



## تحلیل یک بعدی و دوبعدی تغییر شکل های بزرگ تیر با استفاده از تئوری مکانیک محیط پیوسته

منصور درویشه<sup>۱</sup>، ابوالفضل درویشه<sup>۲</sup>، رضا انصاری<sup>۳\*</sup>، علی علی جانی<sup>۴</sup>

۱- استاد مهندسی مکانیک، دانشکده فنی دانشگاه گیلان، رشت

۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشکده فنی دانشگاه گیلان، رشت

۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده فنی دانشگاه گیلان، رشت

۴- دانشجوی دکتری، دانشکده فنی دانشگاه گیلان، رشت

\* رشت، صندوق پستی ۳۷۵۶، r\_ansari@guilan.ac.ir

**چکیده-** در این مطالعه، رفتار غیرخطی هندسی تیر، با فرض ثابت بودن خواص مادی جسم، به کمک روش المان محدود مورد بررسی قرار می گیرد. به منظور مطالعه رفتار تیر دو رهیافت ارائه می گردد؛ در رهیافت اول، تیر با المان های یک بعدی مرتبه دو مدل سازی شده و بر پایه روابط مکانیک محیط پیوسته و با به کارگیری یک استراتژی لاگرانژی (اولیه) فرمول بندی می شود در صورتی که رهیافت دوم با استراتژی اویلری (ثانویه) و به کمک المان های دوبعدی رفتار غیرخطی تیر را بیان می کند. در هر دو رهیافت، با تعیین گرادیان تغییر شکل، وضعیت ثانویه، کرنش ها و تنش های موجود در تیر به دست می آیند.

**کلیدواژه ها:** غیرخطی، المان محدود، استراتژی لاگرانژی، استراتژی اویلری

## One- and two-dimensional analysis of large deformations of beams using continuum mechanics theory

M. Darvizeh<sup>1</sup>, A. Darvizeh<sup>2</sup>, R. Ansari<sup>3\*</sup>, A. Alijani<sup>4</sup>

1- Prof. of Mech. Eng., Univ. of Guilan, Rasht, Iran

2- Prof. of Mech. Eng., Univ. of Guilan, Rasht, Iran

3- Assis. Prof. of Mech. Eng., Univ. of Guilan, Rasht, Iran

4- PhD student, Univ. of Guilan, Rasht

\* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r\_ansari@guilan.ac.ir

**Abstract-** In this paper, with the assumption of constant material properties, the nonlinear behavior of beams is studied using the finite element method. To this end, two approaches are represented: in the first approach, the beam is modeled by one dimensional elements of second order that is formulated according to continuum mechanics relationships based on the Lagrangian strategy, while in the second approach based on the Eulerian strategy the nonlinear behavior of the beam is investigated by making use of two dimensional elements. In both approaches, the second configuration, strains and stresses in the beam are obtained via the calculation of deformation gradient.

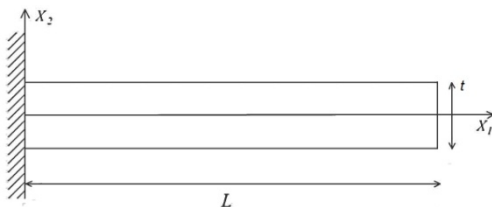
**Keywords:** Nonlinear, Finite Element, Lagrangian Strategy, Eulerian Strategy

## ۱- مقدمه

دو رهیافت بر اساس روابط مکانیک محیط پیوسته فرمول‌بندی شده و بدین ترتیب رهیافت بر پایه المان‌های یک‌بعدی با به‌کارگیری استراتژی لاگرانژی (اولیه) و رهیافت بر پایه المان‌های دوبعدی با استفاده از استراتژی اویلری (جاری) ارائه و پاسخ‌های دو تحلیل با یکدیگر و همچنین صحت و دقت آن‌ها با مراجع مقایسه می‌شود.

## ۲- فرمول‌بندی مسئله

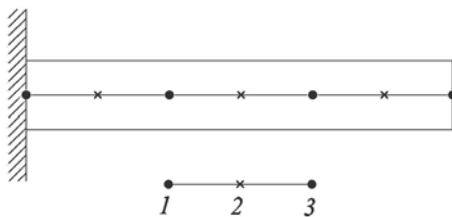
شکل ۱ یک طرح شماتیک از تیر یکسرگرداری به طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $t$  را نشان می‌دهد. محور  $X_1$  راستای محور تیر و راستای  $X_2$  موازی عرض تیر است.



شکل ۱ طرح شماتیک تیر

## ۲-۱- رهیافت بر اساس المان‌های یک‌بعدی

این رهیافت را در طول مطالعه رهیافت اول می‌نامیم. در رهیافت اول یک تیر دوبعدی با استفاده از روابط مکانیک محیط پیوسته به وسیله یک المان یک‌بعدی مرتبه ۲ مدل می‌شود (شکل ۲).



