http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۱ شماره ۲ تابستان ۱۳۹۰ ص‌ص ۹۳-۱۰۶

تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۲/۲۷
پذیرش ۹۰/۴/۷
ارائه در سایت ۹۰/۶/۱۶

تحلیل ارتعاش آزاد پوستهٔ استوانه‌ای نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند (FGM) با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM)

شاهرخ حسینی هاشمی[1*]، کمیل خرمی[2]

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
*تهران، صندوق پستی ۱۶۸۴۶-۱۳۱۱۴. shh@iust.ac.ir

چکیده- در این مقاله ارتعاش پوستهٔ استوانه‌ای FGM با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQM) مطالعه می‌شود. ماهیت روش مربعات دیفرانسیلی، مشتق جزئی تابع یکنواخت نسبت به متغیری است که توسط مجموع وزنی مقادیر تابع در تمامی نقاط گسسته در آن جهت تقریب زده شده است. ضرایب وزنی مربوط به آن، به مسألهٔ خاصی مربوط نیست و فقط به نقاط شبکه و مرتبهٔ مشتق بستگی دارد. پوستهٔ FGM خواص متغیری در راستای ضخامت بر حسب تابع نمایی دارد. همگرایی سریع روش DQM نشان داده شده و دقت آن با سایر مقالات و تئوری‌های پوسته، و همچنین با نتایج نرم‌افزار ABAQUS مقایسه و تأیید شده است. اثر کسر حجمی بر فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای FGM برای شرایط مرزی کلاسیک (تمامی ترکیبات شرایط مرزی ساده و گیردار) در برابر تعداد موج پیرامونی، نسبت طول به شعاع و نسبت ضخامت به شعاع برای مقادیر مختلف توان نمایی بررسی شده است.

کلیدواژگان: ضرایب وزنی، نقاط شبکه، فرکانس‌های طبیعی، کسر حجمی.

Analysis of Free Vibrations of Moderately Thick Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Using Differential Quadrature Method

Sh. Hosseini-Hashemi[1], K. Khorami[2*]

1- Assoc. Prof. of Mechanical Eng. Dept., Iran Univ of Science and Tech.
2- M.Sc. Student of Mechanical Eng. Dept., Iran Univ of Science and Tec.
*P.O.B. 16846-13114, Tehran, Iran. shh@iust.ac.ir

Abstract- In this paper vibration frequency characteristics of functionally graded cylindrical (FGM) shells are investigated using the differential quadrature method (DQM). The essence of the differential quadrature method is that the partial derivative of a smooth function with respect to a variable is approximated by a weighted sum of function values at all discrete points in that direction. Its weighting coefficients are not related to any special problem and only depend on the grid points and the derivative order. The material properties are graded in the thickness direction of the shell according to the volume fraction power law distribution. The fast convergence behavior of the method is demonstrated and its accuracy is verified by comparing the results with those of other shell theories obtained using conventional methods and also with those of ABAQUS software. Effects of the exponential volume fraction law on the natural frequencies of FGM cylindrical shells for classical boundary conditions (all possible combinations of clamped (C) and simply supported (S) boundary conditions) are studied against circumferential wave number, length to radius ratio and thickness to radius ratio for different values of power law exponents.

Keywords: Weighting Coefficients, Grid Points, Natural Frequency, Volume Fraction.

۱- مقدمه

پوسته‌های استوانه‌ای مدور در کاربردهای مختلف مهندسی نقش مهمی را ایفا می‌کنند. محدودهٔ کاربردها ساختارهای بزرگ مکانیکی و عمرانی تا تجهیزات کوچک الکترونیکی را شامل می‌شود و به عنوان مثال می‌توان به مخازن تحت فشار، مخازن نفت، تجهیزات حفاری و سازه‌های تحمل بار (یاتاقان) در هواپیما اشاره کرد. پوسته‌ها اغلب برای ذخیره‌سازی و انتقال گاز با فشار بالا و نیز مایعات به‌کار می‌روند و همچنین در طراحی دودکش، بدنهٔ هواپیما، کشتی و ساخت و سازهای ساختمانی کاربرد دارند.

تاکنون روش‌های مختلفی برای بررسی ارتعاش در پوسته‌های استوانه‌ای به‌کار رفته است. روش DQM که نخستین بار توسط بلمن و کاستی[1] [۱] معرفی شد، روشی جایگزین برای حل مستقیم معادلات حاکم بر مسائل مختلف مهندسی است. به تازگی روش DQM برای حل مسائل مربوط به تیر، ورق و پوسته به‌کار می‌رود. نسخهٔ بهبود یافتهٔ روش DQ، GDQ نامیده می‌شود که توسط شو[2] [۲] معرفی شده است. وی همچنین با به‌کارگیری روش GDQ ارتعاش در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی را با استفاده از تئوری پوستهٔ کلاسیک لاو مطالعه کرد [۳]. برت و مالک[3] [۴] با استفاده از روش DQ رفتار ارتعاشی پوستهٔ نازک همگن با شرایط مختلف مرزی را بر حسب سه مؤلفهٔ جابه‌جایی و با به‌کارگیری تئوری فلوگ[4] بررسی کردند. ژانگ و همکاران[5] [۵] ارتعاش پوسته‌های استوانه‌ای را برای شرایط مختلف مرزی با استفاده از روش LaDQM بررسی کردند که معادلات حاکم در مطالعهٔ آنان بر اساس تئوری پوستهٔ گولدنوایزر-نووزیلوف[6] نوشته شده است.

ارتعاش در پوسته‌های استوانه‌ای مدور نخست توسط سوفی جرمین[7] در سال ۱۸۲۱ مطالعه شد و پس از آن در اواخر قرن نوزدهم توسط ریلی[8] [۶] و لاو [۷] ادامه یافت. لاو برای اولین بار نظریهٔ پوستهٔ خطی را بر اساس فرضیهٔ کریشهف صفحات ارائه کرد. سایر نظریه‌ها در این مورد بر اساس نظریهٔ لاو[9] استوار بوده و فقط شامل تغییر در برخی از شرایط فیزیکی هستند. ردی و لیو[10] [۸] با استفاده از تئوری مرتبهٔ بالای تغییر شکل برشی، پوسته‌های چند لایهٔ الاستیک را بررسی کردند، این تئوری حالت اصلاح شدهٔ تئوری پوستهٔ سندرز است و توزیع سهمی‌وار کرنش برشی عرضی در سرتاسر ضخامت پوسته را در نظر می‌گیرد. خدیر[11] و ردی [۹] مطالعه‌ای را در زمینهٔ ارتعاش، خمش و کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای مدور با استفاده از تئوری‌های کلاسیک مرتبه اول[12]، مرتبه سوم[13] و روش فضای حالت[14] انجام دادند. نوسیر[15] و ردی [۱۰] ارتعاش و پایداری در پوسته‌های استوانه‌ای مدور چند لایه را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی که بر تئوری تغییر شکل برشی دانل[16] و تئوری کلاسیک دانل مبتنی است، بررسی کردند.

با گسترش رو به رشد وسایل نقلیهٔ پرسرعت، مواد مقاوم در برابر شرایط محیطی سخت، مانند دمای بسیار بالا و شیب حرارتی بالا در موتورهای دیزلی و توربین، اهمیت ویژه‌ای یافته است. مواد FGM در واقع موادی کامپوزیتی هستند، که در آن ترکیب مواد یا ساختار میکروسکوپی به‌صورتی تغییر می‌کند که خواص مکانیکی و حرارتی سازهٔ ساخته شده از FGM در دماهای بالا و شرایط سیکل حرارتی، عملکرد مطلوبی داشته باشد. مواد FGM برای کاربردهای با شیب حرارتی بالا، مانند سازه‌های حرارتی در هواپیماهای پیشرفته و موتورهای هوافضا و صفحات مداری در کامپیوتر، ایدئال هستند [۱۱]. در سال ۱۹۸۴ گروهی در ژاپن شامل یامانوچی[17] و همکاران [۱۲] و کویزومی[18] [۱۳]، برای نخستین بار ایدهٔ مواد FGM را ارائه کردند. لوی و همکاران [۱۴] ارتعاش در پوستهٔ استوانه‌ای FGM را مطالعه کردند که این تحلیل با استفاده از روابط

1. Belman and Casti
2. Shu
3. Bert and Malik
4. Flugge
5. Zhang et al
6. Goldenveizer-Novozhilof
7. Sophie Germaine
8. Rayleigh
9. Love
10. Reddy and Liu
11. Khdeir
12. First order
13. Third order
14. State-space
15. Nosier
16. Donnel
17. Yamanouchi
18. Koizumi

