

## بررسی عددی انتقال حرارت و جرم در ماده متخلخل در حضور شار حرارتی بیوشیمیایی

محسن نظری<sup>۱\*</sup>، اسماعیل شاکری نژاد<sup>۲</sup>، محمدحسن کیهانی<sup>۳</sup>

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود  
۲- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود  
۳- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود  
\* شاهرود، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، nazari\_me@yahoo.com

**چکیده-** در این مقاله، به بررسی عددی انتقال حرارت جابه‌جایی در یک ماده متخلخل، در حضور شار حرارتی بیوشیمیایی، پرداخته می‌شود. در این بررسی، فرض می‌شود که محیط مورد نظر یک محیط متخلخل همگن بوده و از مدل دارسی برای معادله مومن‌توم استفاده می‌شود. محفظه حاوی ماده متخلخل شامل دو جزء غلظت بوده که جزء اول توده‌زیستی و جزء دوم ماده مصرفی است. ماده مصرفی توسط توده‌زیستی مصرف می‌شود. ضمن مصرف این ماده توسط توده‌زیستی، واکنش شیمیایی صورت گرفته، گرما تولید می‌شود که این گرما تابعی از تغییرات غلظت جزء مصرفی در محیط می‌باشد. برای تکمیل معادلات حاکم، از مدل مونود برای بیان نرخ غلظت‌های مصرفی و تولیدی استفاده می‌شود. گرمای تولیدی، نرخ رشد غلظت توده‌زیستی، نرخ مصرف ماده مصرفی، توزیع دما در حفره و عدد ناسلت محلی روی دیواره برای ضرایب تخلخل متفاوت، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که افزایش نسبت تخلخل در محیط مورد مطالعه، باعث افزایش گرمای تولیدی بیوشیمیایی در محفظه می‌شود.

**کلیدواژه‌گان:** انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد، توده زیستی، واکنش بیوشیمیایی، مدل مونود

## Heat and mass transfer in a porous enclosure in the presence of biochemical heat source

M. Nazari<sup>1\*</sup>, E. Shakeri Nejad<sup>2</sup>, M. H. Kayhani<sup>3</sup>

1- Assis. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran  
2- PhD Student, Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran  
3- Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran  
\* P. O. B. 361995161 Shahrood, nazari\_me@yahoo.com

**Abstract-** In the present study, natural convection in a porous cavity in the presence of a non-isothermal biochemical heat source is investigated numerically. The porous cavity is assumed to be homogenous and the Darcy model is used for the momentum equation. The porous cavity includes two species namely biomass and substrate. The heat source generated in the cavity is equal to the rate of consumption of the substrate by the biomass. The bio-chemical source in the energy equation is proportional to the generation rate of solute concentration governed by a Monod model. Heat generation in the porous media, the rate of consumption of a substrate by a biomass, temperature distribution in the cavity, and the local Nusselt number are analyzed completely. Increasing the porosity leads to an increase in the biochemical heat generation in the cavity.

**Keywords:** Free Convection, Biomass, Biochemical Heat Source, Monod Model

## ۱- مقدمه

بر معادلات حاکم بر مواد متخلخل، معادلات بیولوژیکی دیگری برای تکمیل مدل مورد نیاز است که در این بررسی از مدل مونود<sup>۱</sup> استفاده شده است. مدل مونود بیان‌کننده ارتباط بین میزان مصرف و رشد اجزاء در محیط است و تابعی از نسبت تخلخل محیط متخلخل می‌باشد. بدین معنی که هر چه ضریب تخلخل بیشتر باشد، به دلیل افزایش فضای خالی موجود در محیط، واکنش شیمیایی موجود در محیط با شدت بیشتری انجام شده و نرخ رشد و یا مصرف اجزاء شدت می‌گیرد. بررسی و تحلیل مواد زائد ارگانیکی از دیدگاه محیط زیست و همچنین تغذیه و رشد موجودات زنده در کودهای گیاهی یا فعالیت موجودات زنده در قسمتی از بافت‌های بدن از جمله کاربردهای این مطالعه است. از دیگر کاربردهای مسئله حاضر بررسی انتقال حرارت، انتقال جرم و فعالیت توده‌های زیستی در مواد زائد ارگانیکی است.