شکل ۲ المان یک‌بعدی مرتبه ۲ بر روی تیر

تابع شکل که وظیفه درون‌یابی کلیه میدان‌های مکان و جابه‌جایی را برعهده دارد توسط روابط ذیل معرفی می‌شود.

$$\begin{aligned} N_1(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(1-\zeta) \\ N_2(\zeta) &= 1-\zeta^2 \\ N_3(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(1+\zeta) \end{aligned} \quad (1)$$

تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ و پیش‌بینی رفتار غیرخطی سازه‌ها پس از تغییر هندسه اولیه به‌طور گسترده‌ای مورد توجه محققان قرار دارد. در این راستا بسیاری از محققان از بین روش‌های تحلیل مسئله روش‌های عددی و به‌طور خاص روش المان محدود را برای بررسی غیرخطی هندسی سازه پیشنهاد کرده‌اند. زینکوویچ [۱]، کریسفیلد [۲]، بت [۳]، ریگرز [۴]، ردی [۵] و ... روابط المان محدود را برای بررسی این پدیده استخراج کرده‌اند. به منظور استفاده کاربردی از روابط المان محدود در هندسه‌های گوناگون، تیر به‌عنوان یک هندسه پایه‌ای می‌تواند آغازی برای بررسی تغییر شکل‌های بزرگ سایر هندسه‌ها در تحلیل‌های مکانیکی محسوب شود. به‌طور کلی برای پیش‌بینی رفتار غیرخطی تیر می‌توان چهار رهیافت پیشنهاد کرد که سه رهیافت بر پایه المان‌های یک‌بعدی و رهیافت چهارم بر پایه المان‌های دوبعدی فرمول‌بندی می‌شود و هر چهار رهیافت مبتنی بر تغییر شکل‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک‌اند. ریگرز [۴]، به سه رهیافت برای تحلیل تیر اشاره می‌کند که در آن رهیافت اول توسط ومپنر [۶]، رنکین [۷] و کریسفیلد [۲] بر پایه المان‌های یک‌بعدی و بر اساس دوران‌های بزرگ ارائه شده است. رهیافت دوم تحلیل غیرخطی تیر بر پایه المان‌های یک‌بعدی بر اساس معادلات مکانیک محیط پیوسته فرمول‌بندی می‌شود. محققانی مانند دی‌وورکین [۸] و کریسفیلد [۲] با استفاده از روابط سینماتیک تیر و ترکیب آن با درون‌یابی المان محدود این روش را معرفی کرده‌اند. رهیافت سوم بر پایه المان‌های یک‌بعدی بر اساس فرمول‌بندی تئوری‌های غیرخطی تیر و میله و استفاده از فرضیات کلاسیک تحلیل تیر است. گراتمان [۹] و آمو [۱۰] به صورت صریح این روابط را استخراج کرده‌اند. رهیافت چهارم بر پایه المان‌های دوبعدی بوده که می‌تواند با دو استراتژی اولیه (لاگرانژی) و ثانویه (جاری) بر اساس روابط مکانیک محیط پیوسته فرمول‌بندی شود. در این خصوص ریگرز [۴] یک مدل کامل از تحلیل غیرخطی هندسی و مادی را معرفی می‌کند. همچنین، در زمینه تحلیل غیرخطی مادی اهرلیک [۱۱] یک تحلیل در حوزه پلاستیک از تیر را ارائه داده است.

در مقاله حاضر، دو رهیافت از چهار رهیافت ذکر شده به منظور بررسی رفتار غیرخطی هندسی تیر استفاده می‌شود. هر

با استفاده از گسسته‌سازی در روش المان محدود و همچنین بسط سری تیلور، میدان جابه‌جایی به شکل زیر به دست می‌آید که  $N_I$  تابع شکل مربوط به گره  $I$  ام است.

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^3 N_I u_I - X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \psi_I \\ \sum_{I=1}^3 N_I w_I - \frac{1}{2} X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \psi_I^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

هر گره المان دارای سه درجه آزادی  $(u, w, \psi)$  بوده و از رابطه (۷) نمو میدان جابه‌جایی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta \bar{U} = \begin{bmatrix} \delta U \\ \delta W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^3 N_I \delta u_I - X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \delta \psi_I \\ \sum_{I=1}^3 N_I \delta w_I - X_2 \sum_{I=1}^3 N_I \psi_I \delta \psi_I \end{bmatrix} \quad (8)$$

