



## مقایسه دو روش نرخ کرنش ثابت و متغیر در استخراج ثوابت مادی رفتار فلزات با استفاده از تست میله هایپکینسون

حسن شکراللهی<sup>۱</sup>، محمد صدیقی<sup>۲\*</sup>، مهرداد خاندائی<sup>۳</sup>

۱- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۳- دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

\* تهران، صندوق پستی ۱۶۳-۱۶۷۶۵، sedighi@iust.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله، استخراج ثابت‌های مادی رفتار فلزات با استفاده از تست میله هایپکینسون مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با استفاده از نتایج تجربی دو نمونه فولاد مختلف، چگونگی به‌دست آوردن ثابت‌های مدل مادی مربوط به آن‌ها شرح داده می‌شود. نتایج تجربی تست میله هایپکینسون کششی فولاد ۱۰۱۸ و تست میله هایپکینسون فشاری فولاد ۴۳۴۰ از مراجع استخراج شده است. در تحلیل عددی، دو روش برای محاسبه تنش عددی معرفی می‌شود که وجه تمایز این دو روش ثابت فرض کردن نرخ کرنش در حین تست میله هایپکینسون است. در هر یک از دو روش، با مینیمم کردن انحراف معیار تنش‌های تجربی و عددی، ثابت‌های بهینه برای مدل مادی جانسون-کوک دو فولاد استخراج می‌شود. همچنین تغییرات دمایی نمونه‌ها در حین تست و آنالیز حساسیت بر روی پارامترهای مدل مادی جانسون-کوک مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهد که ثابت فرض کردن نرخ کرنش در استخراج ثوابت منجر به قبول خطای قابل ملاحظه‌ای می‌شود؛ به طوری که برای نمونه‌های مورد بررسی در این مقاله حداقل خطای مشاهده‌شده، در محدوده نرخ کرنش مورد مطالعه، در حدود ۱۴ درصد است.

**کلیدواژه‌گان:** مدل مادی، نرخ کرنش بالا، آنالیز حساسیت

## Constant and variable assuming strain rate methods for identification of constitutive model of metals using Hopkinson pressure bar test

H. Shokrollahi<sup>1</sup>, M. Sedighi<sup>2\*</sup>, M. Khandaei<sup>3</sup>

1- MSc., Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

3- PhD, Mech. Eng., Iran Univ. of Science and Tech., Tehran, Iran

\* P. O. B. 16765-163 Tehran, sedighi@iust.ac.ir

**Abstract-** In the present paper, the parameters of Johnson-Cook (JC) constitutive model for two steels have been identified, based on the Hopkinson pressure bar data found in the literature. Using the measured strain pulses, the experimental stress-strain and deformation-time curves can be extracted. The experimental data have been processed using two different methods. In the first method strain rate assume to be constant during deformation and in the other one the deformation has been applied to a modeled specimen. In each method, an optimal set of material constants for JC constitutive model have been computed by minimizing the standard deviation of the numerically obtained stress-strain curve from the experimental data. Also a sensitivity analysis has been performed on JC constitutive model parameters and temperature changes during test have been investigated. The obtained results show that using constant strain rate method, leads to considerable error in results; for example in this study the minimum error is about 14%.

**Keywords:** Constitutive Model, High Strain Rates, Sensitivity Analysis

## ۱- مقدمه

شناسایی رفتار مواد در نرخ کرنش‌های بالا اهمیت بسزایی در مدلسازی تغییر فرم‌های سریع سازه‌ها دارد. رفتار مواد در بارگذاری ضربه‌ای نسبت به شرایط شبه‌استاتیکی متفاوت است. مهم‌ترین عامل برای توسعه روش‌های تست، نیاز به به‌دست آوردن مقادیر ثابت‌های مربوط به مدل‌های ماده مختلف است که در مدلسازی‌های عددی ضربه یا شوک در سازه‌ها به‌کار گرفته می‌شود. روش تست کلاسیک در نرخ کرنش‌های بالا تست میله هاپکینسون است که برای تعیین رفتار مکانیکی مواد مختلف (فلزات، سرامیک‌ها و پلیمرها) در نرخ کرنش  $10^2$ - $10^4$  بر ثانیه به‌کار گرفته می‌شود (در سیستم‌های مینیاتوری این نرخ کرنش به  $5 \times 10^4$  بر ثانیه می‌رسد [۱]).

تست میله هاپکینسون فشاری اولین بار توسط برتراند هاپکینسون در سال ۱۹۱۴ برای اندازه‌گیری انرژی ناشی از انفجار مواد منفجره معرفی شد [۲]. در سال ۱۹۴۹، کولسکی دو میله هاپکینسون را برای اندازه‌گیری خواص مواد در نرخ کرنش‌های بالا به‌کار برد [۳]. از آن زمان به بعد، این تست به نام تست میله هاپکینسون نیمه<sup>۱</sup> معروف شد و به سرعت به عنوان روش استاندارد برای استخراج خواص مواد در نرخ کرنش‌های بالا مبدل شد. این تست به طور موفقیت‌آمیز در شکل‌های کششی، پیچشی و پیچشی-فشاری نیز به‌کار گرفته شد [۴]. شاید نوع پیچشی بهترین نوع تست باشد، زیرا اصطکاک و اینرسی ماده در آن تأثیری ندارند، اما ساختن نمونه پیچشی به مراتب مشکل‌تر از نمونه‌های دیگر است.

تاکنون مطالعات و بررسی‌های زیادی در خصوص تست میله هاپکینسون و چگونگی انجام این تست ارائه شده است. روش‌های مختلفی برای تعیین ثابت ماده در مراجع ارائه شده است. محققان بسیاری تست میله هاپکینسون فشاری را ترتیب داده‌اند تا ثابت‌های مدل‌های ماده را با منطبق کردن مدل بر نتایج تجربی به‌دست آورند.

لی و لین [۵] تست میله هاپکینسون را برای بررسی رفتار آلیاژ Ti-6Al-4V در دماهای بالا انجام دادند. آن‌ها ثابت‌های مدل جانسون-کوک را با استفاده از آنالیز رگرسیون به‌دست آورده‌اند. گری و همکارانش [۶] برای استخراج ثابت‌های ماده دو مدل جانسون-کوک و زریلی-آرمسترانگ از یک الگوریتم

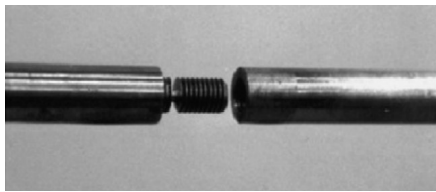
بهینه‌سازی استفاده کرده‌اند. چاپارو و همکارانش [۷] دو روش مختلف بهینه‌سازی برای یافتن پارامترهای مدل ماده به‌کار گرفته‌اند؛ یکی بر مبنای الگوریتم ژنتیک و دیگری بر اساس یک روش گرادیانی. آن‌ها همچنین از یک روش که ترکیبی از دو روش قبلی است استفاده کرده‌اند. در این روش، نتایج الگوریتم ژنتیک را به عنوان مقادیر ورودی برای روش گرادیانی به‌کار گرفته‌اند. ساسو و همکارانش [۸] با انجام یک سری آزمایش به بررسی رفتار فولاد ۱۰۱۸ در نرخ کرنش‌های بالا پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از نتایج تست میله هاپکینسون کششی و به‌کارگیری روش حداقل مربعات ثابت‌های چندین مدل ماده را برای این فولاد استخراج کرده‌اند.

