$\Delta C_p = 4\sqrt{\frac{c-x}{x}}\alpha + 32\frac{\varepsilon}{c}\sqrt{\frac{x}{c}(1-\frac{x}{c})} \tag{۲۲}$$



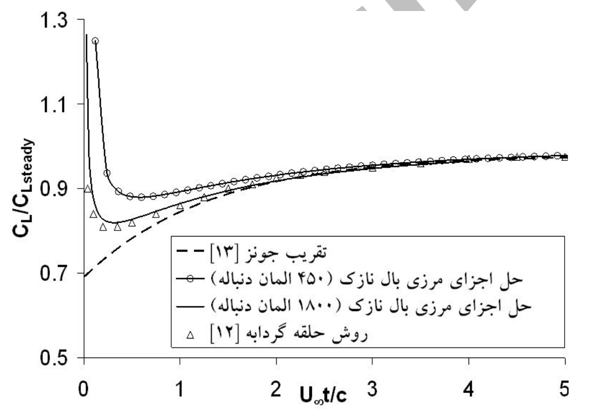
چنانچه در شکل (۱) دیده می‌شود، توزیع فشار و ضـریب برآی حاصل از روش حاضر در زاویهٔ حملـهٔ برابـر ۱۰ درجـه تطابق خوبی با نتایج عددی و تحلیلـی ارائـه شـده در [۱۲] دارند و با افزایش تعداد المان‌هـا، تغییـر چنـدانی در نتـایج ایجاد نشده است. شایان ذکر است که برای مـوارد آزمایشـی کلاسیک بدون انحنا، بیشترین دقت روش عددی همان دقت روش تحلیلی است. اما برای موارد غیـر تخـت ماننـد حالـت آزمایشی بالا، اختلاف نتایج عددی و تحلیلی، ناشی از تفاوت محل اعمال شرط مرزی اسـت. زیـرا شـرط مـرزی در روش عددی بر روی سطح منحنی و در روش تحلیلی بر روی خط وتر اعمال می‌شود. از این‌رو مقایسهٔ نتایج با حل تحلیلـی در صورتی صحیح است که انحنای سطح بال کمتر از ۱۰ درصد وتر باشد، یعنی اغتشاش‌های ناشی از جسـم کوچـک فـرض شود [۱۲]. روش این تحقیـق نیـز بـا توجـه بـه اسـتفاده از معادلـه برنـولی اغتشـاش کوچـک (معادلـه ۸) محـدود بـه هندسه‌های دارای انحنای کم است. البته تمـامی روش‌هـای مبتنـی بـر فـرض جریـان پتانسـیل، کـم و بـیش بـا محدودیت‌هایی مشابه روبه‌رو هستند.



شکل ۱ توزیع اختلاف پتانسیل بر روی ایرفویل سهموی

بررسی استقلال جواب از مشخصات دنباله نشان داد که طول دنباله و شکل آن تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر حل اجزای مرزی دارد. هرچه طول دنباله بیشتر باشد جواب به حل تحلیلی نزدیکتر می‌شود که این با توجه به مبتنی بودن حل تحلیلی بر دنبالهٔ بینهایت قابل انتظار است. نکته دیگر، جهت قرارگیری صفحهٔ دنباله است که از بین سه گزینهٔ مماس بر وتر، مماس برلبهٔ فرار و مماس بر جهت جریان، حالت دوم بهترین نتایج را به‌دست می‌دهد. دلیل این را می‌توان حساسیت حل اجزای مرزی به جهت بردار عمود به‌ویژه در محاسبهٔ ضرایب تأثیر دانست.

