http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک مدرس
دوره ۱۱ شماره ۴ زمستان ۱۳۹۰ ص ص ۵۳-۶۳

تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۷/۲
پذیرش ۹۰/۹/۱
ارائه در سایت ۹۰/۱۰/۳۰

# بررسی تحلیلی اتلاف انرژی لغزش جزئی در اتصالات

**کیوان اسدی[۱]، حمید احمدیان[۲]، حسن جلالی[۳*]**

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۲- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی اراک، دانشگاه علم و صنعت ایران، اراک
* اراک، صندوق پستی ۱۱۷۷-۳۸۱۳۵، jalali@iust.ac.ir

**چکیده-** سطوح تماس به عنوان اصلی‌ترین عامل اتلاف انرژی در اتصالات سازه‌ای که دارای حرکت نسبی هستند شناخته می‌شوند. یکی از نکات مورد توجه در بحث دینامیک سازه ارائه یک مدل پیشگو برای اتصالات مکانیکی است به طوری که پاسخ دینامیکی، سفتی و استهلاک ناشی از سطح اصطکاکی با قابلیت اطمینان بالا توسط آن قابل محاسبه باشد. تحقیق حاضر به ارائه مدلی تحلیلی برای تعیین انرژی اتلافی ناشی از پدیده لغزش کوچک در مورد تیری با شرایط مرزی آزاد- اصطکاکی که تحت اثر نیروی تحریک جانبی قرار دارد می‌پردازد. برای انجام این مهم، معادلات حاکم بر ارتعاشات خمشی تیر مقید اصطکاکی استخراج شده و در سازه مورد مطالعه تعمیم داده می‌شوند. سپس الگوی روند حل برای مشخص-نمودن نقطه گذار از فاز چسبندگی به لغزش و رسم منحنی‌های هیسترزیس به ازای نیروهای تک‌هارمونی شرح داده می‌شوند. در انتها نتایج حاصل از مدل تحلیلی با انجام مطالعه پارامتری مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلیدواژگان:** مدل پیوسته لغزش کوچک، تعیین چسبندگی- لغزش، ارتعاش خمشی، حلقه هیسترزیس

# Analytical investigation of micro-slip energy dissipation in joints

**K. Asadi[1], H. Ahmadian[2], H. Jalali[3*]**

1- M.Sc. Student, School of Mech. Eng., Iran Univ. of Science & Tech., Tehran, Iran
2- Prof., School of Mech. Eng., Iran Univ. of Science & Tech., Tehran, Iran
3- Assistant Prof., Iran Univ of Science & Tech/Arak Branch, Arak, Iran
*P.O.B. 38135-1177, Arak, jalali@iust.ac.ir

**Abstract-** Contact interfaces are known as the main source of energy dissipation in the structural joints. Therefore it is important in structural dynamic analysis to use predictive joint models which are capable to simulate the structural response and energy dissipation with an acceptable accuracy. In this paper an analytical model is proposed for energy dissipation evaluation due to micro slip mechanism in a beam structure with frictional-free boundary condition. The bending response governing equations are derived under harmonic external excitation and are solved in order to detect transition from stick to slip at the contact interface. The resultant hysteresis loops are obtained and parametric study is done for a numerical case study.

**Keywords:** Continuous Micro-Slip Model, Stick-Slip, Flexural Vibration, Hysteresis Loop

## ۱- مقدمه

اتصالات مکانیکی که معمولا برای انتقال نیرو بین دو جزء یک سیستم مکانیکی از طریق سطوح تماس اصطکاکی به‌کار می‌روند دینامیک سازه را تحت تاثیر قرار می‌دهند. آن‌ها باعث کاهش سفتی سازه و اتلاف انرژی می‌شوند به طوری که ۹۰ درصد میرایی کل سازه می‌تواند ناشی از این عامل باشد[۱]. رفتار دینامیکی سازه‌های دارای اتصال متاثر از خصوصیات ذاتی اتصال و از آن جمله رابطه نیرو-تغییرمکان در بارگذاری مماسی است. لغزش یکی از دو مکانیزم اصلی اتلاف انرژی در ارتعاشات سازه‌هاست که پاسخ سازه را غیرخطی کرده و در بارهای عمودی بالا انعطاف‌پذیری سازه را افزایش می‌دهد، ولی اهمیت آن در اتلاف انرژی سیستم ارتعاشی است که در دامنه‌های ارتعاشی متوسط روی می‌دهد. انرژی اتلافی لغزشی متاثر از نیروهای اصطکاکی است که در بارگذاری‌های پیچشی و برشی بین اجزا به‌وجود می‌آید و در حالت کلی تابع ضریب اصطکاک سطح و کشش در پیچ است.

مکانیزم اتلاف انرژی در اثر لغزش‌کوچک (اتلافات اصطکاک) که در بین سطوح تماس اتصالات مکانیکی روی می‌دهد از دهه پنجاه میلادی مورد بررسی قرار گرفته است. گودمن[۲] در سال ۱۹۵۹ بررسی کلی در مورد استهلاک لغزشی سطوح تماس انجام داد. وی سه نوع مدل اتصالی را مورد بررسی قرار داد و نتیجه‌گیری کرد که انرژی اتلافی با توان سوم نیرو متناسب است. در هر سه حالت، سطح مشترک با اتصال کولمب توصیف شده بود. اونگار[۳] در دو مطالعه جامع در سال‌های ۱۹۶۴ و ۱۹۷۳ کار وی را تکمیل کرد. با توجه به یافته‌های وی، نرخ اتلاف به صورت غیرخطی با بزرگی نیرو رابطه دارد. مترل[۴] با بررسی اتصالات لب‌به‌لب تحت بار محوری، همان رابطه بین انرژی تلف‌شده و بار اعمالی را به‌دست آورد. این مطالعات نشان دادند اصطکاک خشک در اتصالات زمانی باعث استهلاک می‌شود که نیروهای اعمالی باعث به‌وجود آمدن تنش برشی در اتصال شوند. در واقع نیروهای اصطکاکی با مقاومت در مقابل حرکت مماسی نسبی باعث اتلاف انرژی می‌شوند. ایرلس[۵] در سال ۱۹۶۶ بیان کرد که بیشترین ظرفیت ضریب استهلاک در اتصال پرچی زمانی رخ می‌دهد که تمام نیروهای برشی از طریق اصطکاک انتقال یابند به طوری که پرچ هیچ نیروی برشی را تحمل نکند.

مدل‌های ذکرشده کاملاً با تئوری جانسون[۶] در مورد تماس و لغزش سطوح کروی قابل مقایسه‌اند که بر مبنای فرض وجود اصطکاک کولمب در کنش‌های متقابل در سطوح تماس بیان شده‌اند. طبق این یافته‌های تحلیلی، اتلاف انرژی با بزرگی نیروی اعمالی با توان ۳ رابطه دارد، ولی مدت‌ها بعد محققان آزمایشگاه ساندیا[1] با انجام مطالعات تجربی توانستند رابطه اتلاف و نیرو را به صورت توان سوم به‌دست آورند و متوجه شدند توان مقادیری در محدوده ۲/۵ تا ۲/۹ دارد. محققان دیگر نیز در نتایج تجربی خود، این توان را حدوداً ۲/۵ برآورد کرده‌اند[۷-۹].