کرنش جابه‌جایی به‌دست آمده از تئوری پوستهٔ لاو انجام شده و مقادیر ویژهٔ[1] معادلات حاکم با استفاده از ریلی ریتز به‌دست آمده است. پوستهٔ FGM از نیکل و فولاد ضد زنگ ساخته شده بود و این تحلیل شامل بررسی فرکانس‌های طبیعی، تأثیر کسر حجمی و همچنین اثر وضعیت قرار گرفتن مواد در سازه بر فرکانس است. پرادهان[2] و همکاران [۱۵] ارتعاش در پوستهٔ استوانه‌ای FGM را در شرایط مختلف مرزی بررسی کردند که در آن FGM از فولاد ضد زنگ و زیرکونیا تشکیل شده بود. آنان روابط جابه‌جایی کرنش مربوط به تئوری پوستهٔ لاو را به‌کار برده و برای استنتاج معادلات حاکم بر مسأله از روش ریلی استفاده کردند. سانتوز و همکاران [۱۶] با استفاده از نوعی مدل المان محدود نیمه‌تحلیلی، پوستهٔ استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند را با استفاده از تئوری الاستیسیتهٔ خطی سه بعدی مطالعه کردند. تورنابن [۱۷] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی رفتار دینامیکی پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای و صفحات دایروی FGM را با به‌کارگیری تئوری الاستیسیتهٔ خطی بررسی کرد.

در این پژوهش، پوستهٔ استوانه‌ای FGM از نیکل و فولاد ضد زنگ تشکیل شده است: نیکل در سطح داخلی و فولاد در سطح بیرونی و خواص در راستای ضخامت برحسب کسر حجمی نمایی تغییر می‌کند. روابط جابه‌جایی، انحنا و کرنش بر اساس نظریهٔ تغییر شکل برشی دانل[3] نوشته شده است. به‌منظور به‌دست آوردن معادلات فرکانسی در شکل مسألهٔ مقدار ویژه، روش عددی DQM به کار رفته است. تحلیل ارتعاشی برای شرایط مرزی کلاسیک (دو سر ساده (S-S)، دو سر گیردار (C-C) و یک سر ساده-یک سر گیردار (S-C)) انجام شده است. پوسته‌های استوانه‌ای مورد بررسی، نازک و نسبتاً ضخیم بوده و در واقع در این مطالعه اثر اینرسی چرخشی و تنش برشی در راستای شعاعی نیز در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به پوستهٔ استوانه‌ای همگن و FGM با نتایج سایر مقالات و نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار ABAQUS مقایسه و بر دقت و سرعت روش DQM تأیید شده است. تأثیر توان نمایی بر فرکانس‌های طبیعی برای مقادیر مختلف تعداد موج پیرامونی، نسبت طول به شعاع و نسبت ضخامت به شعاع، ارزیابی شده است.

۲- مواد FGM

مواد FGM، موادی کامپوزیتی هستند که با مخلوط کردن دو یا چند مادهٔ مختلف ساخته شده‌اند. از مواد FGM اغلب در دمای بالا استفاده می‌شود و خواص آنها وابسته به دما است. به عنوان مثال اگر P_i یکی از خواص ماده مورد نظر باشد، می‌توان آن را به‌صورت تابعی از دمای محیط T(K) به شکل زیر توصیف کرد [۱۸]:

$$P_i=P_0\left(P_{-1}T^{-1}+1+P_1T+P_2T^2+P_3T^3\right) \quad (۱)$$

که در آن P_0، P_{-1}، P_1، P_2 و P_0 ضرایب دمایی وابسته به مواد تشکیل دهنده است (جدول ۱). خواص مواد نهایی P_{fgm} مربوط به FGM توسط کسر حجمی[4] (V) و خواص مواد P^1 در سطح داخلی و P^2 در سطح خارجی، با استفاده از رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$P_{fgm}=(P^2-P^1)V+P^1 \quad (۲)$$

که P^1 خواص مربوط به مادهٔ یک (مادهٔ موجود در سطح داخلی پوسته) و P^2 خواص مربوط به مادهٔ دو (در سطح خارجی پوسته) است. کسر حجمی نوعی تابع مکانی[5] است و برای پوستهٔ استوانه‌ای شکل ۱ به‌صورت زیر توصیف می‌شود:

$$V=\left(\frac{\xi-R_i}{R_o-R_i}\right)^N \quad (۳)$$

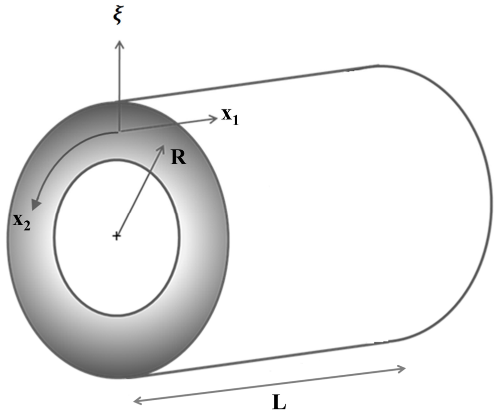
که در آن R_i و R_o شعاع داخلی و خارجی پوستهٔ استوانه‌ای است. ξ فاصلهٔ شعاعی $(R_i\leq\xi\leq R_o)$ در راستای ضخامت و توان نمایی[6] (N) مقداری مثبت است. توجه دارید که به ازای N=0 می‌توان نوشت: $P_{fgm}=P^2$ و اگر N بسیار بزرگ باشد P_{fgm} به

1. Eigenvalue
2. Pradhan
3. Donnel
4. Volume Fraction
5. Spatial Function
6. Power Law Exponent

P^1 میل می‌کند. برای پوستهٔ استوانه‌ای با ضخامت یکنواخت h که سطح مرجع در سطح میانی آن قرار دارد، کسر حجمی با رابطهٔ زیر توصیف می‌شود:

$$V=\left(\frac{\xi+h/2}{h}\right)^N \quad (۴)$$

همان‌طور که در رابطهٔ (۲) بیان شده، باید توجه شود که در $\xi=-h/2$ ، خواص مادهٔ FGM همان خواص مادهٔ یک بوده و در $\xi=h/2$، خواص مادهٔ FGM با خواص مادهٔ دو یکی است. بنابراین خواص مادهٔ FGM در راستای ضخامت، از ماده یک در سطح داخلی به سمت مادهٔ دو که در سطح خارجی قرار دارد، تغییر می‌کند. عامل مؤثر بر این تغییرات، کسر حجمی و در نتیجه توان نمایی است.



شکل ۱ طرحوارهٔ پوستهٔ استوانه‌ای FGM

۳- معادلات حاکم بر مسأله

معادلات حرکت پوستهٔ استوانه‌ای مدور با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی[1] به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۹]:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_6}{\partial x_2}=I_1\ddot{u}+I_2\ddot{\phi}_1$$
$$\frac{\partial N_6}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}=I_1\ddot{v}+I_2\ddot{\phi}_2$$
$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial M_6}{\partial x_2}-Q_1=I_2\ddot{u}+I_3\ddot{\phi}_1$$
$$\frac{\partial M_6}{\partial x_1}+\frac{\partial M_2}{\partial x_2}-Q_2=I_2\ddot{v}+I_3\ddot{\phi}_2 \quad (۵)$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}-\frac{N_2}{R}=I_1\ddot{w}$$

که در آن R شعاع استوانه، u، v و w مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای محورهای x_1 ، x_2 و ξ و ϕ_1 و ϕ_2 توابع دوران[2] و مشتق‌های موجود در معادله نسبت به زمان است. برای مسألهٔ ما موجود برایندهای تنش[3] چنین است:

$$\begin{aligned}
&N_1=A_{11}\varepsilon_1^0+A_{12}\varepsilon_2^0+B_{11}\kappa_1^0+B_{12}\kappa_2^0\\
&N_2=A_{21}\varepsilon_1^0+A_{22}\varepsilon_2^0+B_{21}\kappa_1^0+B_{22}\kappa_2^0\\
&N_6=A_{66}\varepsilon_6^0+B_{66}\kappa_6^0\\
&M_1=B_{11}\varepsilon_1^0+B_{12}\varepsilon_2^0+D_{11}\kappa_1^0+D_{12}\kappa_2^0\\
&M_2=B_{21}\varepsilon_1^0+B_{22}\varepsilon_2^0+D_{21}\kappa_1^0+D_{22}\kappa_2^0\\
&M_6=B_{66}\varepsilon_6^0+D_{66}\kappa_6^0\\
&Q_1=K_{55}^2A_{55}\varepsilon_5^0,\qquad Q_2=K_{44}^2A_{44}\varepsilon_4^0
\end{aligned} \quad (۶)$$