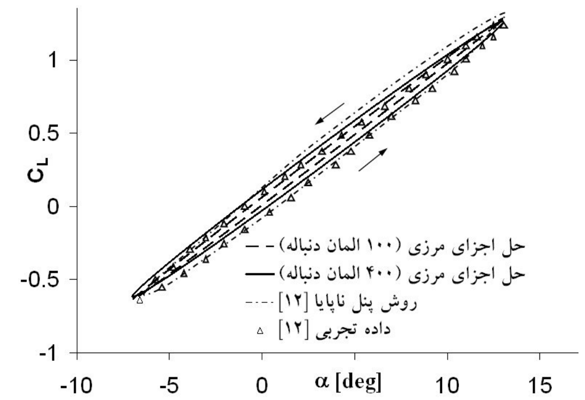
برای بررسی قابلیت روش مستقیم در حل جریان‌های ایرودینامیکی ناپایا، حرکت ناگهانی بال تخت با ضریب منظری برابر ۶ و زاویهٔ حملهٔ ۵ درجه درنظرگرفته می‌شود. ۱۵۰ المان (۶ عدد در جهت دهانه و ۲۵ در جهت وتر) بر روی جسم و در دو حالت آزمایشی ۴۵۰ و ۱۸۰۰ المان بر روی دنباله به طول ده برابر وتر قرار می‌گیرد. همان‌طورکه درشکل (۲) دیده می‌شود، نتایج به‌دست آمده از روش اجزای مرزی دقت خوبی در مقایسه با تقریب نمایی جونز [۱۳] و روش حلقه گردابه [۱۲] که معمولاً برای ایرودینامیک بال نازک استفاده می‌شود دارد و هرچه تعداد اجزای دنباله بیشتر شده، کیفیت تسخیر تغییرات ضریب برآ در لحظات ابتدایی بیشتر شده است. دلیل این، وابستگی گام زمانی به اندازه اجزای دنباله از طریق معادلهٔ جابه‌جایی است. در حرکت ناگهانی بال از حالت سکون به سرعتی ثابت، مهمترین بخش پیشینه زمانی، گردابه لحظه شروع است که قدرتمندترین گردابه در حرکت ناپایای بال است. بنابراین فقط با یک گام زمانی تأثیر این گردابه شروع و با دور شدن آن از بال ضریب ناپایا به مقدار پایا نزدیک می‌شود. منظور از دقت حل در این نوع حرکت ناپایا، توانایی روش در تسخیر رفتار در لحظات ابتدایی در مقایسه با حل کلاسیک است. تقریب جونز برای بال سه‌بعدی مشابه تابع واگنر و حل تئودورسون برای ایرفویل مبتنی بر روابط تحلیلی است. این تقریب مبتنی بر به‌کارگیری توابع نمایی برای ضرایب ایرودینامیکی بوده و در [۱۳] به تفصیل ارائه شده است. اختلاف بین منحنی محاسبه شده و نتایج کلاسیک جونز را می‌توان به نرخ محدود شتاب حین اولین گام زمانی نسبت داد. زیرا در حل جونز، زمان شتاب صفر و مقدار برآ بلافاصله پس از شروع حرکت ($t = 0^+$) برابر بینهایت است. اثر شتاب محدود، افزایش تند برآ در طی شتاب و افزایش نرم آن در لحظات بعدی است. همچنین مشابه حالت پایا مشاهده شد که تعداد اجزای روی جسم تأثیر چندانی بر حل ندارد که این رفتار ناشی از آن است که نتیجه مستقیم و نهایی پیشینه چرخش حول بال در شکل دنباله و اختلاف پتانسیل روی آن نمود می‌یابد. به‌علاوه چنانچه گفته شد، اندازه المان‌های دنباله نیز ارتباطی مستقیم با گام زمانی دارند. شایان ذکر است که ضریب برآی حالت پایا با در نظر گرفتن المان دنباله طویل و حل اجزای مرزی مستقل از زمان به‌دست می‌آید.



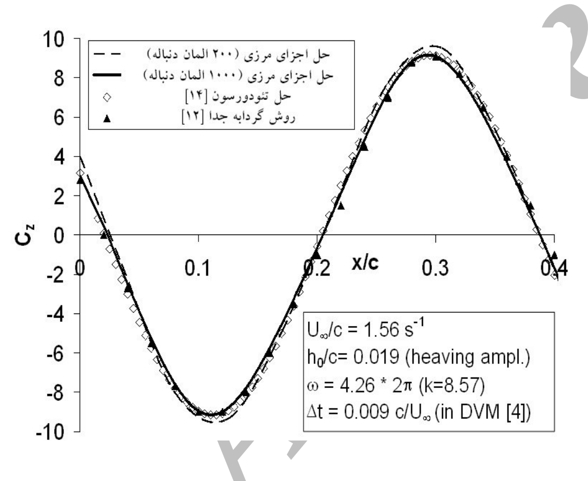
شکل ۲ تغییر ضریب برآی گذرا برای بال تخت ($AR = 6$) پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