در این مقاله، نتایج تست میله هاپکینسون کششی فولاد ۱۰۱۸ (از مرجع [۸]) و تست میله هاپکینسون فشاری برای فولاد ۴۳۴۰ (از مرجع [۹]) مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استخراج نمودار تنش-کرنش تجربی از نتایج تست و مینیمم کردن انحراف معیار تنش‌های تجربی و عددی، ثابت‌های بهینه برای مدل ماده جانسون-کوک این دو فولاد استخراج می‌شود. دو روش برای به‌دست آوردن تنش-کرنش عددی ارائه می‌شود. در روش اول، با فرض ثابت بودن نرخ کرنش در حین تست، با استفاده از رابطه مدل ماده جانسون-کوک تنش متناظر هر کرنش محاسبه می‌شود. در روش دوم، نرخ کرنش به صورت متغیر فرض می‌شود. در این روش با استفاده از موج‌های کرنش اندازه‌گیری شده در تست میله هاپکینسون، نمودار جابه‌جایی نمونه مورد مطالعه برحسب زمان به‌دست می‌آید. سپس، در یک تحلیل المان محدود، تغییر فرم به نمونه مدل شده اعمال می‌شود و تغییرات دمایی و تنش عددی متناظر محاسبه می‌شود. همچنین، در این مقاله آنالیز حساسیت صورت گرفته بر روی پارامترهای مدل ماده جانسون-کوک ارائه می‌شود.

## ۲- نتایج حاصل از تست میله هاپکینسون

این تست شامل یک میله ضربه‌زننده، یک میله ورودی و یک میله خروجی است. شکل ۱ ترکیب کلی این تست را نشان می‌دهد. نمونه آزمایش بین میله ورودی و خروجی قرار می‌گیرد. برای انجام تست، میله ضربه‌زننده به میله ورودی ضربه زده باعث ایجاد موج فشاری که طول موج آن دو برابر طول ضربه‌زننده است می‌شود [۴]. وقتی موج به محل تماس میله و نمونه می‌رسد، بخشی از آن به داخل میله ورودی

می‌کند. مهم‌ترین مشکل تست‌های کششی در توزیع تنش غیریکنواخت و غیر یک‌بعدی ناشی از پدیده گلوبی شدن است، اما در تست‌های کششی نرخ کرنش بالاتری قابل دستیابی است. برای انجام تست کششی نمونه به صورت شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود. با ضربه میله ضربه‌زننده موج کرنش فشاری ابتدا در میله ورودی ایجاد می‌شود و سپس به میله خروجی انتقال می‌یابد. شایان ذکر است که با عبور موج کرنش فشاری از نمونه، تغییر فرم پلاستیک در آن اتفاق نمی‌افتد. وقتی موج به انتهای آزاد میله خروجی می‌رسد به صورت یک موج کششی بازتاب می‌یابد و به نمونه می‌رسد. سپس بخشی از آن به میله ورودی وارد می‌شود و بخشی به صورت موج فشاری به میله خروجی بازمی‌گردد. میله‌ها طوری انتخاب می‌شوند که نسبت طول به قطر ( $L/D$ ) بالایی داشته باشند تا اثر پراکندگی موج کاهش یابد.



شکل ۲ جزئیات نمونه در تست میله‌هاپکینسون کششی [۸]

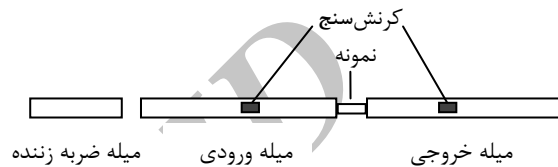
## ۲-۱- نتایج تست میله از جنس فولاد ۱۰۱۸

اطلاعات مربوط به چگونگی انجام تست روی این فولاد در مرجع [۸] قابل دسترسی است. در این مرجع، نتایج تست بر روی سه نمونه استوانه‌ای به قطر ۴ میلی‌متر و طول‌های ۲، ۴ و ۸ میلی‌متر ارائه شده است. با توجه به ابعاد نمونه‌ها سه نرخ کرنش مختلف با هریک از نمونه‌ها قابل دستیابی شده است. نتایج استخراج‌شده از مرجع [۸] در شکل ۳ نشان داده شده است.

## ۲-۲- نتایج تست میله از جنس فولاد ۴۳۴۰

سونگ و همکارانش [۹] تست میله‌هاپکینسون فشاری روی فولاد ۴۳۴۰ با سختی HRC45 انجام داده‌اند. نمونه‌ها به قطر ۹/۳۵ میلی‌متر و طول ۶/۳۵ میلی‌متر و در نرخ کرنش‌های ۱۷۰۰ و ۳۶۰۰ بر ثانیه تست شده‌اند. سایر اطلاعات مربوط به چگونگی انجام تست روی این فولاد در مرجع [۹] ارائه شده است. نتایج استخراج‌شده از مرجع [۹] در شکل ۴ نشان داده شده است.

بازمی‌گردد و بخشی به نمونه منتقل می‌شود و سپس به میله خروجی انتقال می‌یابد. این موج‌ها با کرنش‌سنج‌هایی که روی میله‌ها قرار گرفته‌اند اندازه‌گیری می‌شود. میله‌های ورودی و خروجی در محدوده الاستیک تغییر فرم می‌یابند. نرخ کرنش ( $\dot{\epsilon}$ )، کرنش ( $\epsilon$ ) و تنش ( $s$ ) (هر سه از نوع مهندسی) با استفاده از موج‌های کرنش بازتاب‌شده ( $\epsilon_R$ ) و عبوری ( $\epsilon_T$ ) و با فرض انتشار موج یک بعدی با روابط (۱) تا (۳) قابل محاسبه است [۳].



شکل ۱ شماتیک تست میله‌هاپکینسون

$$\dot{\epsilon}(t) = -\frac{2c_b}{l_0} \epsilon_R(t) \quad (1)$$

$$e(t) = \int_0^t \dot{\epsilon}(\tau) d\tau \quad (2)$$

$$s(t) = \frac{E_b A_b}{A_s} \epsilon_T(t) \quad (3)$$

در روابط (۱) تا (۳)،  $l_0$  و  $A_s$  به ترتیب سطح مقطع و طول اولیه نمونه و  $c_b$  سرعت موج الاستیک در میله‌ها می‌باشند. بنابراین، نرخ کرنش و کرنش در نمونه با استفاده از موج کرنش منعکس‌شده و تنش با استفاده از پالس عبوری محاسبه می‌شود. با حذف زمان از معادلات (۱) تا (۳)، می‌توان منحنی تنش-کرنش تجربی را یافت.