برخی محققان لغزش جزئی را با توجه به دیدگاه پیوسته که مدل‌های پیچیده‌تری بوده و دقت بهتری دارند مدلسازی کرده‌اند. یکی از رایج‌ترین روش‌های به‌کار رفته، اعمال تئوری هرتز و روش میندلین[۱۰] برای به‌دست آوردن نواحی چسبنده و لغزشی و همچنین انرژی اتلافی است که با فرض بارگذاری شبه‌استاتیکی و اصطکاک کولمب انجام پذیرفته است.

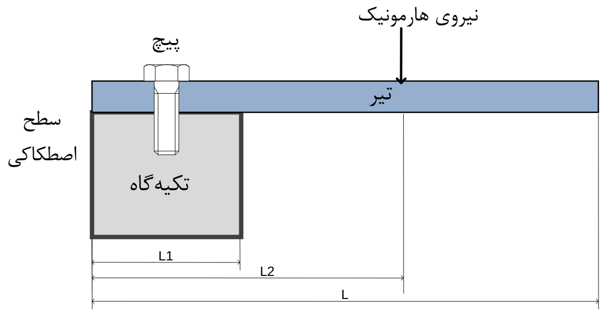
اودن[۱۱]، با توجه به مدل پیوسته سطح تماس، روابط توانی را برای تنش‌های عمودی و مماسی ارائه کرد. سپس، با استفاده از فرایند منظم‌سازی اصطکاک[2]، ناپیوستگی در سرعت نسبی صفر را هموار کرد که باعث می‌شود تحت هیچ شرایطی فاز چسبندگی در سطح تماس رخ ندهد.

مدل دیگر مدل وابسته به حالتِ تماس و سرعتِ نسبی رایس[3][۱۲] است که در بررسی مسائل مربوط به پاسخ و پایداری سیستم‌های خودتحریک و همچنین در توصیف پاسخ اجباری تماس تک‌نقطه استفاده شده است. مدل لغزش جزئی بعدی مدل منک[۱۳] است که در ابتدا برای محاسبات مربوط به استهلاک پره توربین ارائه شده بود. این مدل سطح مشترک را به صورت الاستیک درنظر گرفته و سه حالت لغزش الاستیک، لغزش جزئی و لغزش کامل را بررسی و فرمول‌بندی می‌کند. کزابا[۱۴]، برای ساده‌کردن مدل، لایه برشی را در مدل ارائه‌شده توسط منک حذف کرد و بار عمودی را درجه دو درنظر گرفت و پره متصل به زمین را در فضای فرکانسی تحلیل کرد و نتیجه گیری کرد که مدل لغزش بزرگ پاسخ سازه را بزرگ‌تر از مدل لغزش کوچک پیشگویی می‌کند. برگر[۱۵]

1. Sandia
2. Friction Regularization Procedure
3. Rice's Rate- and State- Dependent Friction Law

سازه را به صورت جسم الاستیک دوبعدی مدل کرده و با توجه به تنش عمودی و اصطکاک کولمب سطح تماس را توصیف کرده است. در این حالت پاسخ سطح تماس و جسم دارای اندرکنش بوده و فازِ چسبندگیِ سطح به صورت آشکار در مدل ظاهر می‌شود. سیگراوغلو[۱۶] مدل پیوسته منک را با درنظر گرفتن اینرسی تیر و در دو بار عمودی محدب و مقعر و تحت تحریک محوری توسعه داده و با ارائه حل دقیق، منحنی‌های هیسترزیس را به‌دست آورده و با حل عددی تماس تک‌نقطه مقایسه کرده است.

هدف از این مقاله، تعمیم مدل ارائه‌شده توسط سیگراوغلو برای ارتعاش خمشی تیر آزاد-مقید اصطکاکی است که توسط نیروی هارمونیک جانبی تحریک می‌شود. در قسمت مقید اصطکاکی تیر مطابق شکل ۱ به یک تکیه‌گاه ارتجاعی پیچ شده است. در این پژوهش، علاوه بر حرکت محوری تیر، حرکت جانبی آن نیز درنظر گرفته شده و تلاش بر این است که از طریق تحلیلی، اتلاف لغزشی ناشی از اثرات اصطکاک کولمب در بارگذاری سیکلی با استفاده از قانون میسینگ[۱۷] به‌دست آید.




**شکل ۱** تیر با شرایط مرزی آزاد و تکیه‌گاه اصطکاکی

## ۲- مدل تحلیلی

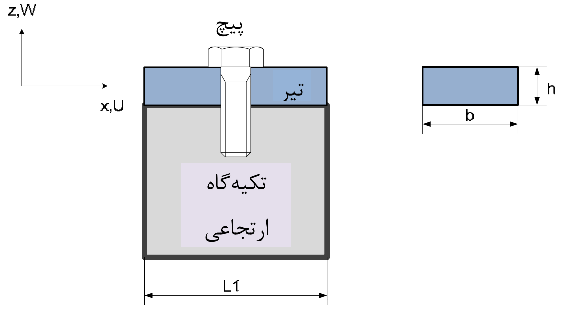
### ۲-۱- استخراج معادلات حرکت

به منظور استخراج معادلات حرکت، قسمتی از تیر را که طبق شکل ۲ روی تکیه‌گاه قرار گرفته و با اصطکاک مقید شده است را در نظر می‌گیریم.

میدان جابه‌جایی برای تیر اولر به صورت ارائه‌شده طبق رابطه (۱) درنظر گرفته می‌شود.

$$U(x,z) = u(x) + z.w'(x)$$
$$W(x,z) = w(x) \qquad (۱)$$

که در آن $x$ و $z$ مختصات کارتزین به ترتیب در جهت افقی و عمودی و $U$ و $W$ به ترتیب تغییرشکل در جهت‌های افقی و عمودی هستند. $u$ و $w'$ نیز به ترتیب جابه‌جایی تار خنثی تیر و چرخش تیر در صفحه $xz$ می‌باشند. منظور از علامت ' مشتق نسبت به متغیر $x$ است.




**شکل ۲** قسمت مستقر بر روی تکیه‌گاه اصطکاکی تیر

رابطه میدان کرنش با میدان جابه‌جایی برای حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (۲) است.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}$$
$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad \sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} \quad \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz} \qquad (۲)$$

معادلات حاکم بر ارتعاش خمشی تیر دارای اتصال اصطکاکی از اصل همیلتون به شرح زیر به‌دست می‌آید. اصل همیلتون طبق رابطه (۳-الف) نوشته می‌شود. در این مرحله دلتای دیراک را با $\delta$ و دلتای تغییرات را با $\Delta$ نشان می‌دهیم تا اشتباه گرفته نشوند.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta T - \Delta P + \Delta W_{nc})dt = 0 \qquad (۳\text{-الف})$$

که در آن $T$، $P$ و $W_{nc}$ به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار نیروی ناپایستارند.