پس از ارزیابی روش اجزای مرزی توسعه‌یافته در این تحقیق در مسائل حرکت ناگهانی بال از سکون بـه بررسـی انـواع دیگـر حرکـت ناپایـا یعنـی حرکـت‌هـای نوسـانی پیچشـی و انتقـالی می‌پردازیم. در شکل (۳) حلقه تغییرات ضرایب بـرآی ایرفویـل تخت در حرکت نوسان پیچ با دامنه ۱۰ درجه حول زاویه حمله ۳ درجه نشان داده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود با توجه به دامنه حلقه برآ و روند تغییرات، تطابق خوبی بین نتایج روش اجزای مرزی مستقیم، داده تجربی و حل روش پنل ناپایای ارائه شده در [۱۲] برای ایرفویل متقارن وجـود دارد. البتـه هـدف از این حالت آزمایشی، فقط بررسـی کـارایی روش اجـزای مـرزی مستقیم توسعه‌یافته در پیش‌بینی ضرایب ایرودینامیکی ناپایـای ایرفویل نازک در حرکت نوسانی بوده و چنانچه در بخـش قبـل در توسعه مدل فضای حالت گفته شد برای مقایسه دقیق نتـایج ایرفویل تخت با ایرفویل ضخیم باید از جمـلات تصـحیح بـرای ضرایب ایرودینامیکی استفاده شود. دراینجـا بـا وجـود تصـحیح نشدن مقادیر روش اجزای مرزی مستقیم، اختلاف انـدکی بـین نتایج (کمتر از ۵٪) وجود دارد که این تأییدی است بـر تقریـب مهندسی تشابه تغییرات ناپایا برای ایرفویل‌ها و بال‌هایی با ابعـاد مشابه اما با ضخامت متفاوت که در توسعه مـدل فضـای حالـت استفاده شد. در محاسبات اجزای مرزی، ایـن حالـت آزمایشـی به‌دلیل فرکانس بی‌بعد کم حرکت نوسـانی، بـرای پوشـش یـک سیکل کامل از حرکت طول دنباله ۴۰ برابر وتر در نظـر گرفتـه شد. مانند حالت آزمایشی قبل و به دلیلی مشـابه مشـاهده شـد که تعداد المان‌های روی جسم بـه‌خـلاف تعـداد اجـزای دنبالـه تأثیری بر حل ندارند و چنانچه در شکل (۳) نیز دیده می‌شـود، با افزایش تعداد اجزای دنباله دقت نتایج بهبود یافته است.

در شکل (۴) نتایج حاصل از محاسبهٔ ضریب نیروی عمـودی ایرفویـل تخـت بـرای نوسـان انتقـالی در جهـت عمـودی بـا مشخصات داده شـده، آورده شـده اسـت. همانطورکـه مشـاهده می‌شود نتایج حاصل از محاسبه به روش حاضـر در مقایسـه بـا حل کلاسیک تئودورسون [۱۴] همچنـین نتـایج [۱۲] کـه بـا مدل گردابه جدا به‌دست آمده از تطابق خوبی برخـوردار اسـت. همچنین با افـزایش تعـداد اجـزای دنبالـه، خطـای محاسـبات کاهش یافته که علت آن بزرگ بودن فرکانس بی‌بعد نوسـان‌هـا است که گام زمانی کوچکتر و درنتیجه تعداد المان بیشـتری را بر روی دنباله برای بالا بـردن دقـت حـل مـی‌طلبـد. در هـر دو حالت حل اجزای مرزی طول دنباله ۱۰ برابر طول وتر و تعـداد المان بر روی جسم ۱۰۰ عدد درنظر گرفته شد کـه بـا افـزایش اجزای روی جسم تغییری در نتایج مشاهده نشد.