همچنین، می‌توان گرادیان  $\bar{U}$  و  $\delta \bar{U}$  را به صورت بردار زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} \text{Grad} \delta \bar{U} &= \begin{bmatrix} \delta U_{,x_1} \\ \delta W_{,x_1} \\ \delta U_{,x_2} \\ \delta W_{,x_2} \end{bmatrix}_I \\ &= \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} N_{I,x_1} & \circ & -N_{I,x_1} X_2 \\ \circ & N_{I,x_1} & -N_{I,x_1} X_2 \psi_I \\ \circ & \circ & -N_I \\ \circ & \circ & -N_I \psi_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \\ \delta \psi \end{bmatrix}_I \\ \Rightarrow \text{Grad} \delta \bar{U} &= \sum_{I=1}^3 \hat{B}_I \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \\ \delta \psi \end{bmatrix}_I \\ \text{Grad} \bar{U} &= \begin{bmatrix} U_{,x_1} \\ W_{,x_1} \\ U_{,x_2} \\ W_{,x_2} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{I=1}^3 \begin{bmatrix} N_{I,x_1} & \circ & -N_{I,x_1} X_2 \\ \circ & N_{I,x_1} & -\frac{1}{2} N_{I,x_1} X_2 \psi_I \\ \circ & \circ & -N_I \\ \circ & \circ & -\frac{1}{2} N_I \psi_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{bmatrix}_I \quad (9) \end{aligned}$$

با تبدیل  $\text{Grad} \bar{U}$  از یک بردار به یک ماتریس و جایگذاری آن در رابطه (۳) گرادیان تغییر شکل حاصل و به صورت نمادین زیر بیان می‌شود:

روابط سینماتیک بر اساس پیکربندی لاگرانژی یا اولیه فرمول‌بندی می‌شود. اگر مختصات نقاط در وضعیت اولیه را با  $X$  و مختصات نقاط پس از تغییر شکل در وضعیت ثانویه با  $x$  نشان داده شود، گرادیان تغییر شکل به کمک رابطه زیر معرفی می‌شود:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = x_{,X} \quad (2)$$

اگر  $\bar{U}$  نشان‌دهنده بردار جابه‌جایی باشد، گرادیان تغییر شکل به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$x = X + \bar{U} \Rightarrow F = \hat{I} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} \Rightarrow F = \hat{I} + \text{Grad} \bar{U} \quad (3)$$

که در رابطه فوق  $\hat{I}$  ماتریس واحد است. بدین ترتیب می‌توان کرنش گرین را بر اساس گرادیان تغییر شکل تعریف کرد:

$$E = \frac{F^T F - \hat{I}}{2} \quad (4)$$

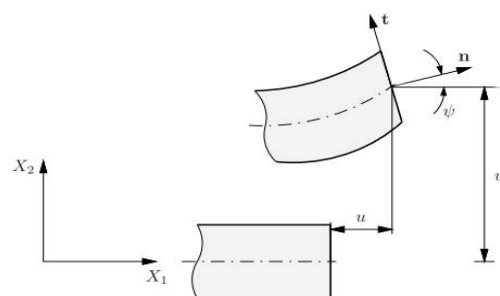
اگر سازه در مکان اولیه خود باقی بماند؛ یعنی  $x = X$  یا  $F = \hat{I}$ ، در این صورت کرنش گرین صفر خواهد بود و این یعنی جسم در وضعیت مرجع خود قرار دارد.

بر اساس فرضیه سینماتیک برای تغییر شکل تیر می‌توان مکان ثانویه جسم را پس از تغییر شکل بر حسب مکان اولیه و جابه‌جایی‌های هر نقطه بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + u - X_2 \sin \psi \\ w + X_2 \cos \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + u - X_2 \sin \psi \\ X_2 - X_2 + w + X_2 \cos \psi \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - X_2 \sin \psi \\ w + X_2 \cos \psi - X_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

که  $u$  جابه‌جایی راستای محوری،  $w$  جابه‌جایی عرضی و  $\psi$  دوران است.



شکل ۳ سینماتیک تیر

طبق روابط سینماتیک و بر اساس فرض تنش مسطح، ماتریس ضریب الاستیک  $D$  حاصل می‌شود:

$$D = \frac{E_L}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن  $E_L$  مدول یانگ و  $\nu$  ضریب پواسون است. رابطه بین کرنش گرین و تنش دوم پیلا با کمک معادله ساختاری زیر ارائه می‌شود.

$$S = DE \quad (19)$$

با تبدیل  $S$  از وضعیت برداری رابطه (۱۹) به صورت ماتریسی و تشکیل ماتریس  $S_m$  می‌توان تنش موجود در ترم سفتی هندسی ماتریس سفتی مماسی (رابطه ۱۷) را به دست آورد.

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} S_m & O \\ O & S_m \end{bmatrix} \quad (20)$$

ماتریس نیروهای داخلی به کمک رابطه زیر استخراج می‌شود:

$$R_I = \int \hat{B}_{LI}^T S dv \quad (21)$$

## ۲-۲- رهیافت براساس المان‌های دوبعدی

این رهیافت را در طول مطالعه رهیافت دوم می‌نامیم. در رهیافت دوم نیز همانند رهیافت اول روابط مکانیک محیط پیوسته پایه‌گذار تحلیل رفتار غیرخطی تیر است با این تفاوت که المان به‌کار گرفته شده یک المان دوبعدی مربعی چهارگره‌ای بوده و توابع زیر برای درون‌یابی مکان و میدان جابه‌جایی استفاده می‌شوند.