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho(\dot{U}^2 + \dot{W}^2)dV + \frac{1}{2}\int_0^{L_1} m_0(\dot{U}^2 + \dot{W}^2)\delta(x - \frac{L_1}{2})dx$$
(۳-ب)

انرژی جنبشی به صورت رابطه (۳-ب) تعریف می‌شود که در آن $\rho$ چگالی تیر و $m_0$ جرم پیچ است و علامت "." مفهوم مشتق نسبت به زمان را دارد.

$$P = \frac{1}{2}\int_V \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{L_1} k_0 u^2 \delta(x - \frac{L_1}{2})dx + \frac{1}{2}\int_0^{L_1} k_n w^2(x)dx \qquad (۳\text{-پ})$$

انرژی پتانسیل به صورت رابطه (۳-پ) تعریف می‌شود که در آن $k_0$ سفتی پیچ در راستای افقی و $k_n$ سفتی تکیه‌گاه در راستای عمودی است. در معادله (۳-پ) از انرژی پتانسیل راستای طولی پیچ در مقایسه با انرژی پتانسیل تکیه‌گاه الاستیک در راستای عمودی صرف‌نظر شده است.

$$W_{nc} = \int_0^{L_1} f_h U\, dx \qquad (۳\text{-ت})$$

$f_h$ در رابطه (۳-ت) نیروی تماس است. با جاگذاری (۱) و (۲) در مجموعه روابط ۳-الف تا ۳-ت داریم.

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}[\int_V[\rho[(\dot{u}+z\dot{w}')\Delta(\dot{u}+z\dot{w}')+\dot{w}\Delta\dot{w}]\\
&\quad -E(u'+zw'')\Delta(u'+zw'')dV]\\
&\quad +\int_0^L f_h\Delta(u+zw' +\int_0^L m_0((\dot{u}+z\dot{w}')\\
&\quad \Delta(\dot{u}+z\dot{w}')+\dot{w}\Delta\dot{w})\delta(x-\frac{L_1}{2})\\
&\quad +\int_0^L -k_0 u\Delta u.\delta(x-\frac{L_1}{2})\\
&\quad -k_n w\Delta w)dx]dt=0
\end{aligned} \qquad (۴)$$

برای ساده‌سازی رابطه (۴) لازم است $f_h$ یا نیروی تماس مشخص شود. برای این منظور، دو حالت مجزا در نظر گرفته می‌شود.

### الف) حالت تماس چسبنده

در این حالت، نیروی برشی هنوز به حد بحرانی که همان نیروی اصطکاک است نرسیده است؛ به عبارت دیگر اگر لایه برشی را به صورت توزیعی از فنرهای مماسی[1] در سطح تماس درنظر بگیریم، هیچ یک از فنرها هنوز به حد تسلیم نرسیده‌اند و جابه‌جایی آن‌ها در محدوده الاستیک است. در این حالت، تغییر شکل لایه برشی تحت اثر نیروی برشی متناسب با ضریب فنریت $k_t$ تعریف می‌شود.

$$f_h = k_t U(x, -h/2) \qquad (۵)$$

با جاگذاری (۵) در (۴) و اعمال انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء روی زمان و فضا، معادلات حاکم تیر در حالت چسبنده به فرم دو معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی و کوپل با هم به‌دست می‌آید.

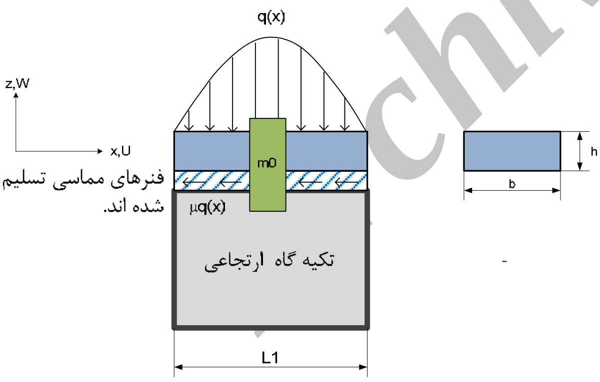
$$\begin{cases}
(\rho A+m_0\delta(x-\frac{L_1}{2}))\ddot{w}+EIw'''' -(\rho I+J_0\delta(x-\frac{L_1}{2}))\ddot{w}'' \\
\qquad +k_n w+k_t\frac{h^2}{4}w''-k_t\frac{h}{2}u'=0 \\
(\rho A+m_0\delta(x-\frac{L_1}{2}))\ddot{u}-EAu'' \\
\qquad +(k_0\delta(x-\frac{L_1}{2})+k_t)u-k_t\frac{h}{2}w'=0
\end{cases} \qquad (۶)$$

که در آن $A$، $E$، $I$، $h$، $k_t$ و $J_0$ به ترتیب مساحت مقطع، مدول الاستیسیته، ممان سطح، ضخامت، ضریب فنریت مماسی و ممان اینرسی پیچ حول محور افقی هستند. شایان ذکر است که کار نیروی $f_h$ در حالت تماس چسبنده از آنجا که نیروی $f_h$ نیروی فنر می‌باشد و تابع جابه‌جایی طولی تیر در سطح تماس است، معرف انرژی پتانسیل فنر خواهد بود.

### ب) حالت تماس لغزشی

در این حالت، نیروی برشی به حد ماکزیمم خود (نیروی اصطکاک) می‌رسد که متناسب با نیروی عمودی سطح تماس مطابق رابطه (۷) است. یعنی تمام فنرها تسلیم شده و نیروی تماس همان نیروی اصطکاکی است (شکل ۳).

$$f_h = \mu q_{eff}(x) \qquad (۷)$$




**شکل ۳** سازه در حالتی که سطح تماس در شرایط لغزش بزرگ است

$q_{eff}(x)$ همان نیروی عمودی موثر وارد بر سطح تماس است. معادله (۷) اندازه نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد. پس از ساده‌سازی همانند حالت الف، معادلات حاکم بر تیر در حالت لغزشی نیز به فرم دو معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی و مستقل از هم به‌دست می‌آیند.

1. Bristles

$$\begin{cases} (\rho A + m_0\delta(x - \frac{L_1}{2}))\ddot{w} + EIw'''' - (\rho I + J_0\delta(x - \frac{L_1}{2}))\ddot{w}'' \\ \qquad + k_n w + \text{sgn}(\dot{U})\frac{\mu h}{2} q_{eff}' = 0 \\ (\rho A + m_0\delta(x - \frac{L_1}{2}))\ddot{u} - EAu'' + k_0\delta(x - \frac{L_1}{2})u \\ \qquad + \text{sgn}(\dot{U})\mu q_{eff} = 0 \end{cases} \qquad (۸)$$

که معادله اول در (۸) مشابه رابطه دامیسا[۱۷] برای دینامیک تیر لایه‌ای در حالت لغزش کامل است. عبارت $\text{sgn}(\dot{U})$ به منظور درنظر گرفتن علامت سرعت در حالت لغزش در معادله (۸) قرار داده شده است. نیروی عمودی موثر وارد بر سطحِ تماس نیرویی است که پس از تاثیر پیش‌بار پیچ، سفتی عمودی تکیه‌گاه و صلبیت خمشی تیر در سطح تماس احساس می‌شود.