باید اشاره کرد که اعتبار محاسبات تنش، کرنش و نرخ کرنش وابسته به این فرضیات است:

- موج فقط در راستای طولی و بدون اثرات پخش انتشار می‌یابد.
- نمونه باید در تعادل دینامیکی باشد و در تست فشاری اصطکاک ناچیز باشد.
- سطح مقطع میله‌های ورودی و خروجی یکسان باشد.
- اثر اینرسی ناچیز باشد.
- تنش و کرنش در نمونه یکنواخت باشد.
- که این فرضیات بطور گسترده در دهه‌های گذشته مورد بحث و ارزیابی قرار گرفته است [۸].
- تئوری و آنالیز تست میله‌هاپکینسون کششی اساساً معادل نوع فشاری آن است، فقط در روابط آن علامت پالس‌ها تغییر

### ۳- مدل مادی

محققان بسیاری به مطالعه رفتار فلزات در نرخ کرنش‌های بالا و دماهای بالا پرداخته‌اند. نتیجه تلاش‌های آن‌ها، ارائه رفتار فلزات در این شرایط با استفاده از مدل‌های مادی بوده است. میرزا [۱۰] مدل‌های مادی ارائه‌شده قبل از سال ۱۹۹۴ را مورد مرور و مطالعه قرار داده است. مرور برخی مدل‌های مادی را می‌توان در مقالات ارائه‌شده توسط لیانگ و خان [۱۱] و میرزا و همکارانش [۱۲] ملاحظه کرد.

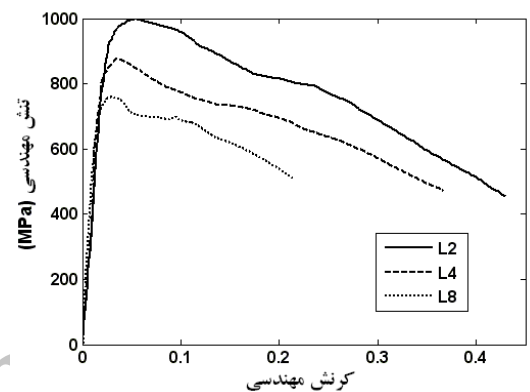
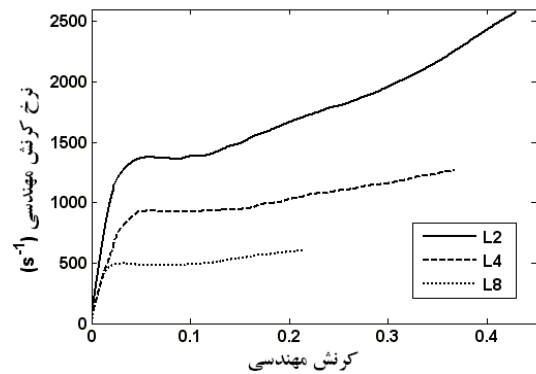
در این مقاله، مدل جانسون-کوک مورد استفاده قرار گرفته است. این مدل از جمله پرکاربردترین مدل‌هایی است که در اغلب نرم‌افزارهای شبیه‌سازی عددی نیز به کار گرفته شده است. این مدل توسط جانسون و کوک در سال ۱۹۸۳ ارائه شده است [۱۳]. در این مدل، تنش و نمایسز به صورت حاصل ضرب عبارات کارسختی، سخت‌گردانی نرخ کرنش و نرم‌گردانی دمایی با رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$\sigma = [A + B\epsilon^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^m \right] \quad (4)$$

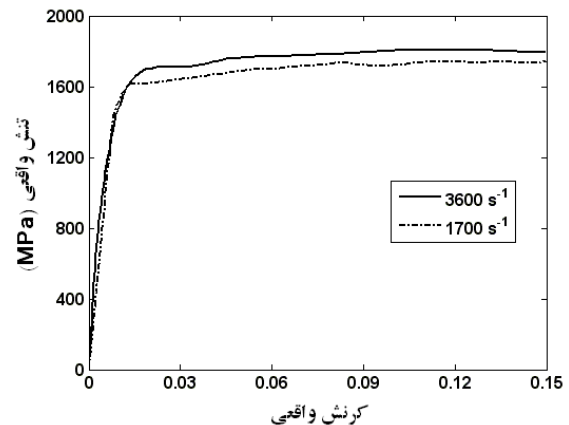
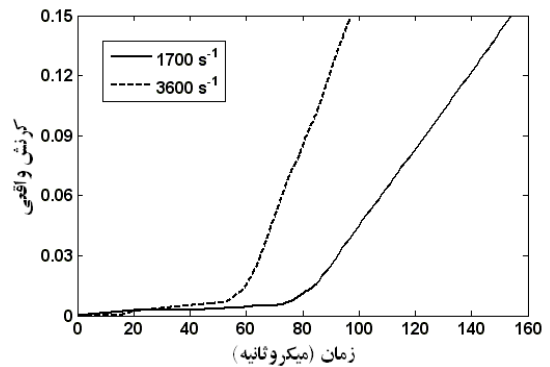
که در آن  $\dot{\epsilon}_0$  نرخ کرنش مرجع،  $T_m$  دمای ذوب و  $T_0$  دمای مرجع هستند. ضرایب  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $m$  ثابت‌های این مدل هستند. ثابت  $A$  معرف تنش تسلیم و ثوابت  $B$  و  $n$  بیانگر اثر سخت‌گردانی کرنشی هستند. ثابت  $C$  مربوط به نرخ کرنش و ثابت  $m$  نشان‌دهنده وابستگی دمایی است. ثابت‌های  $A$ ،  $B$  و  $n$  مربوط به شرایط شبه‌استاتیکی هستند. بنابراین فقط دو پارامتر  $C$  و  $m$  که وابستگی به نرخ کرنش و دما را ارائه می‌کنند باید تعیین شوند. جدول ۱ پارامترهای شبه‌استاتیکی (از پیش تعیین شده) مدل جانسون-کوک مربوط به دو فولاد را نشان می‌دهد.