$$N_I(\zeta, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \zeta_I \zeta)(1 + \eta_I \eta) \\ (\zeta, \eta)_1 = (-1, -1), (\zeta, \eta)_2 = (1, -1) \\ (\zeta, \eta)_3 = (1, 1), (\zeta, \eta)_4 = (-1, 1) \quad (22)$$

محورهای مختصات و المان‌بندی مطابق شکل ۴ است. به منظور مطالعه سینماتیکی تیر سه وضعیت را در نظر می‌گیریم. طبق شکل ۵،  $\Omega$  وضعیت مرجع،  $\Omega_e$  وضعیت اولیه (لاگرانژی) و  $\varphi(\Omega_e)$  وضعیت جاری یا ثانویه را بیان می‌کند. مطابق با آن نگاشت از وضعیت مرجع به اولیه،  $J_e$  نگاشت از وضعیت مرجع به ثانویه و  $F$  گرادیان تغییر شکل نگاشت از وضعیت اولیه به ثانویه است.

$$F = \hat{I} + \text{Grad} \bar{U} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

دو پارامتر اساسی به منظور تحلیل مسئله غیرخطی ماتریس سفتی مماسی و بردار نیروهای داخلی است. مقدمه دستیابی به هر دو پارامتر تعیین نمو کرنش گرین بوده و بر این اساس روابط (۲)، (۳) و (۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta F = \frac{\partial \delta x}{\partial X} \quad (11)$$

$$\delta x = \delta \bar{U} \Rightarrow \delta x_1 = \delta U = \bar{\eta}_1, \quad \delta x_2 = \delta W = \bar{\eta}_2 \quad (12)$$

$$\delta E = \frac{\delta F^T F + F^T \delta F}{2} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$\delta F = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{1,X_1} & \bar{\eta}_{1,X_2} \\ \bar{\eta}_{2,X_1} & \bar{\eta}_{2,X_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

با تعاریف فوق و تبدیل نمو کرنش گرین رابطه (۱۳) از شکل ماتریسی به صورت برداری، ماتریس  $\hat{B}_{LI}$  برای تشکیل ماتریس سفتی مماسی و بردار نیروهای داخلی حاصل می‌شود:

$$\delta E = \begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ 2\delta E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}\bar{\eta}_{1,X_1} + F_{21}\bar{\eta}_{2,X_1} \\ F_{12}\bar{\eta}_{1,X_2} + F_{22}\bar{\eta}_{2,X_2} \\ F_{11}\bar{\eta}_{1,X_2} + F_{21}\bar{\eta}_{2,X_2} + F_{12}\bar{\eta}_{1,X_1} + F_{22}\bar{\eta}_{2,X_1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

با تفکیک پارامتر نمو جابه‌جایی هر گره از سایر پارامترها، بردار نمو کرنش گرین به شکل ذیل بازنویس می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \delta E_{11} \\ \delta E_{22} \\ 2\delta E_{12} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^3 \hat{B}_{LI} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta w \\ \delta \psi \end{bmatrix}_I \quad (16)$$

با به‌دست آوردن ماتریس  $\hat{B}_I$  از رابطه (۹) و ماتریس  $\hat{B}_{LI}$  از رابطه (۱۶) ماتریس سفتی مماسی به صورت زیر خواهد بود.

$$K_{TIK} = \int (\hat{B}_I^T \hat{S} \hat{B}_k + \hat{B}_{LI}^T D \hat{B}_{LK}) dv \quad (17)$$

اندیس‌های  $I, K$  و  $I$  امین و  $K$  امین گره محلی در یک المان را بیان می‌کند و بدین ترتیب ماتریس  $K_T$  از نه زیر ماتریس  $3 \times 3$  تشکیل می‌شود. همچنین، در رابطه (۱۷)،  $\hat{S}$  تنش دوم پیلا،  $D$  ماتریس ضریب الاستیک و  $dv$  جزء حجم المان است. با فرض ثابت‌بودن خواص ماده در تمام مراحل تغییر شکل و بر

در این پیکربندی تنش کیرششف و نمو کرنش المانسی به ترتیب جایگزین تنش دوم پیلا و نمو کرنش گرین خواهند بود [۴].

کرنش گرین با استفاده از رابطه (۴) تعیین شده و با استفاده از این کرنش تنش دوم پیلا و با انتقال آن می توان تنش کیرششف را به دست آورد:

$$S = \hat{D}E \quad (25)$$

فرض تنش مسطح به منظور تعیین ماتریس ضریب الاستیک ( $\hat{D}$ ) به کار گرفته می شود:

$$\hat{D} = \frac{E_L}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

با انتقال تنش دوم پیلا، تنش کیرششف به صورت زیر معرفی می شود [۴]:

$$\tau = FSF^T \quad (27)$$

همچنین، نمو کرنش المانسی به صورت زیر بیان می شود.