## ۲-۲- محاسبه نیروی عمودی موثر استاتیکی

نیروی ناشی از پیش‌بار پیچ باعث ایجاد بار عمودی استاتیکی در سطح تماس می‌شود که به سفتی عمودی تکیه‌گاه و صلبیت خمشی نیز بستگی دارد. برای به‌دست آوردن پروفیل توزیع آن باید دو معادله دیفرانسیل (۹) حل شوند.

$$\begin{cases} EIw_s'''' + k_n w_s = F_{bolt}(x) & 0 \le x \le L_1 \\ EIw_s'''' = 0 & L_1 \le x \le L \end{cases} \qquad (۹)$$

$F_{bolt}(x)$ پروفیل نیروی پیش‌بار پیچ است. شرایط مرزی معادلات فوق عبارت‌اند از:

$$w''(0) = w'''(0) = w''(L) = w'''(L) = 0 \qquad (۱۰)$$

شرایط سازگاری نیز به صورت زیرند.

$$\begin{aligned} &w_s(L_1^-) = w_s(L_1^+) && w'_s(L_1^-) = w'_s(L_1^+) \\ &w''_s(L_1^-) = w''_s(L_1^+) && w'''_s(L_1^-) = w'''_s(L_1^+) \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

پروفیل توزیع نیروی عمودی موثر استاتیکی $q_{eff}(x)$ از حل معادلات دیفرانسیل ۹ به همراه شرایط مرزی و سازگاری و استفاده از رابطه ۱۲ حاصل می‌شود.

$$q_{eff}(x) = k_n w_s(x) \qquad (۱۲)$$

## ۲-۳- مدل دینامیکی سازه در حالت چسبنده

حال که معادلات حاکم بر قسمت مقید تیر در حالت چسبنده طبق روابط (۶) استخراج شده‌اند، مدل ارائه‌شده را برای سازه اصلی که در شکل ۱ مشاهده می‌شود تعمیم می‌دهیم. در این حالت سازه در حالت خطی بوده و لایه برشی کاملا در فاز چسبنده است. نکته اساسی در تعیین اینکه نقطه‌ای که در روی سطح مشترک قرار دارد در فاز چسبندگی است و یا در فاز لغزشی این است که نیروی برشی و نیروی مقاوم در نقطه مذکور محاسبه و مقایسه شوند. منظور از نیروی برشی همان نیروی تماس است که متاثر از نیروهای تحریک خارجی ایجاد می‌شود که اگر فاز تماس تماما چسبندگی باشد نیروی تماس الاستیک نامیده می‌شود. منظور از نیروی مقاوم نیز همان نیروی اصطکاک است که از حاصل‌ضرب نیروی عمودی در ضریب اصطکاک به‌دست می‌آید. مادامی که در نقطه مورد نظر نیروی تماس الاستیک از حداکثر نیروی اصطکاک کوچک‌تر باشد، آن نقطه چسبنده است و به محض اینکه دو نیرو برابر شوند، نقطه دچار لغزش می‌شود.

برای تعیین نقطه گذار از حالت چسبندگی به لغزش، ابتدا می‌بایست نیروی تماس الاستیکی برای حالتی که تیر کاملا در فاز چسبندگی قرار دارد محاسبه شود. معادلات حاکم بر دینامیک سازه وقتی که در فاز چسبندگی قرار دارد عبارت است از:

$$\begin{aligned} &EIw'''' + (\rho I\omega^2 - k_t\frac{h^2}{4} + J_0\omega^2\delta(x - \frac{L_1}{2}))w'' \\ &\qquad + (k_n - \rho A\omega^2 - m_0\omega^2\delta(x - \frac{L_1}{2}))w + k_t\frac{h}{2}u' = 0 && 0 \le x \le L_1 \\ &EAu'' + (\rho A\omega^2 + m_0\omega^2\delta(x - \frac{L_1}{2}) \\ &\qquad - k_t + k_0\delta(x - \frac{L_1}{2}))u + k_t\frac{h}{2}w' = 0 && 0 \le x \le L_1 \\ &EIw'''' + \rho I\omega^2 w'' - \rho A\omega^2 w = f.\delta(x - L_2) && L_1 \le x \le L \\ &EAu'' + \rho A\omega^2 u = 0 && L_1 \le x \le L \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

در حقیقت معادلات دینامیکی سازه به دو بخش تقسیم می‌شوند. بخش مقید تیر که روی تکیه‌گاه ارتجاعی قرار گرفته و بخش آزاد تیر که نیروی هارمونیکی- با فرکانس تحریک $\omega$- بر روی آن واقع است. معادلات حاکم بر هر قسمت از تیر شامل دو معادله در راستای افقی و جانبی است که در قسمت مقید تیر این دو معادله با هم کوپل و در قسمت آزاد مستقل از هم‌اند. از آنجا که پاسخ سازه نیز هارمونیک فرض می‌شود، شرایط مرزی و سازگاری تیر را می‌توان به شکل معادلات (۱۴) نوشت. در معادلات (۱۴)، $\theta = \omega t$ است.

$$
\begin{aligned}
& w''(0,\theta)=w'''(0,\theta)=w''(L,\theta)=w'''(L,\theta)=0 \\
& u'(0,\theta)=u'(L,\theta)=0 \\
& w(L_1^-,\theta)=w(L_1^+,\theta) \qquad w'(L_1^-,\theta)=w'(L_1^+,\theta) \\
& w''(L_1^-,\theta)=w''(L_1^+,\theta) \qquad w'''(L_1^-,\theta)=w'''(L_1^+,\theta) \\
& u(L_1^-,\theta)=u(L_1^+,\theta) \qquad u'(L_1^-,\theta)=u'(L_1^+,\theta)
\end{aligned} \tag{۱۴}
$$

با حل مجموعه معادلات دیفرانسیل (۱۳) به همراه شرایط مرزی و سازگاری (۱۴)، پاسخ‌های تیر در دو راستای افقی ($u$) و عمودی ($w$) به‌دست می‌آیند. نیروی تماسی مماسی در سطح مشترک در فاز چسبندگی از رابطه (۱۵) پیروی می‌کند.

$$
F_t(x,\theta)=k_t\left(u(x,\theta)-\frac{h}{2}w'(x,\theta)\right) \tag{۱۵}
$$

تا زمانی که این نیرو کوچک‌تر از نیروی اصطکاکی باشد، حالت تماس چسبنده خواهد بود. شایان ذکر است نیروی عمودی سطح فقط تابع پاسخ استاتیکی تیر -که با حل معادلات (۹) و طبق رابطه (۱۲) به‌دست می‌آید- نبوده بلکه متاثر از پاسخ دینامیکی تیر نیز می‌باشد. پس می‌توان نتیجه‌گیری کرد که نیروی عمودی موثر سطح تماس مطابق رابطه (۱۶) از حاصل‌ضربِ جمعِ آثار پاسخ استاتیکی ($w_s$) و پاسخ دینامیکی تیر ($w_d$) در فنریت عمودی به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
& F_f(x)=\mu q_{eff}(x) \\
& q_{eff}(x)=k_n\left(w_s(x)+w_d(x,\theta)\right)
\end{aligned} \tag{۱۶}
$$