از جمله کارهای انجام‌شده در این زمینه، می‌توان به کار فادل<sup>[۱]</sup> در پروژه بررسی مواد زائد جمع‌آوری‌شده در یک منطقه کوهستانی در کالیفرنیا اشاره کرد که هدف از این پروژه بیان یک مدل ریاضی برای تولید و انتقال گاز و گرما در این مواد زائد بود. مدل حاصل ترکیبی از معادلات فرایندهای زیستی و دینامیک میکروبی‌های موجود در توده زباله در حالت ناپایا بود. مدل ارائه‌شده توسط فادل بر اساس قوانین حاکم فیزیکی، شیمیایی و فرایندهای زیستی در یک محیط متخلخل بوده و برگرفته از مدل مونود است. بیتاس و پوپ<sup>[۲]</sup> انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در یک محیط متخلخل دوبعدی با فرض عدم تعادل حرارتی را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش ضریب انتقال حرارت بدون بعد دمای دو فاز با هم برابر شده و فرض تعادل حرارتی فرض قابل قبولی است. ساتیامورتی و همکارانش<sup>[۳]</sup> جابه‌جایی آزاد در محفظه حاوی ماده متخلخل، که دمای دیواره‌های آن به صورت خطی تغییر می‌کنند، را مورد بررسی قرار دادند. مدل مورد بررسی آن‌ها از معادله دارسی-فورچهمیر تبعیت می‌کند. در بررسی آن‌ها، اثرات شرایط مرزی بر انتقال حرارت و جریان سیال، برای اعداد رایلی و دارسی مختلف، بیان شده است. مولفان به این نتیجه رسیدند که در حالتی که دیوار سمت چپ گرم و دیوار سمت راست سرد باشد، به دلیل وجود گردابه‌ها در حفره،

بررسی جریان سیال و انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل، به دلیل کاربردهای صنعتی فراوان، یکی از موضوعات بااهمیت در دهه اخیر بوده است. ماده متخلخل محیط غیرهمگنی است که بین ذرات تشکیل‌دهنده آن فضای خالی وجود دارد و سیال می‌تواند در این فضا حرکت کند. در مکانیک سیالات اجسام متخلخل، معادلات مونتوم یا بالانس نیروها به‌وسیله مشاهدات تجربی-عددی به‌دست می‌آیند و از لحاظ ریاضی به‌عنوان قانون دارسی شناخته می‌شوند. دارسی بر اساس آزمایش‌های تجربی نشان داد که سرعت متوسط سیال (سرعت دارسی) در مواد متخلخل با گرادیان فشار متناسب می‌باشد. قانون دارسی در سرعت‌های کم در تمام مواد متخلخل صادق است. با افزایش سرعت سیال، افت فشار در محیط متخلخل از حالت خطی خارج شده و به صورت مرتبه دو ظاهر می‌گردد و می‌بایست از جمله فورچهمیر به همراه دارسی استفاده کرد. در حالت‌هایی که اثرات لزجت قابل ملاحظه باشد، جمله بریکمن نیز به معادله دارسی اضافه می‌شود.

برای بیان معادله انرژی در محیط متخلخل، می‌توان از دو فرض تعادل و عدم تعادل حرارتی استفاده کرد. در حالت کلی، دمای محلی فاز سیال و جامد در محیط متخلخل یکسان نمی‌باشد که این حالت را اصطلاحاً عدم تعادل حرارتی محلی می‌نامند. در این حالت، معادلات انرژی برای هر دو فاز سیال و جامد به طور مجزا نوشته می‌شوند. این فرض در حالتی که سرعت سیال زیاد باشد یا یک منبع تولید گرمای داخلی در محیط متخلخل داشته باشیم استفاده می‌شود. در فرض تعادل حرارتی، دمای متوسط دو فاز برابر گرفته شده و از یک معادله انرژی موثر برای هر دو فاز استفاده می‌شود.