که در آن K_{44}^2 و K_{55}^2 ضرایب تصحیح برشی است. در روابط (۵) و (۶) عبارت‌های اینرسی، کرنش و انحنا[4] و همچنین ضرایب سختی، به ترتیب به شکل روابط زیر است:

$$(I_1, I_2, I_3)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho(1, \xi, \xi^2)d\xi \quad (۷)$$

و

$$\varepsilon_1^0=\frac{\partial u}{\partial x_1},\quad \varepsilon_2^0=\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{w}{R},\quad \varepsilon_4^0=\phi_2+\frac{\partial w}{\partial x_2}$$
$$\varepsilon_5^0=\phi_1+\frac{\partial w}{\partial x_1},\quad \varepsilon_6^0=\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2} \quad (۸)$$
$$\kappa_1^0=\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1},\quad \kappa_2^0=\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2},\quad \kappa_6^0=\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}$$

و

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right)=\int_{-h/2}^{+h/2}Q_{ij}(1, \xi, \xi^2)d\xi \quad (۹)$$

در ادامه، معادلات حرکت برای تئوری مرتبهٔ اول برشی برحسب مؤلفه‌های کلی جابه‌جایی، با جایگذاری رابطهٔ (۸) در

1. FSDT

2. Rotation Functions
3. Stress Resultants
4. Curvature

(۶) و سپس با جایگذاری نتیجهٔ آن در رابطهٔ (۵)، به شکل زیر توصیف می‌شود [۱۰]:

$$[L]\{\Delta\}=\{0\} \qquad (۱۰)$$

که $\{\Delta\}$ با رابطهٔ زیر داده شده و ماتریس L در پیوست آورده شده است:

$$\{\Delta\}=\{u, v, \phi_1, \phi_2, w\}^T \qquad (۱۱)$$

۴- روش DQM

در روش DQ تابع $f=f(x)$ در دامنهٔ $a\le x\le b$ در نظر گرفته شده و مشتق مرتبهٔ nام تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_i به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}\Big|_{x=x_i}=\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{(n)} f(x_j), \quad i=1, 2, \dots, M \qquad (۱۲)$$

که در آن $c_{ij}^{(n)}$ ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبهٔ nام، M تعداد نقاط شبکه[1] و x_i مختصات نقطهٔ i ام است. جزئیات مباحث مربوط به DQ و GDQ در کتاب‌های کوان و چانگ[2] [۱۹]، شو (۱۹۹۱) [۲] و شو و ریچارد [۲۰] آورده شده است. در این روش‌ها از توابع درون‌یابی لاگرانژ[3] برای ضرایب وزنی و به‌دست آوردن رابطهٔ بازگشتی، که از نقاط شبکه و محل قرارگیری نقاط نمونه مستقل است، استفاده می‌شود. با به‌کارگیری چندجمله‌ای لاگرانژ به عنوان چندجمله‌ای پایه داریم:

$$P_j(x)=\frac{L(x)}{(x-x_j)L^{(1)}(x_j)}, \quad j=1, 2, \dots, M \qquad (۱۳)$$

که در آن:

$$L(x)=\prod_{i=1}^{M}(x-x_i), \quad L^{(1)}(x_j)=\prod_{i=1, i\neq j}^{M}(x_j-x_i) \qquad (۱۴)$$

$L^{(1)}(x)$ مشتق اول $L(x)$ و x_i مختصات نقاط نمونه است که ممکن است به‌صورت اختیاری انتخاب شوند. سپس تابع $f(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x)\cong P_M(x)=\sum_{j=1}^{M} d_j p_j(x) \qquad (۱۵)$$

که d_j مقداری ثابت است. به آسانی می‌توان نشان داد که چند جمله‌ای $P_M(x)$، یک فضای برداری خطی M بعدی تشکیل می‌دهد. بدیهی است که در فضای برداری خطی V_M، $P_j(x)$ مجموعه‌ای از بردارهای پایه است. با جایگذاری رابطهٔ (۱۵) در (۱۲) و با استفاده از رابطهٔ (۱۳)، برای ضرایب وزنی می‌توان نوشت:

ضرایب وزنی برای مشتق مرتبهٔ اول:

$$P_j^{(1)}(x_i)=c_{ij}^{(1)}=\frac{L^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)L^{(1)}(x_j)}$$
$$c_{ii}^{(1)}=-\sum_{j=1, j\neq i}^{M} c_{ij}^{(1)}, \quad i,j=1, 2, \dots, M \qquad (۱۶)$$

ضرایب وزنی برای مشتق مرتبهٔ دوم و بالاتر:

$$c_{ij}^{(n)}=n\left(c_{ii}^{(n-1)}c_{ij}^{(1)}-\frac{c_{ij}^{(n-1)}}{x_i-x_j}\right), \quad i\neq j$$
$$c_{ii}^{(n)}=-\sum_{j=1, j\neq i}^{M} c_{ij}^{(n)}, \quad i\neq j \qquad (۱۷)$$
$$n=2, 3, \dots, M-1, \quad i,j=1, 2, \dots, M$$

در روابط بالا هیچ محدودیتی در انتخاب نقاط شبکه وجود ندارد و استفاده از این رابطه باعث صرفه‌جویی در زمان محاسبه می‌شود. گزینه‌های مختلفی برای انتخاب موقعیت نقاط شبکه وجود دارد که ساده‌ترین روش برای انتخاب نقاط شبکه در دامنهٔ محاسباتی، انتخاب با فاصلهٔ برابر در راستای مختصات دامنهٔ محاسباتی است. البته نشان داده شده است که توزیع غیر یکنواخت نقاط شبکه نتایج بهتری را نسبت به نقاط شبکه با فاصلهٔ مساوی به‌دست می‌دهد. شو و ریچارد [۲۰] روشی را برای انتخاب نقاط نمونه پیشنهاد کردند که نقاط انتهایی را نیز

1. Grid Points
2. Quan and Chang
3. Lagrange Interpolation

شامل می‌شود؛ این نقاط چبیشف-گوس-لوباتو نامیده می‌شود. برای این انتخاب داریم:

نقاط شبکه با فواصل مساوی یا توزیع یکنواخت:

$$r_i=\frac{i-1}{M-1},\quad i=1,2,\ldots,M \tag{۱۸}$$

نقاط نمونهٔ چبیشف-گوس-لوباتو[1]:

$$r_i=\frac{1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi}{2},\ i=1,2,\ldots,M \tag{۱۹}$$

برت و ملک نشان دادند که انتخاب نقاط شبکه به نوع مسأله بستگی دارد و لذا پیشنهاد کردند که برای محاسبات مکانیک ساختاری از شبکهٔ چبیشف-گوس-لوباتو استفاده شود. در این مقاله توزیع نقاط چبیشف-گوس-لوباتو انتخاب شده و اثر آن بر شبکه، سرعت و پایداری روش DQM مطالعه شده است.

۵- پیاده‌سازی عددی

در ادامه ارتعاش آزاد پوستهٔ استوانه‌ای مطالعه می‌شود. به‌منظور تحلیل معادلات پوسته از روش DQM استفاده شده که دقت عددی بالایی داشته و کدنویسی آن آسان است. برای پوستهٔ استوانه‌ای با شرایط مرزی مختلف در $x_1=\pm L/2$، می‌توان مؤلفه‌های کلی جابه‌جایی را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{Bmatrix} u\\ v\\ \phi_1\\ \phi_2\\ w\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} U_m(x_1)\cos\beta_m x_2\\ V_m(x_1)\sin\beta_m x_2\\ \Phi_{1m}(x_1)\cos\beta_m x_2\\ \Phi_{2m}(x_1)\sin\beta_m x_2\\ W_m(x_1)\cos\beta_m x_2\end{Bmatrix}T_m(t) \tag{۲۰}$$

اگر تحلیل فرکانسی مد نظر باشد، $T_m=e^{i\omega_m t}$ است و در حالتی‌که تحلیل پایداری[2] مد نظر باشد، T=1. ω_m فرکانس طبیعی مود شمارهٔ m است (برای هر مقدار m، بینهایت فرکانس طبیعی وجود دارد)، در آن $i=\sqrt{-1}$ و $\beta_m=\frac{m}{R}\ (m=0,1,2,\ldots)$.