با مساوی هم قراردادن نیروی تماس مماسی ($F_t$) با نیروی اصطکاکی ($F_f$)، حداقل دامنه نیروی تحریکی که سبب شروع لغزش از یک نقطه خاص روی تیر می‌شود به‌دست می‌آید که وابسته به پاسخ تیر در هر دو جهت افقی و عمودی و نحوه توزیع بار عمودی موثر است (رابطه ۱۷). شایان ذکر است که نیروی تماس مماسی و نیروی اصطکاکی به ازای دامنه بیشینه تیر یعنی $\sin(\theta)=1$ محاسبه می‌شوند.

$$
\left|k_t\left(u(x)-\frac{h}{2}w'(x)\right)\right|=\mu\left(k_n\left(w_s(x)+w_d(x)\right)\right) \tag{۱۷}
$$

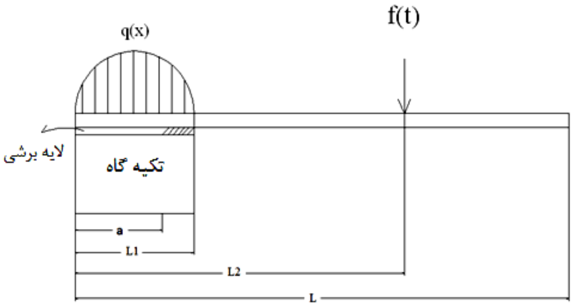
پس با حل (۱۷) نقطه شروع لغزش و حداقل نیروی مورد نیاز برای آغاز آن به‌دست می‌آید.

### ۲-۴- مدل دینامیکی سازه در حالت لغزش جزئی

همان‌گونه که در بخش پیشین اشاره شد، با مقایسه و برابر قراردادن نیروهای تماسی و اصطکاکی می‌توان نقطه آغاز لغزش ($x_s$) و نیروی لازم برای ایجاد آن را ($f_s$) محاسبه کرد. با افزایش نیروی تحریک از مقدار $f_s$، تعداد نقاطی که دچار لغزش می‌شوند افزایش می‌یابد و در واقع یک جبهه لغزشی تشکیل شده و شروع به پیشروی می‌کند. با عنایت به اینکه نقطه شروع لغزش کاملا وابسته به پاسخ سازه و نیروی عمودی سطح است، نمی‌توان یک قانون عمومی برای تعیین نقطه شروع لغزش حتی در سازه ساده مورد نظر بیان کرد؛ بدین معنی که $x_s$ وابسته به فرکانس تحریک، محل بارگذاری دینامیکی، بار عمودی سطح و حتی ابعاد سازه است.

حال با توجه به مطالب ذکرشده و برای تکمیل مدل، فرض می‌کنیم نقطه شروع لغزش انتهای سمت راست تکیه‌گاه بوده و با افزایش دامنه تحریک جبهه لغزشی به طول $L_1-a$ در قسمت راست سطح تماس تشکیل شده باشد. در این صورت سطح تماس به دو منطقه چسبندگی در قسمت چپ و لغزشی در قسمت راست تیر تقسیم می‌شود. با تعمیم مطالب گفته‌شده در بخش الف و ب معادلات حاکم بر سازه شکل ۴ از معادلات دیفرانسیلی (۱۸) تبعیت می‌کنند.

$$
\begin{aligned}
& EIw'''' + \left(\rho I\omega^2 - k_t\frac{h^2}{4} + J_0\omega^2\delta\left(x-\frac{L_1}{2}\right)\right)w'' + \left(k_n - \rho A\omega^2\right. \\
& \qquad \left. - m_0\omega^2\delta\left(x-\frac{L_1}{2}\right)\right)w + k_t\frac{h}{2}u' = 0 \qquad 0\le x\le a \\
& EAu'' + \left(\rho A\omega^2 + m_0\omega^2\delta\left(x-\frac{L_1}{2}\right) - k_t + k_0\delta\left(x-\frac{L_1}{2}\right)\right)u \\
& \qquad + k_t\frac{h}{2}w' = 0 \qquad 0\le x\le a \\
& EIw'''' + \rho I\omega^2 w'' + \left(k_n - \rho A\omega^2\right)w \\
& \qquad - \frac{\mu h}{2}k_n\left(w_s' + w'\right) = 0 \qquad a\le x\le L_1 \\
& EAu'' + \rho A\omega^2 - \mu k_n\left(w_s + w\right) = 0 \qquad a\le x\le L_1 \\
& EIw'''' + \rho I\omega^2 w'' - \rho A\omega^2 w = f.\delta(x-L_2) \qquad L_1\le x\le L \\
& EAu'' + \rho A\omega^2 u = 0 \qquad L_1\le x\le L
\end{aligned} \tag{۱۸}
$$




**شکل ۴** سازه در حالت تماس لغزش جزئی

در این حالت در واقع سازه مورد مطالعه به سه قسمت چسبنده، لغزشی و آزاد با دینامیک متفاوت تقسیم شده است که باید با شرایط سازگاری به هم مرتبط شوند. برای ساده‌شدن معادلات علامت سرعت مثبت درنظر گرفته شده است، ولی در هنگام حل باید تغییریافتن علامت سرعت و در نتیجه معادلات حاکم درنظر گرفته شود. شرایط مرزی و سازگاری سازه عبارت‌اند از:

$$
\begin{aligned}
&w''(0,\theta)=w'''(0,\theta)=w''(L,\theta)=w'''(L,\theta)=0\\
&u'(0,\theta)=u'(L,\theta)=0\\
&w(a^-,\theta)=w(a^+,\theta) \qquad w'(a^-,\theta)=w'(L_1^+,\theta)\\
&w''(a^-,\theta)=w''(a^+,\theta) \qquad w'''(a^-,\theta)=w'''(a^+,\theta)\\
&w(L_1^-,\theta)=w(L_1^+,\theta) \qquad w'(L_1^-,\theta)=w'(L_1^+,\theta)\\
&w''(L_1^-,\theta)=w''(L_1^+,\theta) \qquad w'''(L_1^-,\theta)=w'''(L_1^+,\theta)\\
&u(a^-,\theta)=u(a^+,\theta) \qquad u'(a^-,\theta)=u'(a^+,\theta)\\
&u(L_1^-,\theta)=u(L_1^+,\theta) \qquad u'(L_1^-,\theta)=u'(L_1^+,\theta)
\end{aligned}
\qquad (۱۹)
$$

در دو معادله سوم و چهارم از معادلات (۱۸) مشاهده می‌شود که عبارات استاتیکی $w_s$ نیز علاوه بر عبارت دینامیکی $w_d$ وجود دارند. در نتیجه پاسخ کلی باید شامل پاسخ استاتیکی و دینامیکی باشد.

$$
\begin{cases}
w(x,t) \;=\; w_s(x)+w_d(x).\sin(\theta)\\
u(x,t) \;=\; u_s(x)+u_d(x).\sin(\theta)
\end{cases}
\qquad (۲۰)
$$

در مجموعه معادلات (۱۸) پارامتر $a$ نامشخص است. برای تعیین آن نیروهای الاستیک تماسی و اصطکاکی در نقطه $a$ باید مساوی هم قرار داده شوند (معادله ۲۱). برای حل، $\sin(\theta)=1$ در نظر گرفته می‌شود تا پارامتر $a$ محاسبه‌شده مقدار ماکزیمم را داشته باشد.

$$
\left| k_t\left(u(a)-\frac{h}{2}w'(a)\right)\right| = \mu k_n w(a) \qquad (۲۱)
$$

با استفاده از (۱۸) و (۲۱)، به ازای دامنه‌های تحریک متفاوت $a$ های متفاوت و در نتیجه پاسخ‌های متفاوت وجود خواهد داشت. با رسم دامنه‌های تحریک بر حسب خیز تیر در نقطه تحریک بارگذاری اولیه[1] برای اتصال آشکار می شود. منحنی هیسترزیس مطابق قانون میسینگ قابل رسم است.