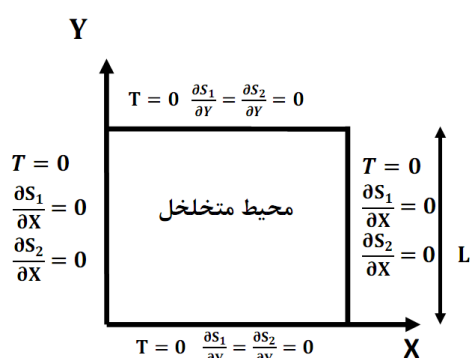
در این مطالعه، به بررسی فعالیت و رشد موجودات زنده در یک ماده متخلخل و تغذیه آن‌ها پرداخته می‌شود. مصرف مواد غذایی توسط این توده‌های زیستی به نحوی است که منجر به واکنش شیمیایی و در نتیجه تولید گرمای داخلی می‌شود. گرمای داخلی تولیدشده و تغییر احتمالی نسبت تخلخل در محیط متخلخل (به دلیل رشد محلی موجودات)، از جمله مواردی هستند که برای تحلیل دقیق مسئله نیاز به بررسی دارند. برای بیان نرخ مصرف و رشد اجزاء (توده زیستی و ماده مصرفی) به یک مدل بیولوژیکی نیاز داریم. به بیان دیگر، علاوه

1. Monod

بوده و تابعی از تغییرات غلظت در داخل محفظه می باشد. جهت تحلیل مسئله، فرض می شود که محیط متخلخل کاملاً همگن و ایزوتروپ بوده و دیواره های محفظه نفوذناپذیر می باشند. جریان سیال غیرپایدار و دوبعدی در نظر گرفته شده و از تقریب بوزینسک برای مدل کردن تغییرات دانسیته استفاده شده است.

## ۲- معادلات حاکم

هندسه و شرایط مرزی محیط مورد نظر در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱ شماتیک محفظه متخلخل حاوی توده زنده

محفظه دارای طول  $L$  بوده و دیواره های افقی و عمودی در دمای ثابت قرار دارند. از مدل داری برای معادله مومنتوم و از فرض تعادل حرارتی بین دو فاز، برای بیان معادله انرژی در محیط متخلخل، استفاده شده است.

مدل عدم تعادل حرارتی برای سرعت های بالای جریان یا برای حالت هایی که گرمای تولیدی داخلی در محیط داشته باشیم برقرار است، در غیر این صورت اختلاف دمای محلی سیال و جامد کوچک بوده و فرض تعادل حرارتی صادق است. در این مسئله، سرعت سیال پایین بوده و گرمای تولیدی داخلی نیز به دلیل ماهیت مسئله مقدار زیادی ندارد، لذا از مدل تعادل حرارتی استفاده شده است.

رابطه (۱) میزان رشد یک توده زیستی در محیط توسط مدل مونود [۱] را بیان می کند:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \frac{\mu_1^* S_1}{k_{S_1}^* + S_1} S_2 \\ \dot{S}_2 &= \left[ \frac{\mu_2^* S_1}{k_{S_2}^* + S_1} - K_D^* \right] S_2 \end{aligned} \quad (1)$$

نمودار ناسلت متوسط روی دیواره برای اعداد رایلی و داری بزرگ انحنای پیدا می کند.

بیاتس [۴] انتقال حرارت جابه جایی آزاد در یک محیط متخلخل با در نظر گرفتن گرمای تولیدی در فاز جامد را مورد بررسی قرار داد. در این بررسی از مدل عدم تعادل حرارتی برای معادلات انرژی استفاده شده است. نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان می دهد که وقتی ضریب انتقال حرارت در مقیاس حفره کوچک باشد، تبادل حرارت بین فازهای سیال و جامد نیز کم بوده و در نتیجه دمای جامد بزرگتر از دمای سیال است؛ بنابراین استفاده از فرض عدم تعادل حرارتی معتبر است. ورال، از تاپ و پوپ [۵] انتقال حرارت جابه جایی آزاد در محیط متخلخل دوبعدی با در نظر گرفتن فرض تعادل حرارتی برای بیان معادله انرژی، مدل داری برای بیان معادله مومنتوم و شرط مرزی سینوسی روی دیواره را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش دامنه شرط مرزی یا با کاهش نسبت طول به عرض حفره، انتقال حرارت روی دیواره افزایش می یابد. جاسمین و پرادهوم [۶] انتقال حرارت در محیط متخلخل به همراه فرایند بیوشیمیایی غیرهمدم را مورد بررسی قرار دادند. هدف از روش به کار گرفته شده توسط مولفان، تخمین شار حرارتی بیوشیمیایی در محیط متخلخل بوده است. سعید و پوپ [۷] انتقال حرارت جابه جایی آزاد در یک محیط متخلخل، با فرض تعادل حرارتی در حالت غیرپایا، را مورد تحلیل قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش عدد رایلی، زمان رسیدن به حالت پایا کوتاه تر می شود. تحقیقات فراوانی در مورد انتقال حرارت جابه جایی آزاد در یک محفظه بسته متخلخل، توسط نیلد و بیژن [۸] و همچنین وفایی [۹]، انجام شده است.