$$\delta e = \sum_{I=1}^4 B_{LI} \bar{\eta}_I \quad (28)$$

که در آن

$$B_{LI} = \begin{bmatrix} N_{I,1} & 0 \\ 0 & N_{I,2} \\ N_{I,2} & N_{I,1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

در رابطه (۲۹)،  $N_{I,m} = \frac{\partial N_I}{\partial x_m}$  بیان کننده مشتق تابع شکل نسبت به مختصات ثانویه است که بدین شکل محاسبه می شود:

$$N_{I,m} = \{j_e^{-1}\}_{1m} N_{I,\zeta} + \{j_e^{-1}\}_{2m} N_{I,\eta} \quad (30)$$

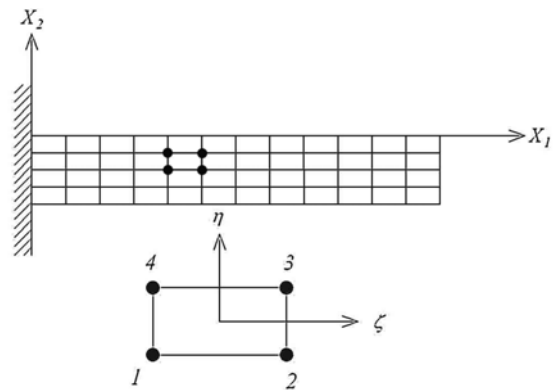
که  $\{j_e^{-1}\}_{im}$  مؤلفه معکوس ماتریس  $j_e$  است.

با تشکیل ماتریس های فوق بردار نیروهای داخلی ارائه می شود.

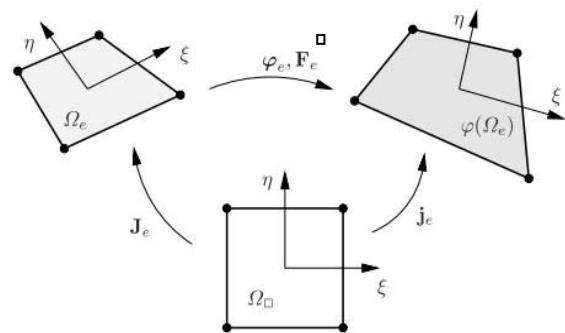
$$R_I = \int B_{LI}^T \tau \det(J_e) dv \quad (31)$$

ماتریس سفتی مماسی که به همراه نیروهای داخلی در حلقه غیرخطی قرار می گیرد عبارت است از:

$$K_{TK} = \int [(\nabla_x N_I)^T \tau (\nabla_x N_K) \hat{I} + B_{LI}^T \hat{D} B_{LK}] \det(J_e) dv \quad (32)$$



شکل ۴ المان دوبعدی بر روی تیر



شکل ۵ نگاشت تغییر شکل [۴]

نگاشت های معرفی شده در شکل ۵ بر اساس روابط زیر حاصل می شوند:

$$J_e = \sum_{I=1}^4 \begin{bmatrix} X_{1I} \\ X_{2I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{I,\zeta} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix}^T \quad (23)$$

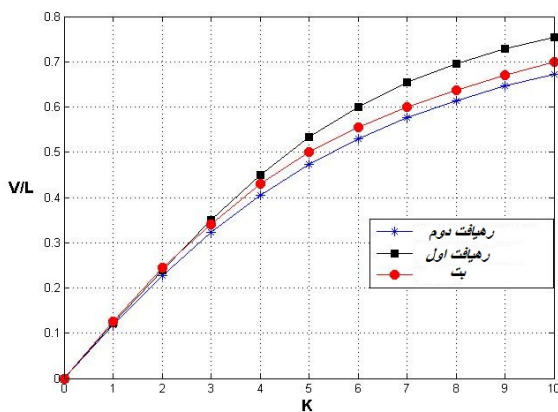
$$j_e = \sum_{I=1}^4 \begin{bmatrix} x_{1I} \\ x_{2I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{I,\zeta} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix}^T$$

که در آن اندیس های  $I$  و  $J$  در  $X_{IJ}$  یا  $x_{IJ}$  به ترتیب مربوط به راستا و شماره گره اند. بر این اساس بردار جابه جایی هر المان به صورت  $u = [u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22}, \dots, u_{24}]$  و نمو بردار جابه جایی به صورت  $\bar{\eta} = [\delta u_{11}, \delta u_{21}, \dots, \delta u_{24}]$  بیان می شود. بر اساس رابطه (۲) و با تعریف دیگری می توان گرادیان تغییر شکل را به صورت زیر بیان کرد:

$$F = j_e J_e^{-1} \quad (24)$$

به منظور فرمول بندی المان محدود می توان از دو پیکربندی اوپلری یا لاگرانژی استفاده کرد. در رهیافت دوم برخلاف رهیافت اول از پیکربندی اوپلری (جاری) بهره گرفته شده است.