نکته دیگر حائز اهمیت این است که ممکن است با افزایش نیرو جبهه‌های لغزش جدیدی در سطح تماس به‌وجود آیند و در واقع سطح تماس چندناحیه‌ای شود. در این صورت باید مطابق اسلوب گفته‌شده در بخش ب معادلات و شرایط مرزی و سازگاری را گسترش داده و حل را ادامه دهیم.

## ۳- نتایج عددی

در بخش پیش رو نتایج حاصل از مدل پیشنهادی در بخش دوم برای سازه‌ای با مشخصات و ابعاد فرضی به همراه روش حل ارائه می‌شوند. در انتها مطالعه پارامتری بر روی نتایج مدل انجام گرفته و تاثیر تغییرات برخی پارامترهای مهم بر منحنی هیسترزیس نشان داده می‌شود.

سازه مورد مطالعه در شکل ۱ را با ابعاد فرضی زیر درنظر می گیریم.

$L$=0.3m $\quad L_1$=0.05m $\quad L_2$=0.2m $\quad E$=200MPa

$b$=0.02m $\quad \mu$=0.2 $\quad k_t$ =10^8 N/m $\quad k_n$ =10^8 N/m

$P$=10kN $\quad h$=0.001m $\quad m_0$=0.02kg $\quad k_0$=10^4N/m

$J_0=10^{-7}$kg.m$^2$ $\quad \rho=7860$kg/m$^3$

ابتدا می‌بایست مدل در حالت خطی حل شده و فرکانس‌های طبیعی آن به‌دست آیند. با حل مسئله مقدار ویژه در معادلات (۱۳) با شرایط مرزی و سازگاری (۱۴) مقادیر سه فرکانس طبیعی اول محاسبه می‌شوند. به دلیل پیچیدگی معادله مشخصه از حل عددی جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی استفاده شده است. برای تحقیق نتایج تحلیلی از نرم‌افزار اجزاء محدود انسیس استفاده شده است. نتایج حاصل از حل مودال سازه مورد مطالعه به همراه نتایج تحلیلی در جدول ۱ مشاهده می‌شود.

**جدول ۱** مقادیر فرکانس‌های طبیعی اول به‌دست آمده از مدل تحلیلی و اجزاء محدود

| | $\omega_1$(rad/s) | $\omega_2$(rad/s) | $\omega_3$(rad/s) |
|---|---|---|---|
| تئوری | ۷۵/۲۰ | ۴۷۱/۴۰ | ۱۳۱۲/۸۰ |
| FEM | ۷۵/۲۲ | ۴۷۱/۴۲ | ۱۳۱۲/۸۳ |

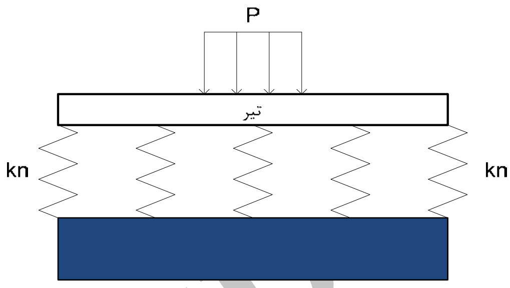
مقایسه نتایج حاصل از تئوری و مدل اجزاء محدود مطابقت بسیار خوب این دو مدل را در حالت خطی نشان می‌دهد.

فرض بر این است که نیروی پیچ بر تیر به صورت شکل ۵ اعمال می‌شود که در آن $P=10\text{KN}$ بوده و طول نیروی اعمالی به اندازه قطر گل پیچ است. بدین ترتیب ضابطه نیروی

1. Backbone Curve

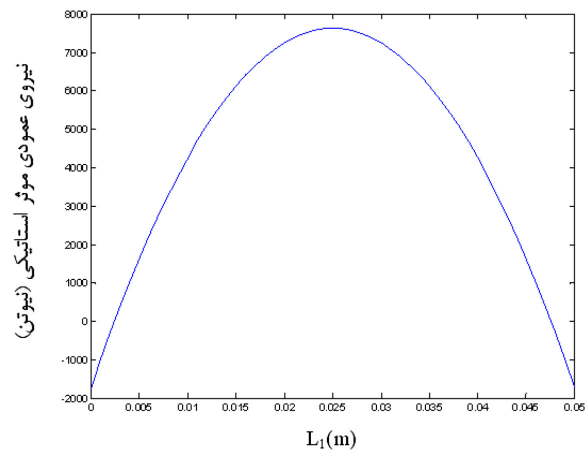
پیچ به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود که در آن $H(x)$ تابع پله‌ای واحد است.

$$F_{bolt} = P.(H(x-0.16)-H(x-0.34)) \qquad (۲۱)$$




**شکل ۵** نیروی اعمالی از طرف پیچ بر بخش مستقر بر روی نشیمن‌گاه اصطکاکی

در این صورت با استفاده از معادلات ۹ تا ۱۲ و حل آن‌ها نیروی عمودی موثر استاتیکی به‌دست می‌آید. پروفیل این نیرو در شکل ۶ ملاحظه می‌شود.

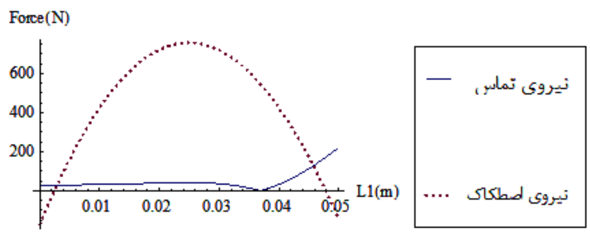



**شکل ۶** نیروی عمودی موثر استاتیکی

همان‌گونه که مشاهده می‌شود در نزدیکی دو انتهای تکیه‌گاه نیروی عمودی سطح منفی می‌شود که این بدان معنی است که در آن دو ناحیه تیر از روی تکیه‌گاه بلند شده و در واقع نیروی عمودی صفر است. برای این منظور، در اولین قدم، نیروهای تماس الاستیک و نیروهای اصطکاکی باید مقایسه شوند و اولین تلاقی این دو منحنی نقطه شروع لغزش را معرفی می‌کند.