1. Chebyshev-Gauss-Lobatto
2. Stability Analysis

۵-۱- گسسته‌سازی معادلات حرکت

با استفاده از روش DQM، به‌صورت تبدیل هر مشتق به مجموع وزنی مقادیر گرهی از متغیرهای وابسته، می‌توان معادلات حرکت را به شکل گسسته نوشت. هر یک از معادلات تقریبی، در یک نقطه از شبکه معتبر است. معادلات حاکم به شکل زیر گسسته‌سازی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{M}\left(A_{11}c_{ik}^{(2)}\right)U_k-(A_{66}\beta_m^2)U_i+\sum_{k=1}^{M}\left(B_{11}c_{ik}^{(2)}\right)\Phi_{1k}\\
&+\sum_{k=1}^{M}\left((A_{12}+A_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)V_k-\left(B_{66}\beta_m^2\right)\Phi_{1i}+\\
&\sum_{k=1}^{M}\left((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)\Phi_{2k}+\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{A_{12}}{R}c_{ik}^{(1)}\right)W_k\\
&=-\omega_m^2(I_1U_i+I_2\Phi_{1i})\\
&-\sum_{k=1}^{M}\left((A_{12}+A_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)U_k+\sum_{k=1}^{M}\left(A_{66}c_{ik}^{(2)}\right)V_k\\
&-\left(A_{22}\beta_m^2\right)V_i-\sum_{k=1}^{M}\left((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)\Phi_{1k}+\\
&\sum_{k=1}^{M}\left(B_{66}c_{ik}^{(2)}\right)\Phi_{2k}-\left(B_{22}\beta_m^2\right)\Phi_{2i}-\left(\frac{A_{22}}{R}\beta_m\right)W_i=\\
&-\omega_m^2(I_1V_i+I_2\Phi_{2i})\\
&\sum_{k=1}^{M}\left(B_{11}c_{ik}^{(2)}\right)U_k-(B_{66}\beta_m^2)U_i+\sum_{k=1}^{M}\left(D_{11}c_{ik}^{(2)}\right)\Phi_{1k}\\
&+\sum_{k=1}^{M}\left((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)V_k+\\
&\sum_{k=1}^{M}\left((D_{12}+D_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)\Phi_{2k}+\\
&\sum_{k=1}^{M}\left(\left(\frac{B_{12}}{R}-K_{55}^2A_{55}\right)c_{ik}^{(1)}\right)W_k+\\
&\left(-K_{55}^2A_{55}-D_{66}\beta_m^2\right)\Phi_{1i}=-\omega_m^2(I_2U_i+I_3\Phi_{1i})\\
&-\sum_{k=1}^{M}\left((B_{12}+B_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)U_k+\sum_{k=1}^{M}\left(B_{66}c_{ik}^{(2)}\right)V_k\\
&-\left(B_{22}\beta_m^2\right)V_i-\sum_{k=1}^{M}\left((D_{12}+D_{66})\beta_m c_{ik}^{(1)}\right)\Phi_{1k}+
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\sum_{k=1}^{M}\left(D_{66}c_{ik}^{(2)}\right)\Phi_{2k}+\left(-K_{44}^2A_{44}-D_{22}\beta_m^2\right)\Phi_{2i}+$$
$$\left((-\frac{B_{22}}{R}+K_{44}^2A_{44})\beta_m\right)W_i=-\omega_m^2(I_2V_i+I_3\Phi_{2i})$$
$$-\left(\frac{A_{22}}{R}\beta_m\right)V_i+\sum_{k=1}^{M}\left(\left(-\frac{B_{12}}{R}+K_{55}^2A_{55}\right)c_{ik}^{(1)}\right)\Phi_{1k}$$
$$-\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{A_{12}}{R}c_{ik}^{(1)}\right)U_k+\left(-\frac{A_{22}}{R^2}-K_{44}^2A_{44}\beta_m^2\right)W_i+$$
$$\left(\left(-\frac{B_{22}}{R}+K_{44}^2A_{44}\right)\beta_m\right)\Phi_{2i}+$$
$$\sum_{k=1}^{M}\left(K_{55}^2A_{55}c_{ik}^{(2)}\right)W_k=-\omega_m^2(I_1W_i)$$

که در آن $c_{ik}^{(1)}$ و $c_{ik}^{(2)}$، $i, k=1, 2, \dots, M$ به ترتیب ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه اول و دوم در راستای x_1 و M تعداد کل نقاط شبکه در راستای x_1 است.

۵-۲- جایگذاری و سازگاری شرایط مرزی

با به‌کارگیری روش DQM، شکل گسستهٔ شرایط مرزی به شکل زیر نوشته می‌شود:

• شرایط مرزی گیردار (C):

$$U=V=\Phi_1=\Phi_2=W=0 \quad \Rightarrow \tag{۲۲}$$
$$U_i=V_i=\Phi_{1i}=\Phi_{2i}=W_i=0 \quad \text{برای} \quad i=1, N$$

• شرایط مرزی ساده (S):

$$V=\Phi_2=W=N_1=M_1=0 \quad \Rightarrow$$
$$\begin{cases} V_i=\Phi_{2i}=W_i=0 \\ \sum_{k=1}^{M}\left(A_{11}c_{ik}^{(1)}\right)U_k+A_{12}\beta_mV_i+\sum_{k=1}^{M}\left(B_{11}c_{ik}^{(1)}\right)\Phi \\ B_{12}\beta_m\Phi_{2i}+\frac{A_{12}}{R}W_i=0 \quad \text{برای} \quad i=1, M \\ \sum_{k=1}^{M}\left(B_{11}c_{ik}^{(1)}\right)U_k+B_{12}\beta_mV_i+\sum_{k=1}^{M}\left(D_{11}c_{ik}^{(1)}\right)\Phi \\ D_{12}\beta_m\Phi_{2i}+\frac{B_{12}}{R}W_i=0 \quad \text{برای} \quad i=1, M \end{cases} \tag{۲۳}$$

۵-۳- روند حل

با استفاده از روش DQM می‌توان معادلات حرکت را با تبدیل هر مشتق به مجموع وزنی مقادیر گرهی از متغیرهای وابسته به شکل گسسته نوشت. به این ترتیب کل سیستم معادلات دیفرانسیل گسسته شده و در حالت کلی به مجموعه معادلات جبری خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix}[S_{bb}] & [S_{bd}] \\ [S_{db}] & [S_{dd}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_b \\ \Delta_d\end{Bmatrix}=\omega_m^2\begin{Bmatrix}\{0\} \\ \{\Delta_d\}\end{Bmatrix} \tag{۲۴}$$

Δ بردار مؤلفه‌های جابه‌جایی بوده و زیرنویس b نشان دهندهٔ نقاط شبکه در مرز و نقاط مجاور است که شرایط مرزی در آنها اعمال شده. زیر نویس d سایر نقاط شبکه را مشخص می‌کند. برای حل این دستگاه می‌توان آن‌را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\left(S_{dd}-S_{db}(S_{bb})^{-1}S_{bd}\right)\Delta_d=\omega_m^2\Delta_d \tag{۲۵}$$

فرکانس‌های طبیعی ساختار مورد نظر با حل مسأله مقادیر ویژهٔ استاندارد رابطهٔ (۲۵) به‌دست می‌آیند. در این پژوهش، روند حل با استفاده از روش DQM در نرم‌افزار (MATLAB) برنامه‌نویسی شده و نتایج بر حسب فرکانس محاسبه شده است.

۶- نتایج و بحث

در این قسمت برخی از نتایج و ملاحظات در مورد مسألهٔ ارتعاش آزاد پوستهٔ استوانه‌ای همگن و FGM ارائه می‌شود. نتایج با استفاده از روش عددی DQM به‌دست آمده است.

۶-۱- پوستهٔ استوانه‌ای همگن

در این پژوهش از فولاد ضد زنگ[1] و نیکل[2] به‌عنوان مواد تشکیل دهندهٔ پوستهٔ استوانه‌ای FGM استفاده شده است. خواص مکانیکی این مواد در جدول ۱ آورده شده است. برای بررسی و تأیید نتایج عددی، مقایسه‌هایی انجام شده است.