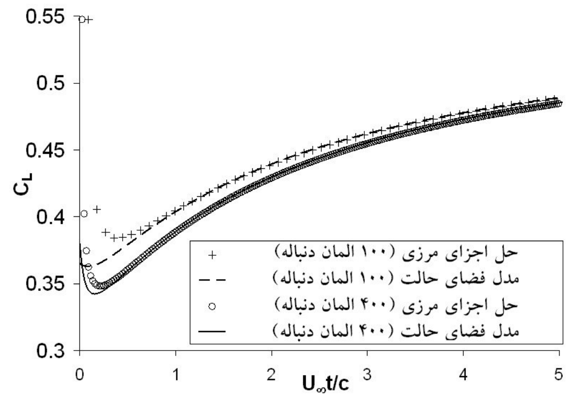
شکل ۳ حلقه هیسترسیس تغییرات ضریب نیروی برآ برای ایرفویـل تخت در نوسان پیچشی



شکل ۴ تغییرات ضریب نیروی عمودی ایرفویل تختدر سیکل نوسان انتقالی

برای ارزیابی مدل ایرودینامیکی فضای حالت توسعه داده شـده، روندی مشابه اعتبارسنجی نتایج روش مستقیم طی می‌شود. با ایـن تفاوت که کاربرد مدل فضـای حالـت محـدود بـه هندسـه خاصـی نیست و برای بال‌های ضخیم نیز قابل استفاده اسـت. ابتـدا حرکـت

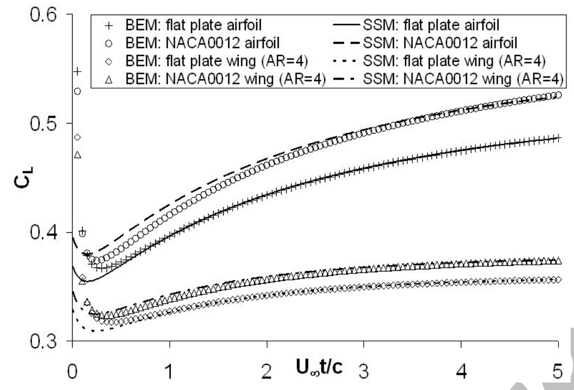
ناپایای ناگهانی ایرفویل تخت در زاویهٔ حملهٔ ۵ درجه از حالت سکون به سرعت ثابت در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۵) نتایج حاصل از روش اجزای مرزی مستقیم و مدل فضای حالت متناظر به‌ازای دو نوع شبکه با ۱۰۰ و ۴۰۰ المان بر روی دنباله نشان داده شده است. همان‌طورکه دیده می‌شود با توجه به اینکه مدل فضای حالت براساس زمان پیوسته عمل می‌کند با افزایش اجزای بر روی دنباله و درنتیجه کاهش گام زمانی در روش اجزای مرزی، اختلاف بین مدل فضای حالت و روش مستقیم کاهش یافته است. نکته بسیار مهم، دقت بیشتر مدل فضای حالت مبتنی بر دستگاه اجزای مرزی با شبکه درشت بر روی دنباله نسبت به حل اجزای مستقیم متناظر است. در واقع با شبکه‌ای یکسان، مدل فضای حالت دقیقتری را نتیجه داده است؛ زیرا این مدل در حوزه زمان پیوسته که متناظر با گام زمانی بسیار کوچک است فرمول‌بندی شده است. بنابراین با استفاده از مدل فضای حالت علاوه بر اینکه نیازی به گام‌برداری زمانی برای محاسبات وابسته به زمان نیست، به ازای هزینه محاسباتی اولیه یکسان برای تشکیل ماتریس‌های ضرایب تأثیر نتایج دقیقتری به‌دست خواهد آمد.