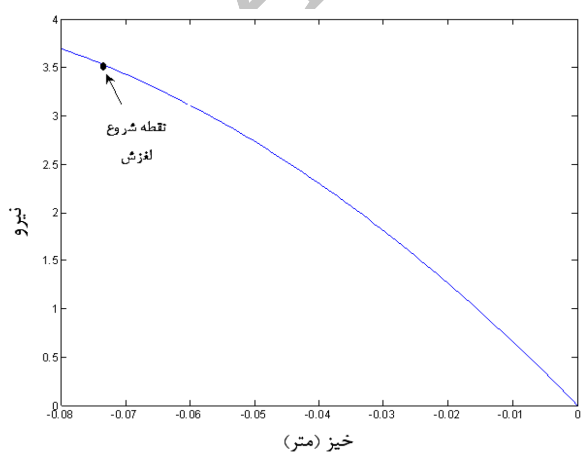
با توجه به اینکه نیروی عمودی سطح در $x = 2.2\text{mm}$ و $x = 47.8\text{mm}$ صفر است، با اعمال کوچک‌ترین نیروی تحریک، لغزش از این دو نقطه شروع می‌شود. در این مقاله فرض شده است که پس از اعمال نیروی خارجی در محل اتصال همواره تماس در راستای عمودی برقرار باشد؛ به عبارت دیگر تیر از روی تکیه گاه جدا نمی‌شود.

فرض بر این است که سازه در سرعت زاویه‌ای ۱۰۰ rad/s تحت نیروی تحریک با دامنه اختیاری و کوچک ۰/۱ N قرار گیرد. حل مجموعه معادلات (۱۳) و (۱۵) نیروهای تماسی و اصطکاکی را مطابق شکل ۷ نشان می‌دهد.



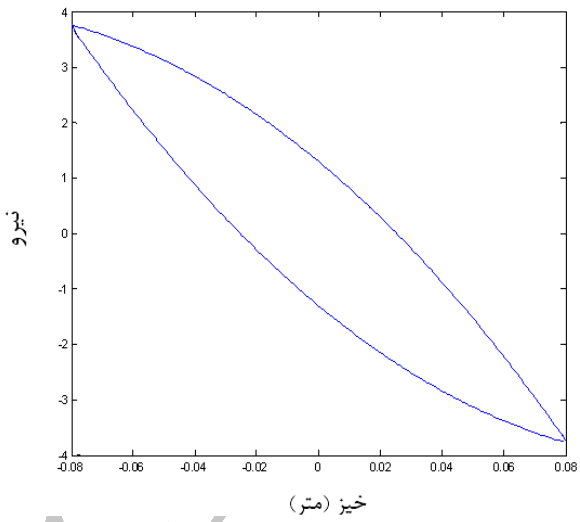

**شکل ۷** نیروهای تماسی و اصطکاکی در سطح تماس به ازای یک دامنه تحریک مشخص

با دقت در شکل ۷ مشخص می‌شود که با افزایش دامنه تحریک، دو جبهه لغزش از سمت راست و چپ تکیه‌گاه تشکیل شده و شروع به پیشروی می‌کنند تا زمانی که این دو جبهه به هم پیوسته و لغزش بزرگ را به وجود آورند. نیروی مورد نیاز برای ایجاد لغزش بزرگ ۳/۵۵ نیوتن محاسبه می‌شود و روند افزایش نیرو بر حسب جابه‌جایی پس از وقوع لغزش بزرگ به صورت خطی است که به دلیل مدلسازی پیچ با فنر مماسی متمرکز می‌باشد. در این صورت منحنی بارگذاری اولیه به‌دست می‌آید که مطابق شکل ۸ است.




**شکل ۸** منحنی بارگذاری اولیه

با اعمال قانون میسینگ حلقه هیسترزیس دینامیکی مورد نظر طبق شکل ۹ در سیکل بارگذاری رسم می‌شود.




**شکل ۹** حلقه هیسترزیس

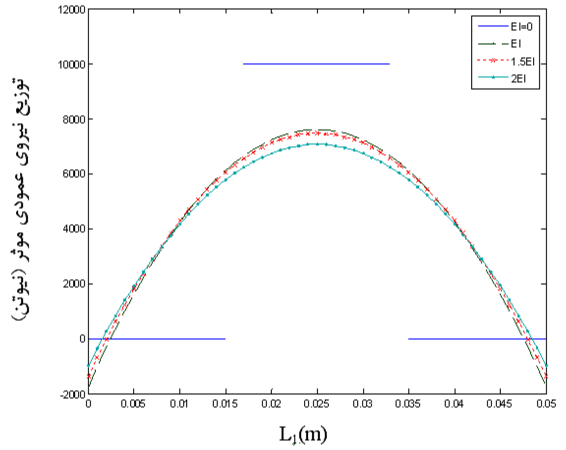
رفتار سازه در فاز غیرخطی بـه دلیـل کـاهش سـفتی سـازه ناشی از پدیده استهلاک لغزشی است که اتلاف از طریق بـراورد مساحت داخل حلقه هیسترزیس قابل محاسبه است.

در ادامه تـاثیر تغییـرات برخـی پارامترهـای مهـم مـدل بـر حلقه‌های هیسترزیس، در حالتی‌که حالت تماس لغزش جزئی و حداکثر جابه‌جایی نقطه تحریک تیر ۱۹ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود، بررسی می‌شود.

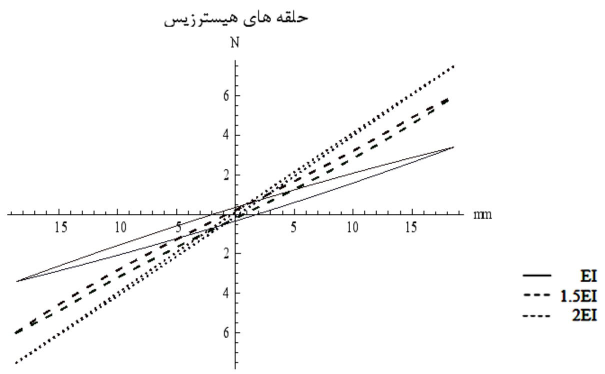
**الف) صلبیت خمشی (EI)**

همان‌گونه که در شکل ۱۰ مشاهده مـی شـود، بـا افـزایش EI طبق معادله (۹) شیب تغییرات منحنی "توزیع نیروی عمـودی موثر" کمتر می‌شود بدین ترتیب که حداقل نیـروی لازم بـرای شروع پدیده لغزش افـزایش و نیـروی لازم بـرای وقـوع لغـزش بزرگ کاهش می‌یابد.

نمودار ۱۱ منحنی‌های هیسترزیس در EI هـای متفـاوت را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود، به دلیل اینکه خیز و شیب تیـر در حالت صلبیت خمشی کمتر، بزرگ‌تر اسـت، کـاهش سـفتی سازه در جابه‌جایی‌های برابر شدیدتر بوده و انرژی اتلافی بیشتر است. اثر تغییرات نیروی عمودی مـوثر اسـتاتیکی در EI هـای مختلف در مقابل تغییرات خیز و شیب ناچیز است.