جدول ۱ پارامترهای شبه‌استاتیکی مدل جانسون-کوک برای دو فولاد

| مرجع | پارامترهای ثابت           | فلز        |
|------|---------------------------|------------|
| [۸]  | $A = 520 \text{ MPa}$     | فولاد ۱۰۱۸ |
|      | $B = 269 \text{ MPa}$     |            |
|      | $n = 0.282$               |            |
| [۱۴] | $A = 1255/45 \text{ MPa}$ | فولاد ۴۳۴۰ |
|      | $B = 795/83 \text{ MPa}$  |            |
|      | $n = 0.26$                |            |



شکل ۳ نتایج استخراج شده از مرجع [۸] برای فولاد ۱۰۱۸



شکل ۴ نتایج استخراج شده از مرجع [۹] برای فولاد ۴۳۴۰

## ۴- تعیین ثوابت مادی

مسئله تعیین ثوابت مدل مادی را می‌توان به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی فرمول‌بندی کرد که در آن مربع اختلاف تنش‌های تجربی و عددی حداقل‌سازی می‌شود. تابع هدف به صورت رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$f(X) = \frac{1}{2} \|r(X)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_i^{Num}(X) - s_i^{Exp})^2 \quad (5)$$

که در آن  $s_i^{Exp}$  تنش اندازه‌گیری شده با آزمایش،  $s_i^{Num}$  تنش محاسبه‌شده عددی،  $X$  بردار پارامترهای مدل مادی است که باید تعیین شوند، یعنی  $X=(C, m)$  و  $N$  تعداد داده‌های آزمایشی برابر با تعداد تقسیمات زمانی حل مسئله شبیه‌سازی شده است.

در این مقاله، روش بهینه‌سازی لوبنبرگ-ماکوارت [۱۵] مورد استفاده قرار می‌گیرد. جزئیات محاسباتی این روش در مرجع [۱۶] قابل دسترسی است که در نهایت به یک الگوریتم تکراری منجر می‌شود که در مرحله  $k$ ام آن دستگاه معادلات خطی (۶) حل می‌شود.

$$(J(X^{(k)})^T J(X^{(k)}) + \lambda^{(k)} I) d^{(k)} = -J(X^{(k)})^T r(X^{(k)}) \quad (6)$$

که در آن  $J(X)$  ماتریس ژاکوبین مربوط به بردار باقی‌مانده  $r(X)$  است که به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود.

$$J(X)_{ij} = \frac{\partial r_i(X)}{\partial x_j} = \frac{\partial s_i^{NUM}(X)}{\partial x_j} \quad (7)$$

در رابطه (۶)،  $I$  ماتریس همانی است. پارامتر هموارسازی غیر منفی  $\lambda$  در هر مرحله تعیین می‌شود. در هر مرحله، اگر کاهش  $f(X)$  رخ دهد، این مرحله خاتمه یافته است و برای مرحله بعدی مقدار کمتری برای  $\lambda$  اختصاص می‌یابد. در غیر این صورت  $\lambda$  باید افزایش یابد تا زمانی که در  $f(X)$  کاهش رخ دهد. در این مقاله، به منظور نشان‌دادن میزان تفاوت بین نتایج عددی و تجربی، از انحراف معیار ( $SD$ ) و برای ارزیابی کیفیت استخراج ثوابت از پارامتر آماری  $R^2$  استفاده می‌شود. این دو کمیت به ترتیب با روابط (۸) و (۹) تعریف می‌شوند.

$$SD(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (s_i^{NUM}(X) - s_i^{EXP})^2}{N}} \quad (8)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (s_i^{NUM}(X) - s_i^{EXP})^2}{\sum_{i=1}^N (s_i^{EXP} - \bar{s}^{EXP})^2} \quad (9)$$

که در رابطه (۹)،  $\bar{s}^{EXP}$  میانگین تنش‌های به‌دست آمده از آزمایش است. هرچه پارامتر  $R^2$  به یک نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده کیفیت بالاتر استخراج ثوابت است.

برای محاسبه تنش عددی دو روش استفاده می‌شود؛ در روش اول نرخ کرنش در حین تست میله هاپکینسون ثابت فرض می‌شود و در روش دوم تغییرات نرخ کرنش نیز در نظر گرفته می‌شود. این دو روش در ادامه معرفی می‌شوند.

## ۴-۱- محاسبه تنش عددی: فرض ثابت بودن نرخ کرنش

در این روش، با فرض ثابت بودن نرخ کرنش، تنش عددی به ازای هر کرنش به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$s^{Num} = [A + B\varepsilon^n][1 + C \ln(\dot{\varepsilon})] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^m \right] \quad (10)$$

که برای  $\dot{\varepsilon}$  مقدار متناظر نرخ کرنش ثابت قرار داده می‌شود. همچنین دما به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

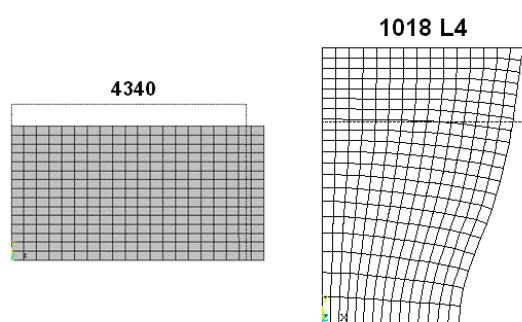
$$T = T_0 + \frac{\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon}{\rho C_p} \quad (11)$$

که مقدار انتگرال از روی نمودار تنش-کرنش تجربی به‌دست آمده از تست میله هاپکینسون محاسبه می‌شود.

## ۴-۲- محاسبه تنش عددی: در نظر گرفتن تغییرات نرخ کرنش

در این روش که در مقاله [۱۶] معرفی شده و به تفصیل شرح داده شده است، برای محاسبه تنش عددی، تغییرات کرنش برحسب زمان انجام تست نیاز است که تنها محدودیت این روش نسبت به روش اول است. این روش نسبت به روش اول به پاسخ دقیق‌تری منتهی خواهد شد، اما به دلیل اینکه معمولاً در ارائه نتایج تست میله هاپکینسون به ارائه نمودار تنش-کرنش اکتفا می‌شود و نمودارهای موج‌های کرنش برحسب زمان در دسترس نیست، کاربرد این روش محدود می‌شود. مگر اینکه امکان انجام چنین تست‌هایی وجود داشته باشد. برای کاربرد این روش، استفاده از آنالیز المان محدود به‌ویژه در تست کششی مورد نیاز است. در این پژوهش، شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار انسیس<sup>۱</sup> انجام شده است. در ادامه روند شبیه‌سازی عددی به‌اختصار توضیح داده می‌شود.