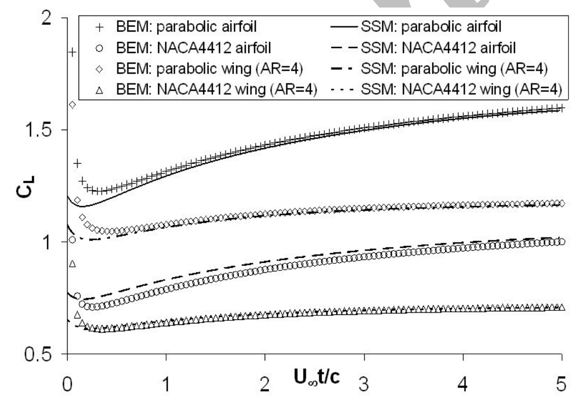
شکل ۵ تغییرات ضریب برآی ایرفویل تخت پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت

نمودارهای مشابه با حالت آزمایشی قبل در شکل‌های (۶) و (۷) برای حرکت ناگهانی انواع ایرفویل‌ها و بال‌ها نشان می‌دهند که نتایج حاصل از مدل فضای حالت حتی با وجود شبکه درشت بر روی دنباله (۱۰۰ المان در حالت دوبعدی و ۴۰۰ المان در حالت سه‌بعدی) برای انواع ترکیب‌های بال دقیق است.

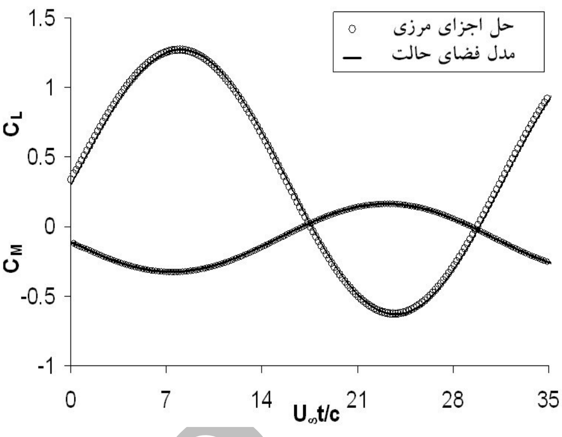
برای اعتبارسنجی مدل فضای حالت در حرکت‌های نوسانی از حرکت پیچ ایرفویل تخت - که نتایج محاسبات مستقیم آن در شکل (۳) نشان داده شد - شروع می‌شود. نتایج حاصل از حل اجزای مرزی و مدل فضای حالت در شکل (۸) نشان داده شده که تطابق نتایج بسیار خوب است. دلیل آن را می‌توان انطباق شرایط توسعه مدل فضای حالت با شرایط مسأله - که هندسه تخت بدون انحنا است- دانست. در حل این مسأله از ۱۰۰ المان بر روی بدنه و ۲۰۰ المان بر روی دنباله استفاده شد.



شکل ۶ تغییرات ضریب برآ پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت برای انواع ایرفویل و بال متقارن

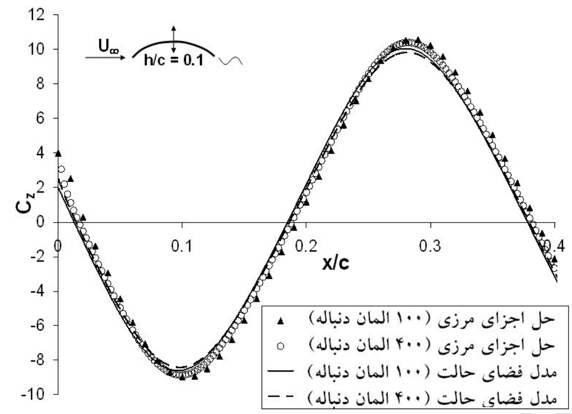


شکل ۷ تغییرات ضریب برآ پس از شروع ناگهانی حرکت با سرعت ثابت برای انواع ایرفویل و بال نامتقارن

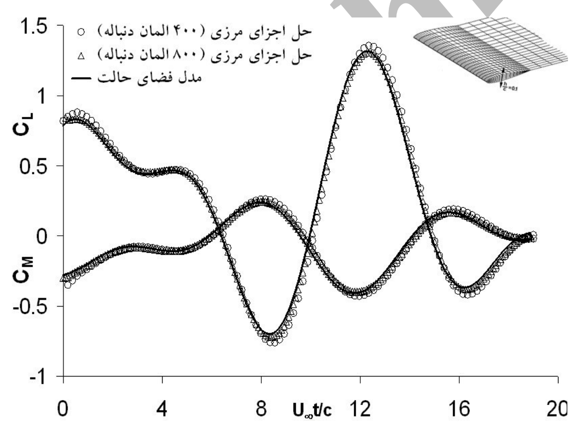


شکل ۸ تغییرات ضرایب برآ و ممان حول لبهٔ حملهٔ ایرفویل تخت در نوسان پیچشی حول مرکز ایرودینامیکی