1. Stainless Steel
2. Nickel

در جــدول ۲ پــارامتر فرکانســی $\Omega_{mn}=\omega R\sqrt{\left[\left(1-\nu^2\right)\rho\right]/E}$ برای پوستهٔ استوانه‌ای همگن با شرایط مختلف مرزی بررسی شـده اسـت. نتـایج عـددی بـا نتـایج حاصـل از نـرم‌افـزار ABAQUS برای پوستهٔ استوانه‌ای با تعـداد مـوج محـوری برابر ۱ (m=1)، نسبت طول بـه شـعاع برابـر ۱ (L/R=1) و مقادیر مختلف نسـبت شـعاع بـه ضـخامت اسـتوانه (R/h)، مقایسه شده و همان‌طور که در جدول ۲ مشخص است نتایج دقت بالایی را نشان می‌دهد.

در جدول ۳ پارامتر فرکانسی برای پوستهٔ استوانه‌ای همگـن آورده شده است. نتایج عددی با نتایج مقالهٔ برت و مالیک [۲۱] و همچنین با نتایج نـرم‌افـزار ABAQUS، بـرای پوسـته‌ای بـا مقادیر مختلف m، n، نسبت طول به شعاع و نسـبت شـعاع بـه ضخامت پوسته، مقایسه شده که نتایج هر سـه روش همخـوانی دارند و این نشان‌دهندهٔ دقت بسیار بالای روش DQM است.

۶-۲- پوستهٔ استوانه‌ای FGM

در این بخش ارتعاش پوستهٔ استوانه‌ای FGM با شرایط مختلف مرزی بررسی می‌شود. در ایـن‌جـا همچنـین نتـایج مشخصـات فرکانسی و تأثیر کسر حجمی V بر پوسـتهٔ اسـتوانه‌ای بررسـی شده است.

جدول ۱ خواص مواد در دمای ۳۰۰ درجهٔ کلوین [۱۴]

ضرایب	فولاد ضد زنگ			نیکل		
	E (Pa)	ν	ρ (kg m⁻³)	E (Pa)	ν	ρ (kg m⁻³)
P_0	۲۰۱.۰۴×۱۰^۹	۰.۳۲۶۲	۸۱۶۶	۲۲۳.۹۵×۱۰^۹	۰.۳۱۰۰	۸۹۰۰
P_{-1}	۰	۰	۰	۰	۰	۰
P_1	۳.۰۷۹/۱۰^۴	-۲/۱۰^۴	۰	-۲.۷۹۴/۱۰^۴	۰	۰
P_2	-۶.۵۳۴/۱۰^۷	-۳.۷۹۷/۱۰^۷	۰	-۳.۹۹۸/۱۰^۹	۰	۰
P_3	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	۲.۰۷۷۸۸×۱۰^۱۱	۰.۳۱۷۷۵۶	۸۱۶۶	۲.۰۵۰۹۸×۱۰^۱۱	۰.۳۱۰۰	۸۹۰۰

جدول ۲ مقایسهٔ پارامتر فرکانسی Ω_{mn} به‌دست آمده از DQM با نتـایج ABAQUS برای پوستهٔ استوانه‌ای با شرایط مختلف مرزی

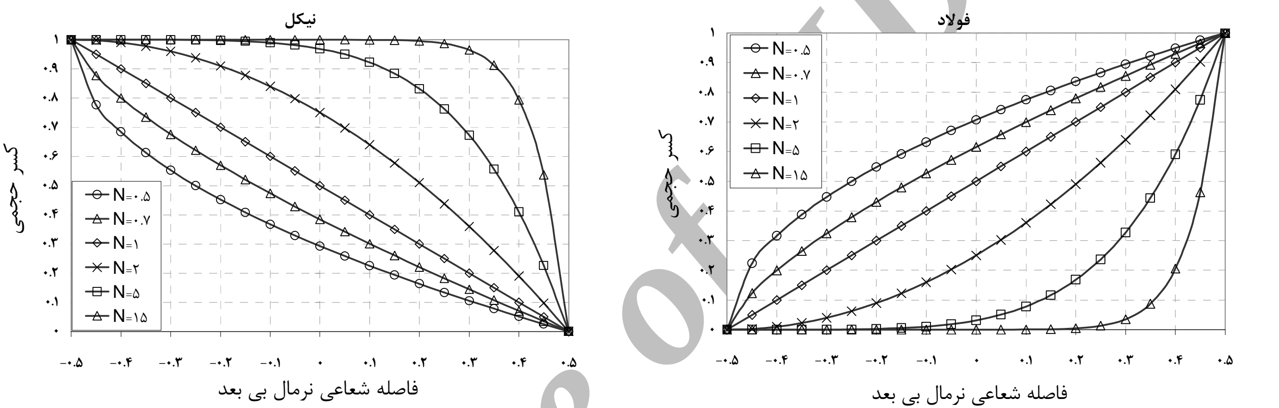
شرایط مرزی	R/h	n	Ω_{mn}	
			DQM	ABAQUS
S-S	۵۰۰	۱۲	۰.۱۴۰۹	۰.۱۴۰۷
		۱۳	۰.۱۴۲۰	۰.۱۴۱۸
		۱۴	۰.۱۴۶۷	۰.۱۴۶۳
S-C	۱۰۰	۷	۰.۲۸۶۰	۰.۲۸۴۵
		۹	۰.۳۱۲۲	۰.۳۱۰۰
		۵	۰.۳۴۴۲	۰.۳۴۳۸
C-C	۲۰	۴	۰.۶۱۹۱	۰.۶۱۱۴
		۵	۰.۶۶۱۹	۰.۶۵۴۹
		۲	۰.۷۴۱۶	۰.۷۴۰۴

با تغییر کسر حجمی فولاد و نیکل، اثر کسر حجمی تشکیل دهنده مشخص می‌شود. برای این منظور با تغییـر تـوان نمـایی N، می‌توان کسر حجمی را تغییر داد.

ساختار FGM در این پژوهش بـه شـکلی اسـت کـه نیکـل در سطح داخلی استوانه و فولاد در سطح بیرونی استوانه قرار می‌گیـرد و خواص پوسته از لایهٔ داخلی به لایهٔ بیرونی تغییر می‌کنـد. شـکل ۲ تغییرات کسر حجمی را برای فولاد و نیکل به‌طور جداگانه نشـان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۲ مشخص است، برای نیکل، کسـر حجمی از مقدار ۱ در ξ=-0.5h تا ۰ در ξ=0.5h کاهش مـی‌یابـد؛ یعنی هرچه بیشتر به سطح داخلی نزدیک می‌شویم، خـواص مـاده به نیکل نزدیکتر است و هر چه به سـطح خـارجی پوسـته نزدیـک می‌شویم، خواص ماده به فولاد نزدیک‌تر می‌شود. در شـکل سـمت چپ (تغییرات کسر حجمی برای نیکـل) در فواصـل (در جهـت ξ) دور از ξ=0.5h ، نرخ کاهش کسـر حجمـی بـرای N<1 بزرگتـر از N>1 و در فواصل نزدیک به ξ=0.5h ، نرخ کاهش کسـر حجمـی برای N>1 بزرگتر از N<1 است. تغییـرات فـولاد عکـس تغییـرات نیکل اسـت. در فواصـل نزدیـک بـه ξ=-0.5h (در جهـت ξ)، نـرخ افـزایش کسـر حجمـی بـرای N<1 بزرگتـر از N>1 و در فواصـل نزدیک به ξ=0.5h ، نرخ افزایش کسر حجمی بـرای N>1 بزرگتـر از N<1 است. رفتار فرکانسی مربوط به پوستهٔ FGM بسیار شـبیه به پوستهٔ همگن است.

جدول ۳ مقایسهٔ پارامتر فرکانسی Ω_{mn} به‌دست آمده برای پوستهٔ استوانه‌ای همگن با شرایط مرزی دو سر گیردار

L/R	R/h	m	n	M	Ω_{mn} برت و مالیک [۲۱]	Ω_{mn} نتایج ما	Ω_{mn} ABAQUS
۵	۲۰	۶	۲	۱۳	۰.۷۸۵۵۳۵	۰.۷۸۳۶۷۲	۰.۷۷۹۶۲۷
				۱۷	۰.۷۵۹۳۵۳	۰.۷۷۹۸۶۰	
				۲۱	۰.۷۷۹۴۸۰	۰.۷۷۹۸۵۶	
				۲۵	۰.۷۷۹۴۷۸	۰.۷۷۹۸۵۶	
۱	۵۰۰	۷	۴	۱۷	۰.۹۸۱۰۴۷	۰.۹۸۰۱۷۶	۰.۹۸۰۰۱۲
				۲۱	۰.۹۸۰۲۴۱	۰.۹۸۰۱۵۴	
				۲۵	۰.۹۸۰۲۳۰	۰.۹۸۰۱۵۵	



شکل ۲ تغییرات کسر حجمی برای فولاد و نیکل با فاصلهٔ شعاعی نرمال بی بعد و در راستای ضخامت پوسته

فرکانس‌های مربوط به مودهای طولی (m) بیشتر نسبت به مودهای طولی کوچکتر، بزرگتر است؛ بنابراین فرکانس‌های اصلی در مود طولی شمارهٔ یک (m=1) اتفاق می‌افتد. نکتهٔ قابل توجه این است که مقدار توان نمایی N ، تأثیری بر شمارهٔ موج پیرامونی (n) که در آن فرکانس اصلی رخ می‌دهد، ندارد. به‌عنوان مثال در جدول ۴ به‌ازای L/R=0.5، فرکانس‌های اصلی مربوط به مقادیر مختلف N در شمارهٔ موج پیرامونی پانزدهم اتفاق می‌افتد. فرکانس‌های طبیعی مربوط به پوستهٔ استوانه‌ای کوتاه (یعنی نسبت L/R کوچکتر)، بزرگتر از فرکانس‌های پوستهٔ بلندتر است. همچنین فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ ضخیم‌تر (یعنی نسبت h/R بزرگ) بزرگتر از فرکانس‌های پوستهٔ نازکتر است.