این تیر به طول  $L=254 \text{ mm}$  و عرض و ضخامت  $25.4 \text{ mm}$  با مدول الاستیک  $E_L=82.74 \text{ Mpa}$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.2$  فرض می‌شود. جابه‌جایی عرضی تیر با  $V$  نمایش داده شده است. بدین ترتیب شکل ۷ جابه‌جایی بی‌بعد عرضی تیر  $(\frac{V}{L})$  بر حسب ضریبی از بار  $(K = \frac{PL^3}{E_L I})$  را نشان می‌دهد که  $I$  همان اینرسی سطح مقطع است.



شکل ۷ نمودار جابه‌جایی عرضی انتهای آزاد تیر بر حسب بار

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود رهیافت اول و رهیافت دوم تطابق بسیار مناسبی با پاسخ مرجع [۱۲] دارند. هر چند که اگر مرجع [۱۲] را به‌عنوان مبنا قرار دهیم نزدیکی پاسخ‌های المان‌های دوبعدی (رهیافت دوم) به مبنا نزدیک‌تر است، اما چنانچه با کاهش یک بعد بتوان پاسخ‌های قابل قبول ارائه کرد (رهیافت اول) در این صورت، با اغماض ناچیز خطا، روشی سریع‌تر و با هزینه کمتر خواهیم داشت. پاسخ مرجع [۱۲] به کمک المان‌های دوبعدی به‌دست آمده است که در آن تحلیل هر المان دارای هشت گره است. بدین ترتیب می‌توان اختلاف پاسخ بین رهیافت دوم و بت [۱۲] را در تعداد گره هر المان دانست و واضح است که بت مبنای دقیق‌تر خواهد بود.

شکل ۸ وضعیت ثانویه تیری با خصوصیات مکانیکی و هندسی که قبلاً اشاره شد را نشان می‌دهد. این تیر در وضعیت اولیه به صورت افقی قرار داشته و از سمت چپ به تکیه‌گاه گیردار شده است. پس از اعمال بار گسترده عرضی به مقدار  $P = 6000 \frac{N}{m}$ ، نقاط مختلف تیر تغییر مکان داده‌اند. به‌عنوان نمونه، نقاط انتهای آزاد تیر تقریباً به اندازه طول تیر جابه‌جا شده‌اند.

از شانزده زیرماتریس  $2 \times 2$  تشکیل شده و  $(\nabla_x N_I)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\nabla_x N_I)^T = [N_{I,1} \quad N_{I,2}] \quad (33)$$

که  $N_{I,m}$  از رابطه (۳۰) حاصل می‌شود. در روابط (۳۱) و (۳۲)،  $dv$  مربوط به جزء حجم المان وضعیت مرجع بوده و با استفاده از نقاط گوس می‌توان انتگرال‌های فوق را به صورت زیر به‌دست آورد.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\zeta, \eta) \det(J_e) d\zeta d\eta = \sum_{p=1}^4 g(\zeta_p, \eta_p) \det(J_e(\zeta_p, \eta_p)) W_p \quad (34)$$

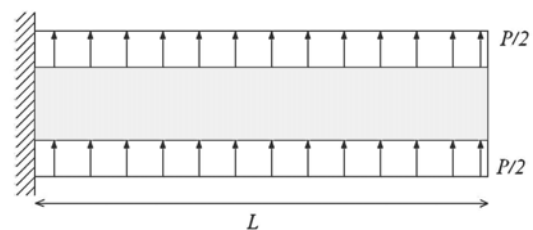
که در آن  $(\zeta_p, \eta_p)$  نقاط گوس و  $W_p$  ضریب وزن است.

### ۳-۲- حل معادلات غیرخطی

در هر دو رهیافت مطرح‌شده، دو پارامتر اساسی ماتریس سفتی مماسی و بردار نیروهای داخلی برای تحلیل معادلات غیرخطی استفاده می‌شود. یک الگوریتم تکراری توانمند برای حل این دسته از مسائل الگوریتم نیوتن-رافسون است. به دلیل عدم وجود انشعاب<sup>۱</sup> در جابه‌جایی عرضی تیر می‌توان این الگوریتم را همراه با روش افزایش نیرو<sup>۲</sup> به‌کار برد.

### ۳- بحث و نتیجه‌گیری

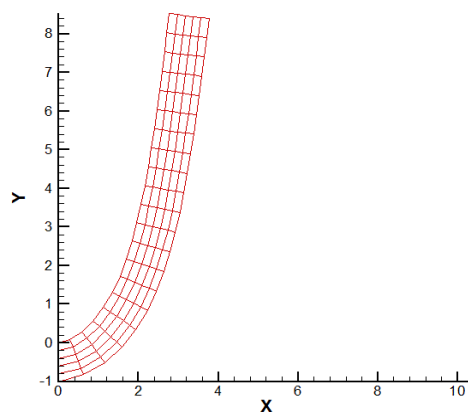
مقایسه جواب‌های به‌دست آمده دو رهیافت به طور کامل می‌تواند صحت بررسی انجام‌شده را مورد تأیید قرار دهد. همچنین، دقت پاسخ‌های هر رهیافت را می‌توان به کمک مقایسه با مرجع [۱۲] نشان داد. برای این منظور، یک تیر یکسرگیردار را در نظر می‌گیریم که تحت بار گسترده عرضی  $\frac{P}{2}$  در سطوح فوقانی و تحتانی قرار دارد.