در شکل (۹) تغییرات ضریب نیروی عمودی محاسبه شده به دو روش مستقیم و فضای حالت با استفاده از دو نوع شبکهٔ دنباله برای حرکت انتقالی ایرفویل سهموی نشان داده شده است. مشخصات حرکت انتقالی مشابه موارد مربوط به شکل (۴) برای ایرفویل تخت است و تعداد اجزای روی جسم و دنباله به ترتیب برابر ۱۰۰ و ۴۰۰ در نظر گرفته شد. همانطورکه در شکل (۹) دیده می‌شود، با وجود انحنادار بودن ایرفویل، دقت نتایج مدل فضای حالت در مقایسه با حل مستقیم مناسب است و با افزایش تعداد اجزای روی دنباله، تطابق نتایج مدل فضای حالت و حل اجزای مرزی بیشتر شده است. شایان ذکر است که با توجه به ماهیت روش اجزای مرزی ناپایا و اینکه بردار حالت سیستم در مدل فضای حالت مبتنی بر توزیع مجهولات اجزای دنباله غیرمتصل به جسم است، تعداد المان بر روی جسم تأثیری بر نتایج مدل فضای حالت ندارد. سرانجام برای بررسی کارایی مدل فضای حالت زمان پیوستهٔ ابداع شده در حل مسائل ناپایای پیچیده، حرکت نوسانی ترکیبی بال سه‌بعدی با مقطع NACA0012 و ضریب منظری ۴ بررسی شد. حرکت ناپایا شامل ترکیب نوسان انتقالی با فرکانس بی‌بعد ۰/۵ و دامنه نوسانات ۰/۱ وتر و نوسان پیچشی حول مرکز ایرودینامیکی با فرکانس بی‌بعد ۰/۳ و دامنه ۱۰ درجه حول زاویهٔ حملهٔ ۳ درجه است که برای حل آن از ۲۰۰ المان بر روی جسم و ۴۰۰ المان بر روی دنباله به طول ۲۰ برابر وتر استفاده شد. نتایج حاصل از حل اجزای مرزی و مدل فضای حالت متناظر در شکل (۱۰) نشان داده شده که نشان می‌دهند مدل فضای حالت ارائه شده، توانایی پیش‌بینی تغییرات ضرایب ایرودینامیکی را در حرکات ناپایای پیچیده و برای انواع هندسه‌های بال نازک و ضخیم دارد و با توجه به عملکرد آن در حوزه زمان پیوسته، رویکردهای زمان گسسته فقط در صورت استفاده از شبکه‌ای ریز بر روی دنباله، به دقتی قابل مقایسه با مدل فضای حالت نزدیک می‌شوند.



شکل ۹ تغییرات ضریب نیروی عمودی ایرفویل سهموی در نوسان انتقالی



شکل ۱۰ تغییرات ضرایب برآ و ممان حول لبهٔ حملهٔ بال با مقطع ایرفویل NACA0012 در حرکت نوسان ترکیبی