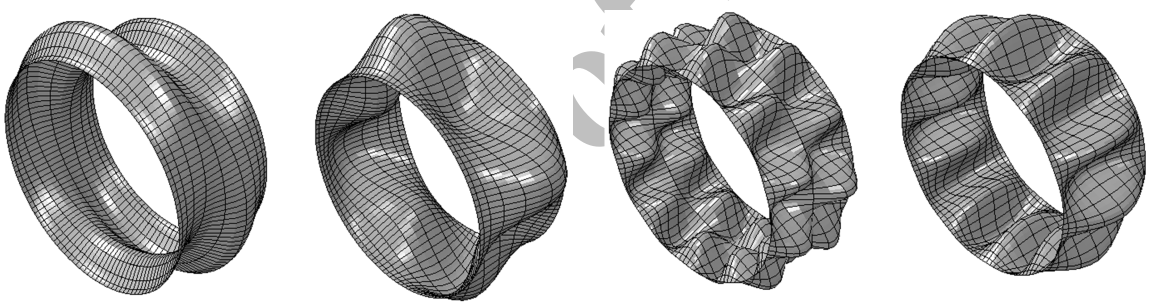
جدول ۴ تغییرات فرکانس‌های طبیعی اصلی را بر حسب نسبت L/R برای پوستهٔ استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی ساده نشان می‌دهد. همچنین در این جدول نتایج به‌دست آمده از روش DQM با نتایج مقالهٔ لوی و همکاران [۱۴] مقایسه شده است. اعداد داخل پرانتز نشان‌دهندهٔ تعداد موج پیرامونی n هستند که در آن فرکانس اصلی رخ می‌دهد. برای ساختار FGM این مقاله، با افزایش N، فرکانس اصلی کاهش می‌یابد؛ در واقع فرکانس‌های طبیعی به‌ازای مقادیر بزرگ N، به مقادیر مربوط به N^{SS}، و به ازای مقادیر کوچک N، فرکانس‌ها به مقادیر N^{N} نزدیک هستند. البته برای تمامی مقادیر N، فرکانس‌های اصلی در شماره موج پیرامونی یکسانی اتفاق می‌افتد که مقدار آن بین مقادیر فرکانسی N^{SS} و N^{N} است.

ستون‌های N^{SS} و N^{N} به‌ترتیب فرکانس طبیعی مربوط به پوستهٔ از جنس فولاد و نیکل را نشان می‌دهد.

در جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی اصلی پوستهٔ استوانه‌ای با شرایط مرزی دو سر گیردار مشخص شده است. در این جدول نتایج با مقالهٔ سانتوز و همکاران [۱۶] مقایسه شده است. فرکانس‌ها بر حسب مقادیر مختلف توان نمایی N و در مود هشتم محاسبه شده است. در این جدول از زیرکونیوم در سطح داخلی پوسته و از فولاد در سطح خارجی پوسته استفاده شده است.

جدول ۴ مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی (هرتز) بر حسب نسبت L/R برای پوستهٔ استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی ساده در دو طرف (h/R=۰.۰۰۲ و m=۱)

L/R	نام روش	n	N^{SS}=۰	N^{N}=۰	N=۰.۵	N=۰.۷	N=۱	N=۲	N=۵	N=۱۵
۰.۲	لوی و همکاران	(۲۰)	۴۳۹.۳۶	۴۱۷.۵۴	۴۳۲.۱۲	۴۳۰.۴۶	۴۲۸.۶۲	۴۲۵.۱۶	۴۲۱.۶۰	۴۱۹.۱۷
	نتایج ما		۴۳۹.۵۳	۴۱۷.۷۱	۴۳۲.۲۸	۴۳۰.۶۳	۴۲۸.۷۸	۴۲۵.۳۲	۴۲۱.۷۵	۴۱۹.۳۳
۰.۵	لوی و همکاران	(۱۵)	۱۷۵.۴۹	۱۶۶.۷۶	۱۷۲.۵۹	۱۷۱.۹۳	۱۷۱.۱۹	۱۶۹.۸۱	۱۶۸.۳۸	۱۶۷.۴۱
	نتایج ما		۱۷۵.۸۲	۱۶۷.۰۸	۱۷۲.۹۱	۱۷۲.۲۵	۱۷۱.۵۱	۱۷۰.۱۳	۱۶۸.۷۰	۱۶۷.۷۳
۱	لوی و همکاران	(۱۱)	۸۷.۳۳۱	۸۲.۹۹۳	۸۵.۸۹۰	۸۵.۵۶۱	۸۵.۱۹۵	۸۴.۵۰۶	۸۳.۷۹۸	۸۳.۳۱۶
	نتایج ما		۸۷.۶۸۳	۸۳.۳۲۶	۸۶.۲۳۵	۸۵.۹۰۵	۸۵.۵۳۷	۸۴.۸۴۶	۸۴.۱۳۵	۸۳.۶۵۰
۲	لوی و همکاران	(۸)	۴۳.۳۷۳	۴۱.۲۱۷	۴۲.۶۵۶	۴۲.۴۹۳	۴۲.۳۱۱	۴۱.۹۶۹	۴۱.۶۱۸	۴۱.۳۷۸
	نتایج ما		۴۳.۷۳۰	۴۱.۵۵۶	۴۳.۰۰۷	۴۲.۸۴۲	۴۲.۶۵۹	۴۲.۳۱۴	۴۱.۹۶	۴۱.۷۱۸



C-C ،n=۱ ،m=۲ — L/R=۱ ،h/R=۰.۰۵ | C-S ،n=۴ ،m=۱ — L/R=۱ ،h/R=۰.۰۵ | S-S ،n=۱۱ ،m=۲ — L/R=۱ ،h/R=۰.۰۰۲ | S-S ،n=۱۱ ،m=۱ — L/R=۱ ،h/R=۰.۰۰۲

شکل ۳ شکل مود پوستهٔ استوانه‌ای FGM با شرایط مختلف مرزی

جدول ۵ مقایسهٔ فرکانس‌های اصلی (هرتز) پوستهٔ استوانه‌ای FGM برای شرایط مرزی دو سر گیردار

R=۱۹/۰۵(m) , L=۰/۳۸۱(m) , h=۰/۰۰۰۵۰۱(m), m=۱, n=۸

زیرکونیا: E=۱۶۸/۰۶ GPa, ν=۰/۳, ρ=۵۷۰۰ kgm^{-3}

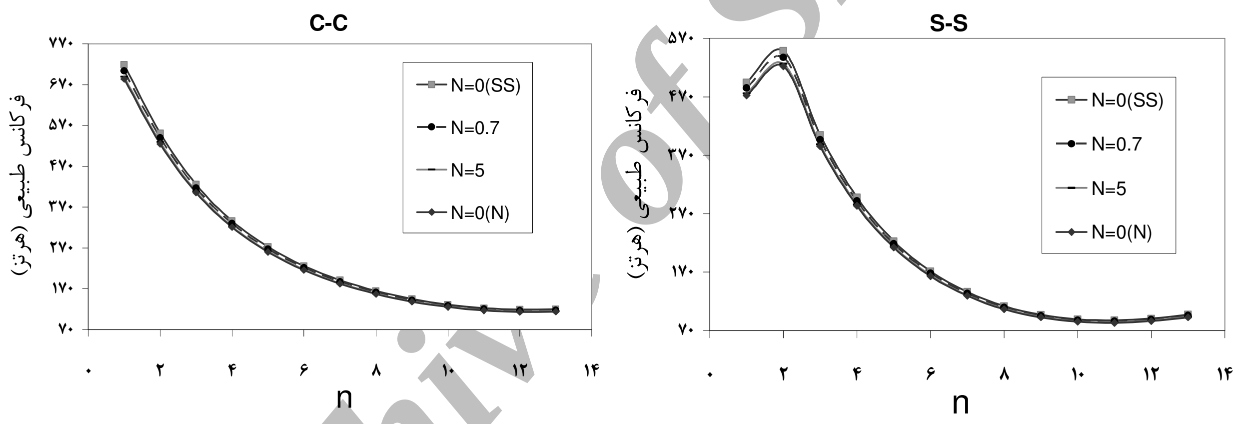
فولاد: E=۲۰۷/۷۹ GPa, ν=۰/۳۱۷۸, ρ=۸۱۶۶ kgm^{-3}