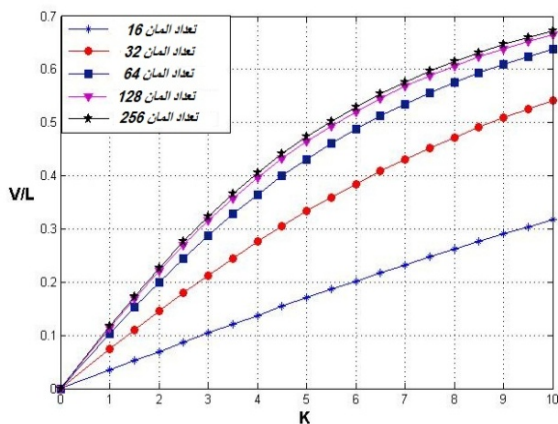
شکل ۶ تیر یکسرگیردار تحت بار گسترده عرضی  $P$

1. Snapping
2. Load Control

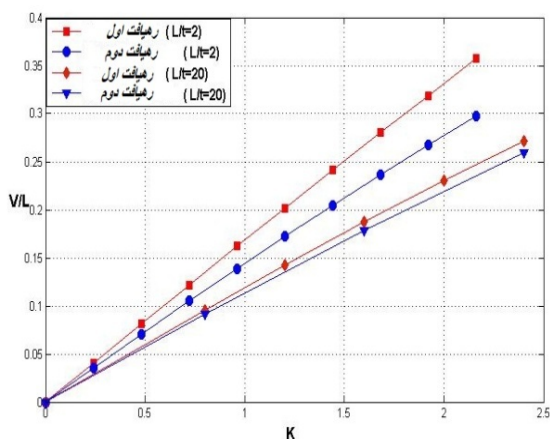
تیر نشان می‌دهد. بر طبق نمودار، در صورت افزایش نسبت طول به ضخامت تیر، جواب‌های تحلیل یک‌بعدی و دویبعی در  $\frac{L}{t} = 20$  تطابق نزدیک‌تری نسبت به  $\frac{L}{t} = 2$  دارند؛ به عبارت دیگر، با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر اثر فرض رفتار دویبعی در خیز در راستای ضخامت ناچیز خواهد بود.



شکل ۸ وضعیت ثانویه تیر بر اثر بار گسترده عرضی  $\frac{N}{m} 6000$



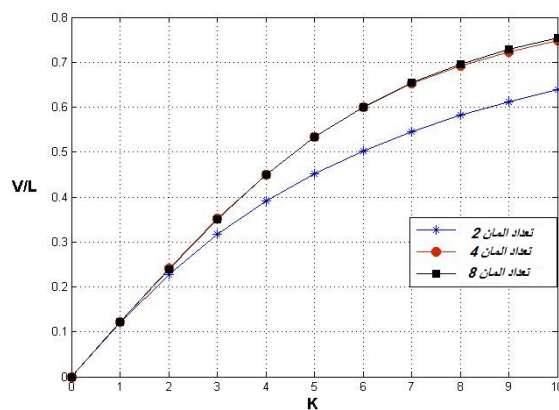
شکل ۱۰ همگرایی المان‌های دویبعی



شکل ۱۱ مقایسه تحلیل یک‌بعدی و دویبعی برای دو نسبت طول به ضخامت متفاوت تیر

همچنین، با تحلیل رهیافت دوم، رفتار تیر یکسرگردار که در طرف آزاد خود تحت گشتاور خمشی قرار دارد مطالعه شده است. شکل ۱۲ تغییر مکان انتهای آزاد تیر را بر اثر این گشتاور و شکل ۱۳ وضعیت ثانویه تیر تحت اثر گشتاور خمشی  $23 \text{ N.m}$  را نشان می‌دهد.

شکل ۹ همگرایی روش المان محدود را بر حسب تعداد المان‌ها نشان می‌دهد. این نمودار برای رهیافت اول ترسیم شده است و بر طبق آن نمودارها پس از ۴ المان بر روی یکدیگر منطبق می‌شوند و این بدان معنی است که المان یک‌بعدی مرتبه ۲ برای چنین تحلیل‌هایی بسیار مناسب و توانمند عمل می‌کند.