1. Ansys



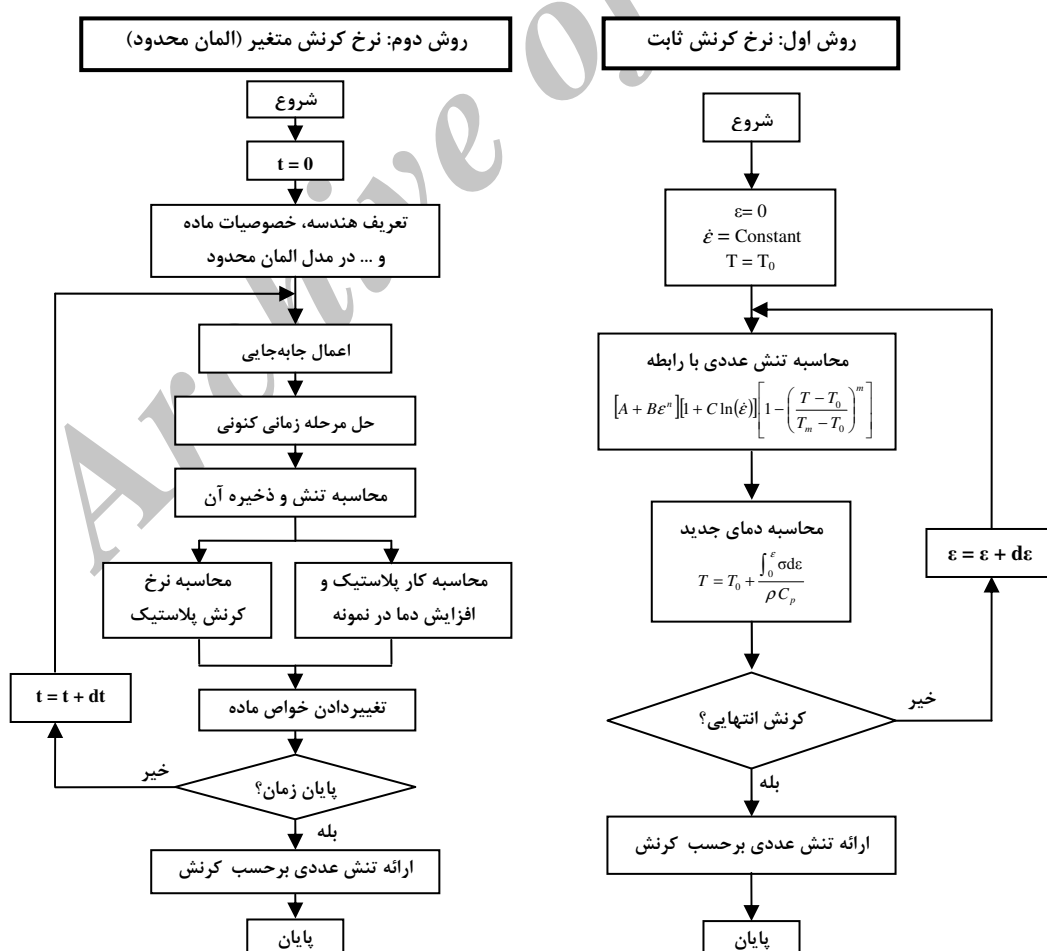
شکل ۵ شکل نهایی نمونه‌ها در مقایسه با شکل اولیه آن‌ها

$$\Delta T = \frac{PLWK}{\rho C_p} = \frac{\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon}{\rho C_p} \quad (12)$$

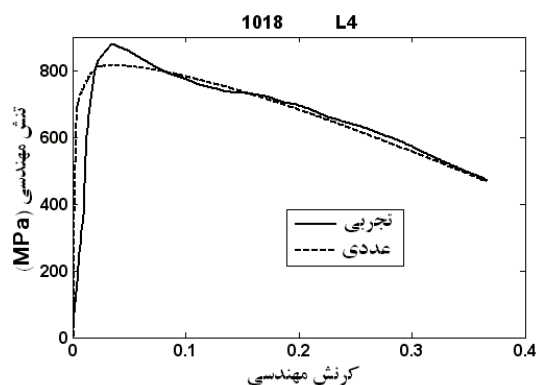
که  $PLWK$  کار پلاستیک انجام شده در واحد حجم،  $\rho$  چگالی و  $C_p$  حرارت ویژه ماده است. در شکل ۶ جزئیات مراحل محاسبه تنش عددی با دو روش ارائه شده است.

نمونه‌ها مطابق با ابعاد ارائه شده در بخش ۲ مدل می‌شوند. برای هر یک از نمونه‌ها با توجه به هندسه متقارن آن‌ها، فقط مستطیل‌هایی به ابعاد نصف قطر و نصف طول‌های نمونه مدل می‌شود. در شکل ۵، حالت نهایی تغییر فرم یافته نمونه‌ها در مقایسه با حالت اولیه آن‌ها نشان داده شده است. نمونه‌ها با المان صفحه‌ای متقارن محوری المان‌بندی می‌شود. جابه‌جایی محوری به دست آمده از نتایج آزمایش به گره‌های لبه بالایی مدل وارد می‌شود. گره‌های لبه پایینی مقید به تغییر مکان در راستای طولی (X) هستند و گره‌های لبه سمت چپ فقط می‌توانند در راستای عرضی (Y) جابه‌جا شوند.

تنش عددی از مجموع نیروهای عکس‌العمل در راستای عرضی گره‌های لبه پایینی تقسیم بر سطح مقطع اولیه نمونه به دست می‌آید. نرخ کرنش در هر مرحله از آنالیز عددی محاسبه می‌شود. همچنین، افزایش دما در طی تغییر فرم با فرض تبدیل کل کار پلاستیک به گرما با استفاده از رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود [۸].



شکل ۶ جزئیات مراحل محاسبه تنش عددی با دو روش



شکل ۸ مقایسه نتایج تجربی، گرفته شده از مرجع [۸] و نتایج عددی برای فولاد ۱۰۱۸

جدول ۳ نتایج ثابت‌های بهینه به دست آمده برای فولاد ۴۳۴۰ با دو روش

| پارامتر                              | $۱۷۰۰\text{ s}^{-1}$  |                     | $۳۶۰۰\text{ s}^{-1}$ |                     |
|--------------------------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
|                                      | روش اول*              | روش دوم**           | روش اول*             | روش دوم**           |
| ثابت C                               | $۰/۰۰۸۶۵۸ \pm ۰/۰۰۰۱$ | $۰/۰۰۹۴ \pm ۰/۰۰۰۱$ | $۰/۰۱۲۵۳ \pm ۰/۰۰۰۱$ | $۰/۰۱۲۵ \pm ۰/۰۰۰۱$ |
| ثابت m                               | $۰/۹۳۲۵ \pm ۰/۰۰۲$    | $۰/۸۷۴۴ \pm ۰/۰۰۱۱$ | $۰/۹۵۹۱ \pm ۰/۰۰۰۳$  | $۰/۹۱۸ \pm ۰/۰۰۱$   |
| انحراف معیار (SD) (MPa)              | $۳۱/۶ \pm ۰/۱$        | $۲۲/۷ \pm ۰/۱$      | $۳۱/۰ \pm ۰/۵$       | $۳۰/۳ \pm ۰/۵$      |
| فاکتور کیفیت استخراج ثوابت ( $R^2$ ) | $۰/۸۰۷۱$              | $۰/۹۷۹۶$            | $۰/۸۲۹۲$             | $۰/۹۵۹۳$            |

\* فرض نرخ کرنش ثابت در حین تست

\*\* فرض نرخ کرنش متغیر در حین تست

جدول ۳ نشان می‌دهد کاربرد روش دوم به جواب دقیق‌تری منتهی شده است، زیرا فاکتور  $R^2$  در این حالت بهبود پیدا کرده است. به‌هرحال در صورت نبود جزئیات مربوط به تغییرات کرنش نسبت به زمان، ناگزیر باید با قبول اندکی خطا از روش اول استفاده شود. برای نمونه ارائه شده در جدول ۳ این خطا حدود ۱۸ درصد برای نرخ کرنش ۱۷۰۰ بر ثانیه و حدود ۱۴ درصد برای نرخ کرنش ۳۶۰۰ بر ثانیه است.