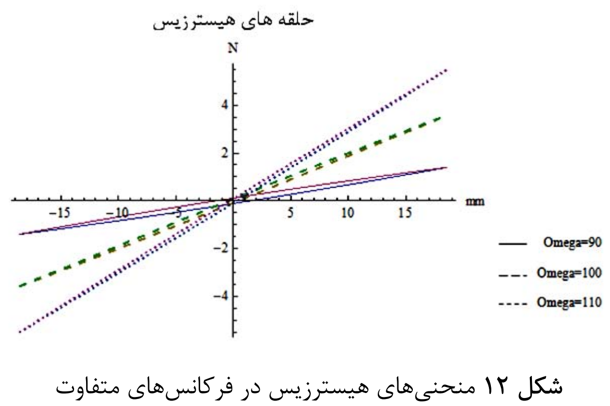

**شکل ۱۰** نیروی عمودی موثر استاتیکی در EI های متفاوت




**شکل ۱۱** منحنی‌های هیسترزیس در EI های متفاوت

**ب) فرکانس**

با افزایش فرکانس و دورشدن از فرکانس طبیعی اول، خیز دینامیکی کمتر شده و در نتیجه نیروی بزرگ‌تری برای شروع لغزش نیاز است. مقایسه منحنی‌های هیسترزیس در سه فرکانس مختلف به صورت نمودار ۱۲ است.

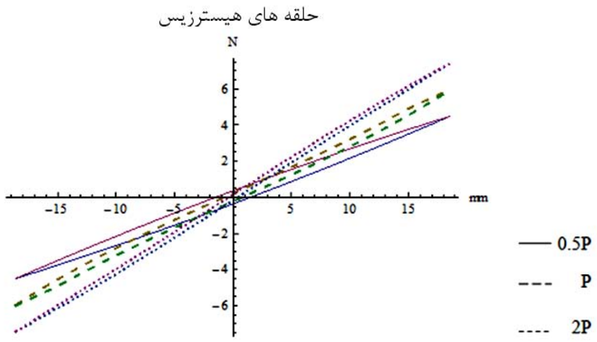



**شکل ۱۲** منحنی‌های هیسترزیس در فرکانس‌های متفاوت

مشاهده می‌شود در فرکانس نزدیک‌تر به فرکانس طبیعی مساحت محصور در حلقه هیسترزیس اندکی بزرگ‌تر است که با آنچه سیگراوغلو[۱۶] بیان کرده است مطابقت دارد.

### ج) پیش‌بار

با افزایش پیش‌بار پیچ، نیروی عمودی بیشتر شده و نیروی مورد نیاز برای شروع لغزش و رخداد پدیده لغزش بزرگ افزایش می‌یابد. مقایسه منحنی‌های هیسترزیس در سه پیش‌بار P=5KN، P=10KN و P=20KN به صورت نمودار ۱۳ است.




**شکل ۱۳** منحنی‌های هیسترزیس در پیش‌بارهای متفاوت

مشاهده می‌شود در پیش‌بار کمتر، به دلیل نیروی مقاوم کمتر، پدیده کاهش سفتی سازه و در نتیجه اتلاف انرژی بزرگ‌تر نمود بهتری دارد.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی تحلیلی برای محاسبه انرژی اتلافی پدیده لغزش در تماس سطح‌به‌سطح در حالتی که سازه حرکت جانبی دارد ارائه شد. مدل ارائه‌شده شامل استخراج معادلات ارتعاش خمشی حاکم بر دینامیک تیر مقید اصطکاکی و بیان الگوریتم حل معادلات در حالتی که رفتار سازه خطی و همچنین غیرخطی است می‌شود. در انتها نحوه حل مدل ارائه‌شده در یک مثال عددی بیان شده و نتایج حاصل از بررسی پارامتری مدل مذکور مورد بحث قرار گرفته است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل ارائه‌شده به خوبی قابلیت شبیه‌سازی رفتار سطوح تماس اصطکاکی را داراست. به عبارت دیگر حلقه‌های هیسترزیس که معرف انرژی اتلافی سطح تماس‌اند توسط مدل ارائه‌شده قابل بازسازی‌اند.

## ۵- منابع


[1] Beards C. F., *Structural Vibration: Analysis and Damping*, London, Butterworth-Heinemann, 1996.
[2] Goodman L. E., Klumpp J. H., “Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-Blade Vibration”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 23, 1956, pp. 421-429.
[3] Ungar E. E., “Energy Dissipation at Structural Joints; Mechanisms and Magnitudes”, Bolt Technical Documentary Report No. FDL-TDR-64-98, Air Force Flight Dynamics Lab, 1964.
[4] Metherell A., Diller S., “Instantaneous Energy Dissipation Rate in a Lap Joint-Uniform Clamping Pressure”, *J. Appi. Mech*, Vol. 35, pp. 123-8, 1968.
[5] Earles S. W. E., “Theoretical Estimation of the Frictional Eenergy Dissipation in a Simple Lap Joint”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 8, 1966, pp. 207-214.
[6] Johnson K. L., “Energy Dissipation at Spherical Surfaces in Contact Transmitting Oscillating Forces”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 3, No. 4, pp. 362-368.
[7] Ibrahim R., Pettit C., “Uncertainties and Dynamic Problems of Bolted Joints and other Fasteners”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 279, 2005, pp. 857-936.
[8] Gregory D., Smallwood D., Coleman R., “Experimental Studies to Investigate Damping in Frictional Shear Joints”, Proceedings of 70th Shock and Vibration Symposium, 1999.
[9] Smallwood D. O., Gregory D. L., Coleman R.G., *Damping Investigations of a Simplified Frictional Shear Joint*, Livermore, CA (US), 2000.
[10] Mindlin R. D., “Compliance of Elastic Bodies in Contact”, *J. Appl. Mech.*, Vol. 16, 1949, pp. 259-268.
[11] Oden J. T., Martins J. A. C., “Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52, 1985, pp. 527-634.
[12] Rice J. R., Ruina A. L., “Stability of Steady Frictional Slipping”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, 1983, pp. 343-349.
[13] Menq C. H., Bielak J., Griffin J. H., “The Influence of Microslip on Vibratory Response-Part I: a New Microslip Model”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 107, 1986, pp. 279-293.
[14] Csaba G., “Forced Response Analysis in Time and Frequency Domains of a Tuned Bladed Disk with Friction Dampers”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 214, 1998, pp. 395-412.
[15] Berger E. J., Begley M. R., Mahajani M., “Structural Dynamic Effects on Interface Response-Formulation and Simulation under

Partial Slipping Conditions", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67, 2000, pp.785-792.

[16] Cigeroglu E., Lu W., Menq C. H., "One Dimensional Dynamic Microslip Friction Model", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, 2006, pp. 881-898.

[17] Herrera I., "Dynamic Models for Masing Type Materials and Structure", *Bol. Soc. Mex. Ing. Sismica*, Vol. 3, No. 1, 1965, pp. 1-8.

[18] Damisa O., Olunloyo V. O. S., Osheku C. A., Oyediran A. A., "Dynamic Analysis of Slip Damping in Clamped Layered Beams with Non-Uniform Pressure Distribution at the Interface", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, 2008, pp. 349-374.