N	سانتوز و همکاران [۱۶]	نتایج ما
۰.۱	۴۰۰.۰۲۱	۴۰۰.۸۷۷
۰.۲	۳۹۷.۵۹۹	۳۹۸.۳۰۰
۱	۳۸۶.۱۵۰	۳۸۷.۰۶۷
۴	۳۷۶.۷۸۹	۳۷۷.۹۹۹

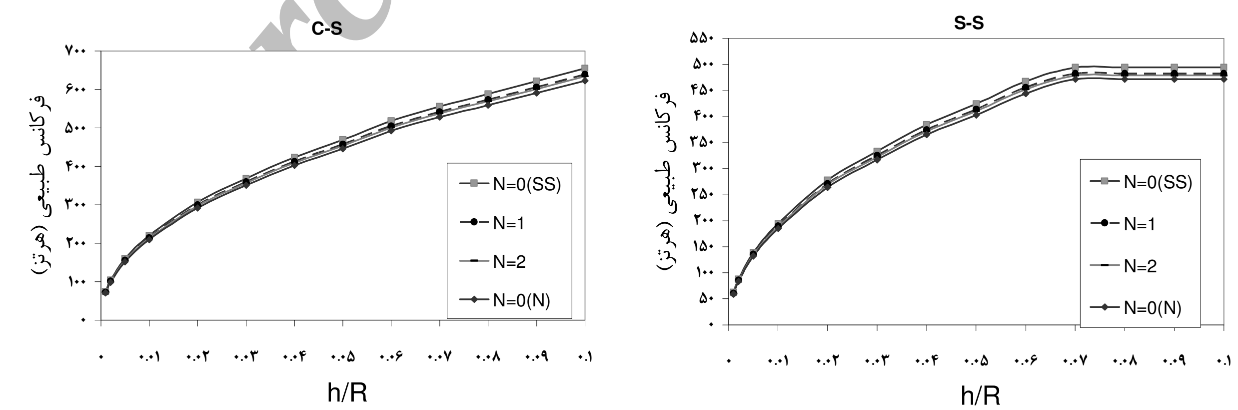
همان‌طور که در جداول ۴ و ۵ مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست آمده از روش DQM به نتایج سایر مقالات بسیار نزدیک بوده و پوستهٔ FGM نیز مشابه پوستهٔ همگن، سرعت و دقت روش DQ را تأیید می‌کند.

شکل ۳ شکل مودهای پوستهٔ استوانه‌ای FGM را برای شرایط مرزی و ابعاد مختلف نشان می‌دهد. دو شکل مود سمت راست مربوط به پوستهٔ با شرایط مرزی ساده در دو طرف است که در هر دو، تعداد موج پیرامونی برابر ۱۱ (n=11) بوده و در شکل اول (از سمت راست) مود طولی برابر یک (m=1) است؛ این شکل مود مربوط به فرکانس اصلی پوسته است. شکل دوم با داشتن مود طولی دو از شکل اول متمایز می‌شود. جزئیات سایر شکل‌ها در شکل (۳) مشخص شده است.

در شکل ۴ فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای FGM (h/R=0.002 و L/R=1) برای شرایط مختلف مرزی محاسبه و ترسیم شده است. با افزایش شمارهٔ موج پیرامونی، روند کلی فرکانس‌ها در تمامی شرایط مرزی ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است. البته در حالتی که استوانه در دو طرف دارای شرایط مرزی ساده باشد، فرکانس در ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد؛ اما روند کلی در این حالت تقریباً مشابه حالت‌های دیگر است. کوچکترین فرکانس یا همان فرکانس اصلی در حالتی رخ می‌دهد که شمارهٔ موج پیرامونی برابر ۱۱ یا ۱۲ باشد. به‌ازای هر مقدار توان نمایی، فرکانس محاسبه شده بین مقادیر فرکانسی به‌دست آمده برای پوستهٔ تشکیل شده از فولاد و نیکل قرار دارد.



شکل ۴ فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای FGM (h/R=0.002 و L/R=1) با مقادیر مختلف توان نمایی برای شرایط مختلف مرزی



شکل ۵ فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای FGM (L/R=1) بر حسب مقادیر مختلف h/R با مقادیر مختلف توان نمایی برای شرایط مختلف مرزی

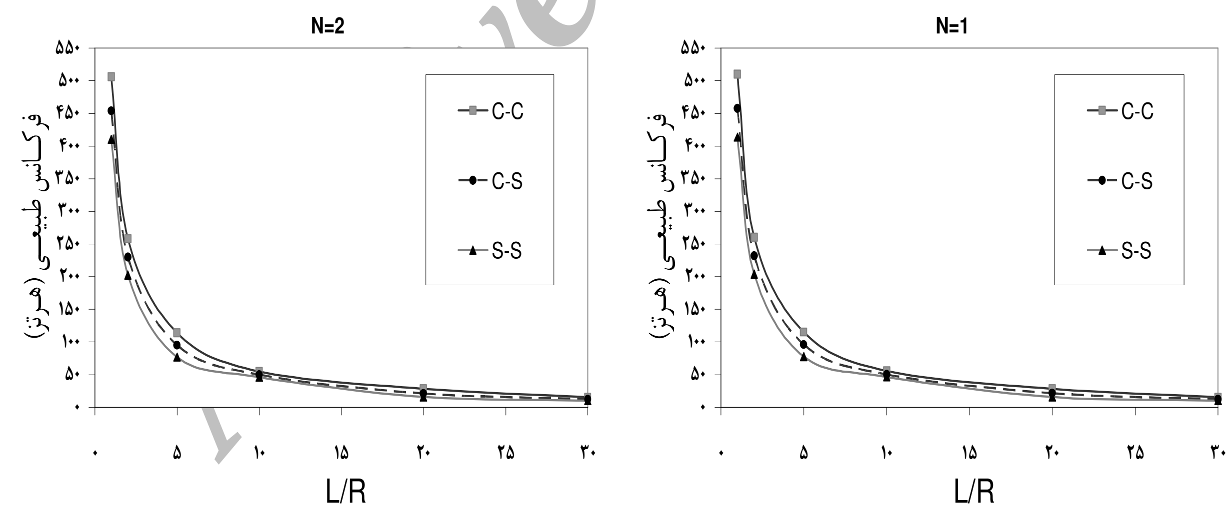
علاوه بر این فرکانس پوستهٔ FGM به ازای مقادیر کوچک N به فرکانس پوستهٔ فولادی، و به ازای مقادیر بزرگ N به فرکانس پوستهٔ نیکل نزدیک است. این نشان می‌دهد که به‌راحتی می‌توان فرکانس‌های پوستهٔ FGM را با تغییر توان نمایی تغییر داد.

در شکل ۵ فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ FGM (L/R=1) بر حسب مقادیر مختلف h/R و برای شرایط مرزی دو سر ساده و یک سر گیردار یک سر ساده ترسیم شده است. مقادیر فرکانس‌های طبیعی در هر دو شرط مرزی ابتدا روندی افزایشی دارد و پس از آن برای حالتی که شرط مرزی در هر دو طرف ساده است، روندی ثابت را طی می‌کند، اما این روند ثابت در دو حالت دیگر دیده نمی‌شود. برای مقادیر بزرگتر h/R، تغییرات فرکانسی کمتر از مقادیر کوچکتر h/R است. برای مثال در حالتی که شرط مرزی در دو طرف ساده باشد، تقریباً در مقدار h/R=0.07 نمودار همگرا می‌شود و پس از آن فرکانس تغییر چندانی ندارد.