در شکل ۹ افزایش دمای یکی از سه نمونه فولاد ۱۰۱۸، در تغییر فرم نهایی آن، نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است تغییرات شدید دمای در قسمت‌های مختلف این نمونه مشاهده می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که بیشترین افزایش دما برای نمونه‌های ۲، ۴ و ۸ میلی‌متری فولاد ۱۰۱۸ به ترتیب ۲۴۶، ۲۰۸ و ۱۶۹ درجه کلوین است.

## ۵- نتایج و بحث

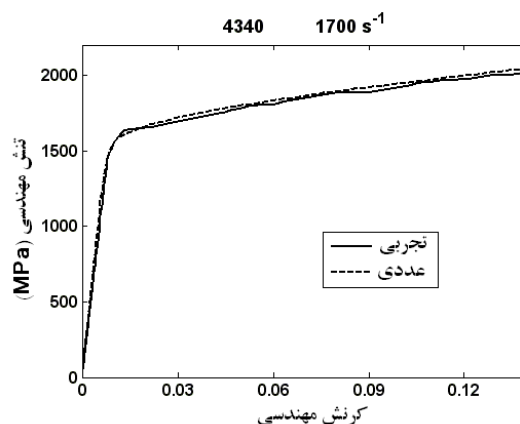
روندی که در بخش قبلی معرفی شد به کار گرفته می‌شود تا ثابت‌های مدل مادی جانسون-کوک برای دو فولاد ۱۰۱۸ و ۴۳۴۰ استخراج شود. نتایج ثابت‌های بهینه به دست آمده با استفاده از روش دوم (نرخ کرنش متغیر) در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲ نتایج ثابت‌های بهینه به دست آمده برای دو فولاد مختلف با روش دوم

| پارامتر                                      | فولاد ۱۰۱۸          | فولاد ۴۳۴۰          |
|--|---------------------|---------------------|
| ثابت C                                       | $۰/۰۳۸۷ \pm ۰/۰۰۰۳$ | $۰/۰۱۰۸ \pm ۰/۰۰۰۱$ |
| ثابت m                                       | $۰/۶۲۱۹ \pm ۰/۰۰۰۲$ | $۰/۸۸۳۲ \pm ۰/۰۰۲۹$ |
| انحراف معیار (SD) (MPa)                      | $۳۵/۲ \pm ۰/۵$      | $۳۹/۲ \pm ۰/۶$      |
| میانگین فاکتور کیفیت استخراج ثوابت ( $R^2$ ) | $۰/۸۶۳۴$            | $۰/۹۴۸۲$            |

نمودارهای تنش-کرنش تجربی و عددی مربوط به نمونه با طول ۴ میلی‌متر فولاد ۱۰۱۸ و نرخ کرنش ۱۷۰۰ بر ثانیه فولاد ۴۳۴۰ در شکل ۷ و ۸ نشان داده شده است.

به منظور بررسی اثر ثابت فرض کردن نرخ کرنش در تعیین ثابت‌های مادی، این ثوابت برای فولاد ۴۳۴۰ و با استفاده از دو روش ارائه شده در بخش ۴ محاسبه شده است. نتایج به دست آمده در جدول ۳ ارائه شده است.



شکل ۷ مقایسه نتایج تجربی، گرفته شده از مرجع [۹] و نتایج عددی برای فولاد ۴۳۴۰

هنگامی که متغیرهای ورودی یک تابع دارای خطا باشند، درصدی خطا در متغیر خروجی آن نیز وارد خواهد شد. برای بررسی میزان تأثیر خطای موجود در متغیرهای ورودی در عدم دقت خروجی تابع، باید از مفهوم مشتق جزئی استفاده نمود [۱۷]. لذا خطای تنش تسلیم در مدل جانسون-کوک ناشی از دو پارامتر  $C$  و  $m$  توسط رابطه (۱۳) محاسبه می‌گردد.

$$\delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial C} \delta C + \frac{\partial\sigma}{\partial m} \delta m \quad (13)$$

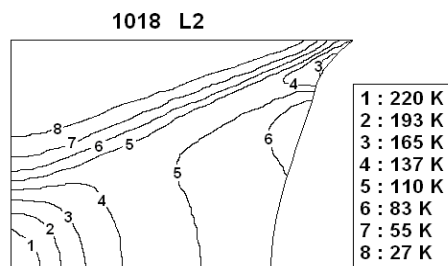
عبارت‌های  $\delta$  خطای مربوط به هر یک از پارامترها هستند و مشتقات جزئی، شدت تأثیر هر یک از این خطاها را در خطای پارامتر اصلی ( $\sigma$ ) نشان می‌دهند. این مشتقات جزئی پارامترهای حساسیت نامیده می‌شوند. هر چه اندازه پارامترهای حساسیت بزرگ‌تر باشد به این معناست که خطای مربوط به دو پارامتر  $C$  و  $m$  تأثیر بیشتری در خطای پارامتر  $\sigma$  دارد. ثابت فرض نمودن نرخ کرنش در روش اول موجب ایجاد درصدی خطا نسبت به روش دوم در محاسبه پارامترهای  $C$  و  $m$  می‌شود. با توجه به نتایج جدول ۳ می‌توان مقادیر خطا را مطابق جدول ۴ محاسبه نمود.