هدف از این مقاله، محاسبه گرمای تولیدی، تعیین روند پخش و جابه جایی توده زیستی/ ماده مصرفی و همچنین محاسبه دما در یک محیط متخلخل می باشد. هندسه مورد نظر یک محیط دوبعدی است که با ماده متخلخل اشباع پر شده و شامل توده زیستی و جزء مصرفی است. توده زیستی در محیط ثابت بوده و حرکت نمی کند. غلظت توده زیستی و جزء مصرفی توسط معادلات انتقال جرم بیان می شود و برای بیان نرخ رشد و مصرف آن ها از مدل مونود استفاده می شود. ضمن مصرف جزء مصرفی توسط توده زیستی، واکنش شیمیایی صورت گرفته، گرما تولید می شود. این تولید حرارت به صورت غیریکنواخت

محصولات تشکیل شده (ناشی از واکنش شیمیایی داخلی) درون سیال وجود دارند و با گذشت زمان ضریب تخلخل ثابت می ماند [۱۱]. از دیگر مدل های مرتبط با فعالیت توده های زیستی، می توان به کار فادل [۱] اشاره کرد. یک مدل ریاضی برای تولید و انتقال گاز و گرما در توده زباله توسط وی ارائه شده است. مدل حاصل ترکیبی از معادلات فرایندهای زیستی و دینامیک میکروبه های موجود در توده زباله در حالت ناپایا بود. تحلیل انتقال گرما و جرم در کودهای شیمیایی نیز می تواند از کاربردهای مهم دیگر مسئله حاضر باشد. بررسی انتقال حرارت و جرم در کودهای شیمیایی، که با تولید گرمای داخلی کنترل می شوند، به گونه ای است که یک رابطه قوی بین فعالیت توده زنده داخلی و میزان واکنش بیوشیمیایی وجود دارد.

معادلات بقای جرم، مومنتوم، انرژی و انتقال جرم برای جزء غلظت و توده زیستی در محیط متخلخل به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{g K \beta \partial T}{\nu \partial x} \quad (3)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \nabla^2 T + q(s) \quad (4)$$

$$\phi \frac{\partial s_1}{\partial t} + u \frac{\partial s_1}{\partial x} + v \frac{\partial s_1}{\partial y} = D_{m_1} \nabla^2 s_1 + \phi \left[ \frac{\mu_1^* s_1}{k_{s_1} + s_1} \right] s_2 \quad (5)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} = \left[ \frac{\mu_2^* s_1}{k_{s_2} + s_1} - K_D^* \right] s_2 \quad (6)$$

دو جمله آخر در معادلات انتقال جرم بیانگر رابطه مونود برای بیان مصرف و تولید  $s_1$  و  $s_2$  می باشد. همان گونه که قبلا ذکر شد، توده زیستی (با غلظت  $s_2$ ) در محیط ثابت است و از ماده مصرفی (با غلظت  $s_1$ ) تغذیه می کند.  $\beta$  ضریب انبساط حرارتی،  $\alpha$  ضریب پخش گرما،  $\nu$  ویسکوزیته سینماتیکی و  $\phi$  ضریب تخلخل است. برای بی بعد کردن معادلات حاکم از پارامترهای زیر استفاده می شود:

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{L}, \quad (U, V) = \frac{(u, v)L}{\alpha} \quad (7)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_{ref}}, \quad \tau = \frac{\alpha t}{\sigma L^2}, \quad S = \frac{s}{\Delta S_{ref}}$$

$$\Delta T_{ref} = -\frac{\Delta h_s \Delta S}{M_s (\rho c_p)_f} \quad (8)$$

پارامترهای ستاره دار در معادله (۱) ( $\mu_1^*, \mu_2^*, k_{s_1}^*, k_{s_2}^*, K_D^*$ ) اعداد بعدداری می باشند که در ادامه بحث به طور کامل تعریف خواهند شد.  $s_2$  غلظت توده زیستی و  $s_1$  غلظت ماده مصرفی (توسط توده زیستی) است. معادلات مونود برای بیان رشد یک توده زیستی یک رابطه کاملا تجربی است و بیانگر رابطه بین میزان مصرف و نرخ رشد توده زیستی می باشد. مدل های دیگری نیز برای بیان رشد و یا مصرف توده های زیستی وجود دارند [۱] که در این مقاله از مدل مونود برای توصیف بیولوژیکی مسئله استفاده شده است.