شکل ۶ تغییرات فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای FGM را برای شرایط مختلف مرزی (دو سر ساده (S-S)، دو سر گیردار (C-C) و یک سر گیردار یک سر ساده (C-S)) و مقادیر توان نمایی ۱ و ۲ در برابر تغییرات نسبت طول به شعاع (L/R)، نشان می‌دهد که در آن نسبت ضخامت به شعاع (h/R) مقدار ثابت ۰.۰۵ است. با توجه به شکل (۶) مشخص است که فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای در حالت C-C بزرگتر از دو حالت دیگر است؛ در واقع:

C-C > C-S > S-S

در ابتدای نمودار (مقادیر کوچک L/R) اختلاف فرکانس در شرایط مختلف مرزی، بیشتر از انتهای نمودار (مقادیر بزرگتر L/R) است و در واقع می‌توان نتیجه گرفت که اثر شرایط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته در مقادیر کمتر L/R، بیشتر و در مقادیر بزرگتر L/R کمتر است.



شکل ۶ فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای FGM (h/R=0.05) بر حسب مقادیر مختلف L/R با توان نمایی ۱ و ۲ (N=1, 2) برای شرایط مرزی C-C، S-S و C-S

در بخش‌های پیشین، نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار ABAQUS برای تأیید سایر نتایج به‌کار گرفته شده است. نکتهٔ قابل توجه نوع و تعداد المان‌های استفاده شده و همچنین اثر آن بر دقت جواب‌ها است. در این مطالعه المان هشت گرهی (S8R) پوسته به‌کار گرفته شده، و درجهٔ آزادی هر گره برابر شش است. برای پوستهٔ استوانه‌ای با نسبت‌های مختلف طول به شعاع ، تعداد المان یکسانی در نظر گرفته شده است. نتایج برای تعداد المان حدود ۶۰۰ به جواب‌های واقعی بسیار نزدیک است و با ۸۰۰ المان جواب‌ها کاملاً همگرا می‌شوند. افزایش تعداد المان‌ها در این حالت، اثری بر دقت جواب‌ها ندارد. با این تعداد المان و در زمان بسیار اندکی می‌توان جواب‌های بسیار دقیقی را به‌دست آورد.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش مربعات دیفرنسیلی (DQM) به عنوان نوعی روش عددی دقیق برای تحلیل ارتعاش پوستهٔ استوانه‌ای FGM ارائه شده است. فرکانس‌های طبیعی استوانه برای مقادیر مختلف توان نمایی و بر حسب تعداد موج پیرامونی (n)، نسبت طول استوانه به شعاع متوسط آن و همچنین نسبت ضخامت استوانه به شعاع آن، برای شرایط مرزی کلاسیک مطالعه شده است.

مشاهده می‌شود که با افزایش توان نمایی فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ FGM مورد نظر کاهش می‌یابد، این روند برای تمامی شرایط مرزی یکسان است. در تمامی شرایط مرزی، فرکانس‌های به‌دست آمده برای پوستهٔ FGM بین مقادیر فرکانسی به‌دست آمده برای پوستهٔ تشکیل شده از فولاد و نیکل قرار می‌گیرد. نتایج به‌دست آمده برای پوسته همگن و FGM این مقاله، با نتایج مقالات پیشین و نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار ABAQUS تطابق خوبی دارد که این، دقت و کارایی روش DQM را تأیید می‌کند.

فرکانس‌های طبیعی پوستهٔ استوانه‌ای FGM به تعداد مود پیرامونی وابسته است؛ با افزایش شمارهٔ موج پیرامونی، روند کلی تغییرات فرکانسی ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است. در واقع در فرکانس اصلی روند نمودارها از حالت کاهشی به افزایشی تغییر می‌یابد.

با افزایش نسبت ضخامت پوسته به شعاع، روند تغییرات فرکانسی در تمامی شرایط مرزی افزایشی است و برای نسبت‌های بزرگتر h/R تقریباً همگرا می‌شود. با افزایش نسبت طول به شعاع استوانه، فرکانس‌های طبیعی برای تمامی شرایط مرزی کاهش می‌یابد و نشان داده شد که اثر شرط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی در مقادیر کوچکتر L/R، بیشتر بوده و با افزایش نسبت طول به شعاع، این اثر کاهش می‌یابد.

۹- پیوست

$$L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{12}=(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$L_{13}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{14}=(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\ ,\quad L_{15}=\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$L_{21}=L_{12}\ ,\quad L_{22}=A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{23}=(B_{21}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$L_{24}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ ,\quad L_{25}=\frac{A_{22}}{R}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$L_{31}=L_{13}\ ,\quad L_{32}=L_{23}$$

$$L_{33}=-K_{55}^2A_{55}+D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{34}=(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},\ L_{35}=\left(\frac{B_{12}}{R}-K_{55}^2A_{55}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$L_{41}=L_{14}\ ,\quad L_{42}=L_{24}\ ,\quad L_{43}=L_{34}$$

$$L_{44}=-K_{44}^2A_{44}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$L_{45}=\left(\frac{B_{22}}{R}-K_{44}^2A_{44}\right)\frac{\partial}{\partial x_2},\quad L_{51}=-L_{15}$$

$$L_{55}=-\frac{A_{22}}{R^2}+\left(-\bar{N}+K_{55}^2A_{55}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+$$
$$K_{44}^2A_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-I_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

۸- منابع

[1] Bellman, R. E. and Casti, J., Differential quadraturd and long term Integration, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971, 34(1): 235-238.

[2] Shu, C., 1991. Generalized differential integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation, Ph. D. thesis, University of Glasgow Scotland.

[3] C. Shu and H. Du, Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM, Compos Technol Part B 28 (1997), pp. 267–274.

[4] Bert, C. W. and Malik, M., Differential quadrature method in computational mechanics: a review, Applied Mechanics Review, 1996, 49(1): 1-28.

[5] L. Zhanga, Y. Xianga, G.W. Weib, Local adaptive differential quadrature for free vibration analysis of cylindrical shells with various boundary conditions, Int. J. Mech. Sci. 48 (2006) 1126–1138.

[6] Rayleigh, J. W. S., Theory of sound, Macmillan, London. 1(1), 1882.

[7] Love, A. E. H., on the small free vibrations and deformations of thin elastic shells, Phil.Trans. Royal Society of London, 1888, 179(A): 125-137.

[8] J. N. REDDY and C. F. LIu, A higher order shear deformation theory of laminated elastic shells. Int. J. Engno Sci. 23, 319-330 (1985).

[9] A. A. KHDEIR, J. N. REDDY and D. FREDERICK 1989 International Journal of Engineering Science 27, 1337-1351, A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories.

[10] Nosier, A. and Reddy, J.N., 1992. Vibration and stability analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells. J. Sound Vib. 157, pp. 139–159.

[11] (a) Fukui Y. Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force. Int J Jpn Soc Mech Eng 1991; 34:144–8; (b) Koizumi M. The concept of FGM. Ceram Trans Funct Grad Mater 1993; 34:3–10.

[12] Yamanouchi, M., Koizumi, M. and Hirai, Shiota I., Proceedings of the first international symposium on functionally gradient materials, Japan, 1990.

[13] Koizumi, M., The concept of FGM, ceramic transactions, functionally grdient materials, 1993, 3(1): 3-10.

[14] Loy, C. T., Lam, K. Y. and Reddy, J. N., Vibration of functionally graded cylindrical shells, International Journal of Mechanical Sciences, 1999, 41(1): 309-324.

[15] Pradhan , S. C. , Loy, C. T. , Lam, K. Y. and Reddy, J. N. , Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells under Various Boundary Conditions, Applied Acoustics , 2000, 61(1): 111-129.

[16] H. Santos, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, J.N. Reddy, A Semi-Analytical Finite Element Model for the Analysis of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials Under Thermal Shock, Composite Structures, Vol. 86, pp. 10-21, 2008.

[17] Tornabene F. Free vibration analysis of functionally graded conical cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. Comput Meth Appl Mech Eng 2009:2.

[18] Touloukian YS. Thermophysical properties of high temperature solid materials. New York: Macmillian, 1967.

[19] Quan, J. R. and Chang, C. T., New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-I analysis, Computers and Chemical Engineering, 1989, (13): 779-788.

[20] Shu, C. and Richards, B. E., Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible navier-stokes equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1992, 15 (1): 791-798.

[21] Bert, C. W.; Malik, M. (1996a), "Free vibration analysis of thin cylindrical shells by the differential quadrature method", ASME J. Pressure Vessel Tech. 118, 1-12.