جدول ۴ خطای پارامترهای  $C$  و  $m$  و خطای تنش تسلیم مدل جانسون-کوک برای فولاد ۴۳۴۰

| پارامتر              | $1700 \text{ s}^{-1}$   |                       | $3600 \text{ s}^{-1}$ |              |
|----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|
|                      | روش اول                 | روش دوم               | روش اول               | روش دوم      |
| ثابت $C$             | $0.008658$              | $0.0094$              | $0.01253$             | $0.0125$     |
|                      | $\pm 0.0001$            | $\pm 0.0001$          | $\pm 0.0001$          | $\pm 0.0001$ |
| ثابت $m$             | $0.9325$                | $0.8744$              | $0.9591$              | $0.918$      |
|                      | $\pm 0.002$             | $\pm 0.0011$          | $\pm 0.003$           | $\pm 0.001$  |
| $\delta_m$           | $-0.055 \sim -0.0612$   | $-0.371 \sim -0.451$  |                       |              |
| $\delta_C$           | $0.000942 \sim 0.00542$ | $0.00017 \sim 0.0023$ |                       |              |
| $\delta\sigma$ (MPa) | $-4.32 \sim -34.02$     | $-7.37 \sim -32.52$   |                       |              |

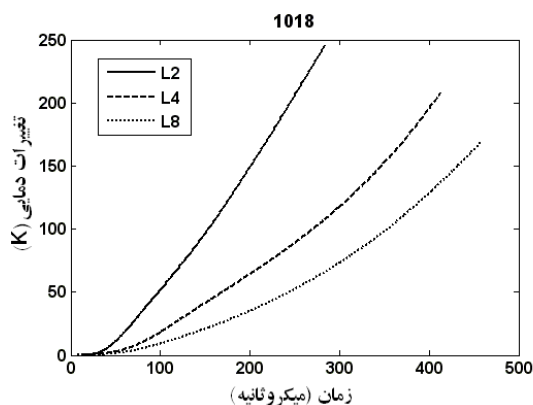
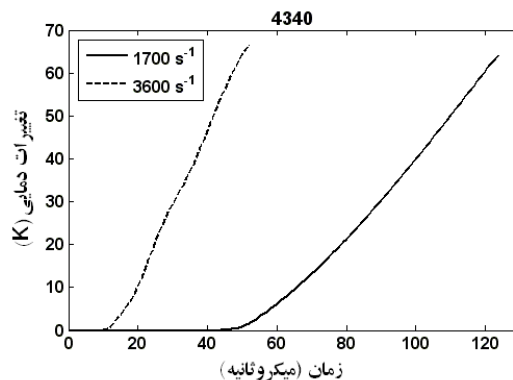
\* پارامترهای حساسیت (مشتقات جزئی) به ازای کرنش‌های بین ۰ تا ۱، نرخ کرنش‌های بین ۰ تا ۵۰۰۰ بر ثانیه و دماهای بین ۲۹۸ تا ۵۴۴ کلوین محاسبه شده است.

در ادامه، مقادیر پارامترهای حساسیت  $\partial\sigma/\partial m$  و  $\partial\sigma/\partial C$  به ازای شرایط مختلف کرنش، نرخ کرنش و دما مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مقاله، از حساسیت نرمالیزه استفاده



شکل ۹ افزایش دمای نهایی نمونه ۲ میلی‌متری فولاد ۱۰۱۸

در مورد تغییرات دمایی در نمونه‌های فولاد ۴۳۴۰، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در این نمونه‌ها، تغییرات محسوسی در نقاط مختلف نمونه مشاهده نمی‌شود؛ به طوری که اختلاف بیشترین و کمترین دمای مشاهده‌شده در نمونه مدل‌شده در نرخ کرنش ۱۷۰۰ بر ثانیه حدود ۰/۳ و در نرخ کرنش ۳۶۰۰ بر ثانیه حدود ۰/۴ درجه سانتی‌گراد است. در نتیجه فرض یکسان بودن دما در سرتاسر نمونه تست میله هاپکینسون فشاری فرض دقیقی است. شکل ۱۰ نمودار ماکزیمم تغییر دمای مشاهده‌شده در هریک از نمونه‌ها را برحسب زمان تحلیل عددی نشان می‌دهد.



شکل ۱۰ بیشترین تغییرات دمای نمونه‌ها برحسب زمان با استفاده از تحلیل عددی



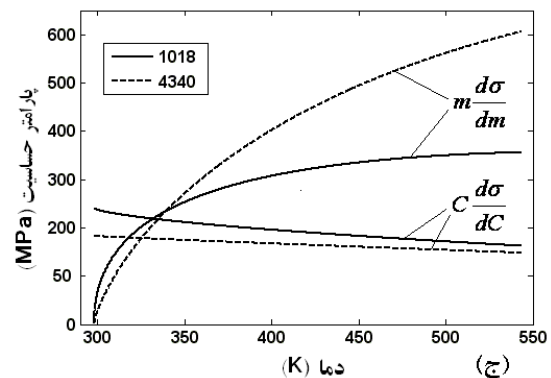
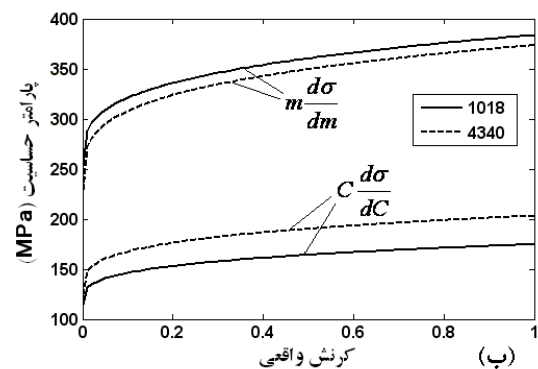
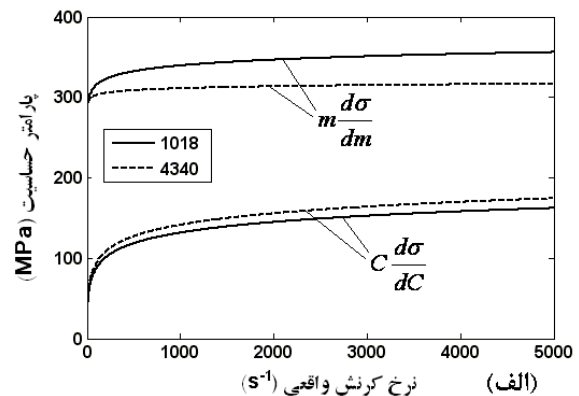
محاسبات نشان می‌دهد که حساسیت تنش نسبت به ثابت  $m$  (یعنی  $\partial\sigma/\partial m$ ) قبل از نرمالیزه کردن، به ازای تغییرات نرخ کرنش، کرنش و دما، کمتر از حساسیت تنش نسبت به ثابت  $C$  (یعنی  $\partial\sigma/\partial C$ ) است. نمودار شکل ۱۱-الف نشان می‌دهد که حساسیت تنش نسبت به ثوابت  $C$  و  $m$  در محدوده نرخ کرنش‌های ۱۰۰۰ تا ۵۰۰۰ بر ثانیه، با افزایش نرخ کرنش تغییرات چشمگیری ندارد. لذا می‌توان ثوابت  $C$  و  $m$  به دست آمده برای یک نرخ کرنش معین در این بازه را با تقریب قابل قبولی برای کل بازه به کار برد. مقایسه نمودار شکل ۱۱-ب) با شکل ۱۱-الف) نیز نشان می‌دهد که میزان حساسیت تنش نسبت به دو ثابت  $C$  و  $m$  در ازای افزایش کرنش، رفتاری شبیه به حساسیت نسبت به افزایش نرخ کرنش دارد. با توجه به اینکه نمودار شکل ۱۱-ب) به ازای کرنش‌های بین ۰ تا ۱ به دست آمده است، می‌توان نتیجه گرفت که افزایش کرنش، در مقایسه با افزایش نرخ کرنش، اثر شدیدتری بر پارامترهای حساسیت دارد؛ به عبارت دیگر، افزایش اندکی در میزان کرنش می‌تواند موجب افزایش قابل توجهی در پارامترهای حساسیت گردد. اما نمودار شکل ۱۱-ج) حاکی از افزایش سریع میزان حساسیت تنش نسبت به پارامتر  $m$  (یعنی  $\partial\sigma/\partial m$ ) به ازای افزایش دماست. این نمودار نشان می‌دهد که کاربرد ثابت مادی  $m$  در محدوده تغییرات دمایی زیاد، نسبت به دمای آزمایش، خطای زیادی به همراه خواهد داشت.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله، ثابت‌های مدل مادی جانسون-کوک، برای توصیف رفتار فولاد، بر اساس نتایج به دست آمده از تست میله هایپوکی‌نسون موجود در مراجع استخراج شد. نتایج تجربی با استفاده از یک روند بهینه‌سازی به دو روش آنالیز شد که وجه تمایز این دو روش ثابت فرض کردن نرخ کرنش در حین تست میله هایپوکی‌نسون است. پارامترهای بهینه برای مدل مادی جانسون-کوک با مینیمم کردن انحراف معیار تنش‌های تجربی و عددی به دست آمد. نتایج نشان می‌دهد که:

- ثابت فرض کردن نرخ کرنش در حین تست منجر به قبول خطای قابل ملاحظه‌ای می‌شود؛ برای نمونه‌های مورد بررسی در این مقاله در استخراج ثابت‌های مدل مادی جانسون-کوک حداقل خطای مشاهده شده در محدوده نرخ کرنش مورد مطالعه در حدود ۱۴ درصد است.

شده است که به صورت حاصل ضرب مشتق نسبی تنش تعریف شده با مدل مادی جانسون-کوک در مقدار ثابت مادی متناظر تعریف می‌شود. این کار به منظور نزدیک شدن محدوده پارامترهای حساسیت انجام شده است. برای هر یک از پارامترهای حساسیت، ثابت‌های بهینه، که در جدول ۲ ارائه شده است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل ۱۱ تغییرات پارامترهای حساسیت را نسبت به نرخ کرنش، کرنش و دما نشان می‌دهد.



شکل ۱۱ تغییرات پارامترهای حساسیت نسبت به کرنش، نرخ کرنش و دما

- Computational Materials Science*, Vol. 44, 2008, pp. 339-346.
- [8] Sasso M., Newaz G., Amodio, D., "Material Characterization at High Strain Rate by Hopkinson Bar Tests and Finite Element Optimization", *Materials Science and Engineering A*, Vol. 487, 2008, pp. 289-300.
- [9] Song B., Chen W., Antoun B. R., Frew D. J., "Determination of Early Flow Stress for Ductile Specimens at High Strain Rates by using a SHPB", *Experimental Mechanics*, Vol. 47, 2007, pp. 671-679.
- [10] Meyers M. A., *Dynamic Behavior of Materials*, New York, Wiley, 1994.
- [11] Liang R., Khan A. S., "A Critical Review of Experimental Results and Constitutive Models for BCC and FCC Metals over a Wide Range of Strain Rates and Temperatures" *International Journal of Plasticity*, Vol. 15, 1999, pp. 963-980.
- [12] Meyers M. A., Benson D. J., Vöhringer O., Kad B. K., Xue Q., Fu H. H., "Constitutive Description of Dynamic Deformation: Physically-Based Mechanisms", *Materials Science and Engineering A*, Vol. 322, 2002, pp. 194-216.
- [13] Johnson G. R., Cook W. H., "A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures", *Seventh International Symposium on Ballistics*, Hague, 1983.
- [14] Banerjee B., "The Mechanical Threshold Stress Model for Various Tempers of AISI 4340 Steel", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, 2007, pp. 834-859.
- [15] Marquardt D. W., "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Non-Linear Parameters", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 11, 1963, pp. 431-441.
- [16] Sedighi M., Khandaei M., Shokrollahi H., "An Approach in Parametric Identification of High Strain Rate Constitutive Model Hsing Hopkinson Pressure Bar Test Results" *Materials Science and Engineering A*, Vol. 527, No. 15, 2010, pp. 3521-3528.
- [17] Dieck R. H., *Measurement Uncertainty: Methods and Applications*, 3<sup>rd</sup> Ed., New York, ISA: The Instrumentation Systems and Automation Society, 2002.
- تحلیل دمایی نمونه‌های فولادی نشان داد که یکسان فرض کردن تغییرات دمایی در سرتاسر نمونه‌ها، به‌ویژه در نرخ کرنش‌های بالا و تست‌های کششی، فرض غیرمعقولی است که منجر به بروز خطا در نتایج خواهد شد.
  - آنالیز حساسیت بر روی پارامترهای مدل جانسون-کوک نشان داد که کاربرد ثابت‌های مادی  $C$  و  $m$  در محدوده تغییرات دمایی زیاد، نسبت به دمای آزمایش، خطای زیادی به همراه خواهد داشت، ولی این ثابت‌ها را می‌توان با اطمینان بیشتری در نرخ کرنش‌های بالاتر به کار برد.

## ۷- مراجع

- [1] Sharpe W. N., Ed., *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*, New York, Springer, 2008.
- [2] Hopkinson B., "A Method of Measuring the Pressure Produced in the Detonation of High Explosives or by the Impact of Bullets" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, Vol. 213, 1914, pp. 437-456.
- [3] Kolsky H., "An Investigation of the Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading" *Proceedings of the Physical Society of London*, Vol. 62B, 1949, pp. 676-700.
- [4] Gray G. T., Classic Split-Hopkinson Pressure Bar Testing, in *ASM Handbook*, Vol. 8, H. Kuhn and D. Medlin, Editors, ASM Int., 2000, pp. 462-476.
- [5] Lee W. S., Lin C. F., "High-Temperature Deformation Behavior of Ti6Al4V Alloy Evaluated by High Strain-Rate Compression Tests" *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 75, 1998, pp. 127-136.
- [6] Gray G. T., Chen S. R., Wright W., Lopez M. F., "Constitutive Equations for Annealed Metals under Compression at High Strain Rates and High temperatures", Los Alamos National Laboratory Report: LA-12669-MS, 1994.
- [7] Chaparro B. M., Thuillier S., Menezes L. F., Manach P. Y., Fernandes, J. V., "Material Parameters Identification: Gradient-Based, Genetic and Hybrid Optimization Algorithms",