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارائه مبانی نظری و کاربرد نوعی مدل فضای حالت برای حل مسائل ایرودینامیک ناپایا در حوزه زمان پیوسته پرداخته شد. در این راستا روشی برای توسعهٔ مدل‌های فضای حالت برمبنای دستگاه اجزای مرزی برای انواع ترکیب‌های ایرودینامیک بال ابداع شد که به‌کارگیری آن در حالت‌های آزمایشی مختلف، نتایج بسیار مناسبی را نشان داد. این مدل‌ها در پایین‌ترین سطح، حل دستگاه معادلات در هر گام زمانی در شبیه‌سازی‌های ناپایا را حذف می‌کنند. به‌علاوه با داشتن چنین مدلی برای هندسه و شبکه مشخص، به حل مکرر مسأله ایرودینامیک به ازای حرکت‌های مختلف و ترکیب‌های مشابه نیاز نیست؛ بلکه کافی است نرخ تغییرات زاویهٔ حملهٔ آنی و مقادیر تصحیح ضرایب مربوط به اثر ضخامت/انحنا مشخص باشد تا ضرایب ایرودینامیکی لحظه‌ای را بتوان محاسبه کرد. کارامدی محاسبات به‌ویژه در صورت مستقل از زمان بودن ضرایب تأثیر، بسیار بالا خواهد بود. این ضرایب در عمل وقتی حرکت شامل نوسان‌هایی کوچک حول یک ترکیب مرجع حالت پایا باشد و سطح دنباله به‌طور صلب به سطح جسم متصل فرض شود، ثابت هستند. سرانجام با توجه به توسعهٔ مدل فضای حالت در حوزهٔ زمان پیوسته، این نوع مدل‌های ایرودینامیکی به‌ویژه در مسائل طراحی، بهینه‌سازی و کنترل ایروالاستیک مفید خواهند بود.

۶-پیوست الف. محاسبهٔ تحلیلی ضرایب تأثیر

در حل اجزای مرزی جریان حول ایرفویل نازک با اختلاف پتانسیل ثابت بر روی هر المان (معادلهٔ ۷) انتگرالی برای ضرایب تأثیر در حالت دوبعدی به‌دست می‌آید که در مختصات محلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{S_m} \frac{\partial}{\partial n}(\nabla G)dS = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\right)dx$$

که در آن $G = \ln r / 2\pi$ (با $r_i = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_*\|$). با انتگرال‌گیری نامعین به‌دست می‌آوریم:

$$\int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\right)dx = \frac{z - z_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\mathbf{i} - \frac{x - x_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\mathbf{k}$$

درنتیجه انتگرال معین در مختصات محلی به‌دست می‌آید:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_*}{2\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{z_*-z_1}{r_1^2} - \frac{z_*-z_2}{r_2^2}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_*-x_2}{r_2^2} - \frac{x_*-x_1}{r_1^2}\right)\mathbf{k}$$

برای حالت سه‌بعدی نیز با فرض اختلاف پتانسیل ثابت بر روی المان چهاروجهی تخت می‌توان انتگرال‌های ضرایب تأثیر را به‌صورت تحلیلی به‌دست آورد که برای اختصار می‌تواند به شکل برداری زیر نوشته شود،

$$\iint \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_*}{4\pi\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_*\|^3}\right)ds =$$
$$-\frac{\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}{4\pi\|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2\|^2}\left(\frac{\mathbf{r}_{21}\cdot\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|} - \frac{\mathbf{r}_{21}\cdot\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|}\right) - \frac{\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3}{4\pi\|\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3\|^2}\left(\frac{\mathbf{r}_{32}\cdot\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|} - \frac{\mathbf{r}_{32}\cdot\mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|}\right)$$
$$-\frac{\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_4}{4\pi\|\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_4\|^2}\left(\frac{\mathbf{r}_{43}\cdot\mathbf{r}_3}{\|\mathbf{r}_3\|} - \frac{\mathbf{r}_{43}\cdot\mathbf{r}_4}{\|\mathbf{r}_4\|}\right) - \frac{\mathbf{r}_4\times\mathbf{r}_1}{4\pi\|\mathbf{r}_4\times\mathbf{r}_1\|^2}\left(\frac{\mathbf{r}_{14}\cdot\mathbf{r}_4}{\|\mathbf{r}_4\|} - \frac{\mathbf{r}_{14}\cdot\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|}\right)$$

۷-پیوست ب. بیان زمان‌پیوسته تئوری کلوین

برای نقاط دنباله که در تماس با لبهٔ فرار نباشند، $\Delta\phi_\Omega$ را می‌توان توسط قضیهٔ کلوین تعیین کرد. قضیهٔ کلوین بیان می‌کند که در میدان جریان پتانسیل، مومنتم زاویه‌ای تغییر نمی‌کند و مقدار گردش ثابت خواهد ماند. پس می‌توان نتیجه گرفت که $\Delta\phi_\Omega$ یا $\mu\Omega$ در هر لحظه t برابر است با مقدار متناظر لبه فرار در لحظه t-$\underline{t}$ که در آن $\underline{t}$ مدت زمانی است که ذرهٔ سیال فاصلهٔ لبهٔ فرار را تا نقطه مورد نظر می‌پیماید [۴]. با استفاده از معادله انتقال برای جابه‌جایی خواص سیال نیز می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial\mu_W}{\partial t} = U_\infty \frac{\partial\mu_W}{\partial x}$$