شکل ۹ همگرایی المان‌های یک‌بعدی مرتبه ۲

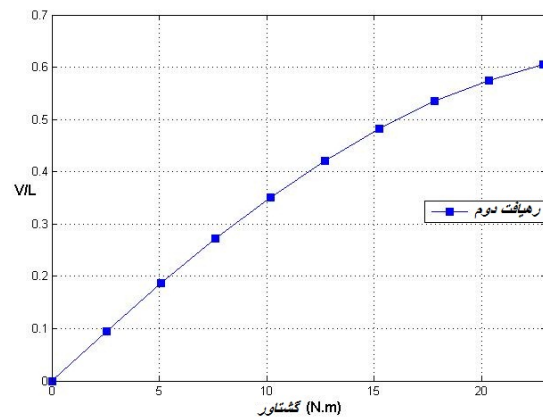
برخلاف رهیافت اول که در آن همگرایی با تعداد المان‌های کم به دست می‌آید، همگرایی در رهیافت دوم نیازمند تعداد المان‌های بیشتری است. شکل ۱۰ میزان همگرایی با افزایش المان‌ها را نشان می‌دهد که در آن تیر به چهار قسمت سطری تقسیم شده است (مانند شکل ۴). بر طبق نمودار، رهیافت دوم با حدود ۶۴ المان پاسخ‌های قابل قبول را ارائه می‌نماید. شکل ۱۱ مقایسه‌ای را بین رهیافت اول (تحلیل یک‌بعدی) و رهیافت دوم (تحلیل دویبعی) برای دو نسبت طول به ضخامت



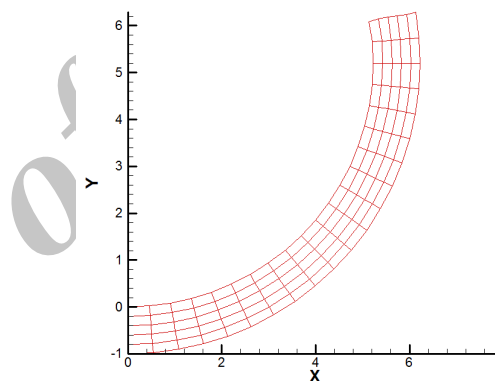
انجام شد که با افزایش تعداد گره‌ها در المان می‌توان جواب‌ها را به جواب‌های تحلیلی و تجربی نزدیک‌تر کرد.

#### ۵- منابع

- [1] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method*, Fifth Edition, Vol. 2, Solid Mechanics, Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [2] Crisfield M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 2, Advanced Topics, Chichester, John Wiley & Sons, 1997.
- [3] Bathe K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1996.
- [4] Wriggers P., *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [5] Reddy J. N., *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, New York, Oxford University Press, 2004.
- [6] Wempner G., "Finite Elements, Finite Rotations and Small Strains of Flexible Shells", *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 5, 1969, pp. 117-153.
- [7] Rankin C. C., Brogan F. A., "An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations", *Collapse Analysis of structures*, 1984, pp. 85-100.
- [8] DvorKin E. N., Pantuso D., Repetto A., "A Formulation of the MITC4 Shell Element for Finite Strain Elasto-Plastic Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 125, 1995, pp. 17-40.
- [9] Gruttmann F., Sauer R., Wagner W., "Theory and Numeric of Three-Dimensional Beams with Elastoplastic Material Behavior", *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 48, 2000, pp. 1675-1702.
- [10] Romero I., Armero F., "An Objective Finite Element Approximation of the Kinematics of Geometrically Exact Rods and its Use in the Formulation of Geometrically Exact Rods and its Use in the Formulation of an Energy Momentum Conserving Scheme in Dynamics", *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, 2002, pp. 1683-1716.
- [11] Ehrlich D., Armero F., "Finite Element Methods for the Analysis of Softening Plastic Hinges in Beams and Frames", *Computational Mechanics*, Vol. 35, No. 4, 2005, pp. 237-264
- [12] Bathe K. J., Ramm E., Wilson E. L., "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis", *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 1975, pp. 353-386.



شکل ۱۲ نمودار جابه‌جایی عرضی انتهای آزاد تیر بر حسب گشتاور خمشی



شکل ۱۳ وضعیت ثانویه تیر بر اثر گشتاور خمشی ۲۳ N.m

#### ۴- جمع‌بندی

رفتار غیرخطی هندسی تیر با دو استراتژی لاگرانژی و اویلری همراه با دو نوع المان‌بندی یک‌بعدی و دوبعدی مورد ارزیابی قرار گرفت. تحلیل یک‌بعدی تیر به کمک استراتژی لاگرانژی و تعیین کرنش گرین و تنش دوم پیلا؛ و تحلیل دوبعدی تیر با استفاده از استراتژی اویلری و تعیین کرنش المانسی و تنش کیرشهف ارائه شد. یک تحلیل غیرخطی المان محدود با به‌کارگیری تئوری مکانیک محیط پیوسته می‌تواند جابه‌جایی‌های بزرگ را ترسیم نماید. همان‌طوری که در نمودارها نشان داده شده است، این تحلیل می‌تواند تغییر شکل یک تیر تقریباً به اندازه خودش را بررسی کند. با مدلسازی یک‌بعدی با صرف هزینه کمتر جواب‌های مناسبی حاصل شده است که می‌توان با مدلسازی دوبعدی این جواب‌ها را بهبود بخشید. این مدلسازی در کار حاضر بر اساس المان چهارگره‌ای