بنابراین با درنظرگرفتن شکل ماتریسی این رابطه و ایجاد ارتباط بین مقادیر μ_{Ω} بر روی اجزای غیرمتصل به لبۀ فرار با μ_{wo} مربوط به المان‌های متصل به لبۀ فرار می‌توان با حفظ مشتق زمانی غیرگسسته رابطه زیر را به‌دست آورد،

$$\mathbf{K}_6\boldsymbol{\mu}_w - \mathbf{K}_7\boldsymbol{\mu}_{w_0} = \dot{\boldsymbol{\mu}}_w$$

۸- منابع

[1] Morino, L., Gennaretti, M., "Boundary Integral Equation Method for Aerodynamics", Progress in Astronautics and Aeronautics 146, pp. 279-320, 1992.

[2] Morino, L., Gennaretti, M., Iemma, U., Salvatore, F., "Aerodynamics & Aeroacoustics of Wings and Rotors via BEM - Unsteady, Transonic, & Viscous Effects", Computational Mechanics, Vol.21, pp. 265-275, 1998.

[3] Morino, L., Gennaretti, M., Bernardini, G., "a Boundary Element Method for the Aerodynamic Analysis of Aircraft in Arbitrary Motions", Computational Mechanics, Vol.32, pp. 301-311, 2003.

[4] Behbahni-Nejad, M., "Reduced order modeling of 3D unsteady flows using fluid eigenmodes and boundary element method", PhD Dissertation, University of Tehran, Tehran, Iran, 2002.

[5] Shahverdi, H., Nobari, A.S., Behbahani-Nejad, M., Haddadpour, H., "an Efficient Reduced-Order Modeling Approach Based on Fluid Eigenmodes and Boundary Element Method", Journal of Fluids and Structures, Vol. 23, pp. 143-153, 2007.

[6] Haddadpour, H., Behbahani-Nejad, M., Firouz-Abadi, R.D., "Reduced-Order Aerodynamic Model for Aeroelastic Analysis of Complex Configurations in Incompressible Flow", AIAA Journal of Aircraft, Vol. 44, pp. 1015-1017, 2007.

[7] Zhao, Y.H., Hu, H.Y., "Aeroelastic Analysis of a Non-linear Airfoil Based on Unsteady Vortex Lattice Method", Journal of Sound and Vibration, Vol. 276, pp. 491–510, 2004.

[8] Mor, M., Livne, E., "State-Space Unsteady Aerodynamics for Aeroservoelastic Configuration Shape Optimization of Flight Vehicle", 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics & Materials Conference, California, USA, 2004.

[9] Gaunaa, M., "Unsteady 2D Potential-flow Forces on Thin Variable Geometry Airfoil Undergoing Arbitrary Motion", Risø–R–1478, Risø National Lab., Denmark, 2006.

[10] Mohammadi-Amin, M., Razi, M., Ghadiri, B., "Aeroelastic Analysis of a Swept Wing Containing Cubic and Freeplay Nonlinearities in a Subsonic Compressible Flow", Proceedings of 9th Conference on Flow-Induced Vibration, pp. 501-506, Czech Republic, 2008.

[11] Yang, S.C., Luo, S.J., Liu, F., Tsai, H.M., "Optimization of Unstalled Pitching and Plunging Motion of an Airfoil", AIAA Paper 2006-1055, Jan. 2006.

[12] Katz, J., Low Speed Aerodynamics, Cambridge University Press, 2001.

[13] Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., Halfman, R.L., Aeroelasticity, Dover Science Books, 1996.

[14] Theodorsen, T., "General Theory of Aerodynamical Instability and Mechanism of Flutter", NACA Report 496, 1935.