شبیه سازی هر واکنش شیمیایی که شامل فعالیت توده زیستی باشد وابسته به تغییرات انرژی آزاد شده در واکنش است [۱۰]. برای بررسی یک توده یا فعالیت موجودات زنده در یک محیط متخلخل به سه جزء نیاز داریم [۱۱]:

الف) غلظت فاز زیستی<sup>۱</sup>

ب) غلظت ماده مغذی یا ماده مصرفی<sup>۲</sup>

ج) سیال متحرک

یکی از مدل هایی که برای شبیه سازی واکنش شیمیایی حاصل از رشد موجودات زنده در محیط های متخلخل استفاده می شود، مدل مونود است. این مدل بسته به تعداد موجودات زنده موجود در محیط، به مدل های مونود ساده<sup>۳</sup>، دوتایی<sup>۴</sup> و یا چندتایی تقسیم می شود. در این بررسی، ما دو جزء غلظت داریم؛ یکی موجود زنده و دیگری ماده مغذی یا ماده مصرفی. بنابراین، به دلیل وجود یک موجود زنده در محیط، از مدل مونود ساده استفاده می شود. به عنوان نمونه، شفاهی و وفایی [۱۱] مدل مونود دوتایی را برای بررسی محیطی شامل دو موجود زنده و سه ماده مغذی مختلف استفاده کردند.

استفاده از مدل های مختلف مونود (ساده، دوتایی یا چندتایی)، وابسته به نحوه بیان معادلات حاکم بر فعالیت موجودات زنده در داخل محیط است. چهار مدل مختلف برای مدلسازی فعالیت توده زیستی وجود دارد. در مدل اول موجودات زنده با گذشت زمان رشد کرده و فضای محیط متخلخل را اشغال می کنند و در نتیجه ضریب تخلخل محیط کاهش می یابد. در سه مدل دیگر، موجودات زنده، ماده مغذی و

1. Microbial phase concentration
2. Nutrient phase concentration
3. Simplified Monod
4. Double Monod

$$\mu = \mu^* \frac{L^2 \phi}{\alpha_T}$$

$$K_S = \frac{K_S^*}{\Delta S} \quad K_D = \frac{K_D^* L^2 \phi}{\alpha_T} \quad (16)$$

که  $\mu$  حداکثر نرخ رشد مخصوص<sup>۱</sup>،  $K_S$  ثابت اشباع<sup>۲</sup> و  $K_D$  ثابت میزان مرگومیر<sup>۳</sup> در مدل موند می‌باشند.

مطالعات نشان می‌دهد که معادلات موند می‌تواند حالت‌های

ترمودینامیکی را بسیار خوب تفسیر کند. لایو و همکارانش [۱۰] اثبات کردند که ثابت اشباع ( $K_S$ ) در معادلات موند عکس ثابت تعادل در واکنش شیمیایی رشد میکروبه‌هاست و به دلیل بزرگ بودن ثابت تعادل، ثابت اشباع خیلی کوچک است.

شرایط مرزی و اولیه در حالت بدون بعد به صورت زیر است:

$$\tau = 0 \quad U = V = \theta = \psi = 0, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 2.5 \times 10^{-2}$$

$$\tau > 0 \quad \theta(0, Y) = \theta(1, Y) = 0, \quad \theta(X, 0) = \theta(X, 1) = 0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial X}(0, Y) = \frac{\partial S_2}{\partial X}(0, Y) = 0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial X}(1, Y) = \frac{\partial S_2}{\partial X}(1, Y) = 0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial Y}(X, 0) = \frac{\partial S_2}{\partial Y}(X, 0) = 0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial Y}(X, 1) = \frac{\partial S_2}{\partial Y}(X, 1) = 0 \quad (17)$$

غلظت توده زیستی در ابتدای حل برابر  $2.5 \times 10^{-2}$  و غلظت جزء مصرفی در محیط برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود. با گذشت زمان و شروع انتقال حرارت جابه‌جایی و  $S_1$  و رشد  $S_2$  در محیط، غلظت جزء مصرفی در محیط تغییر کرده و به صفر می‌رسد. در حالت واقعی، گرمای تولیدشده در محیط با میزان واکنش‌های انجام‌شده (به دلیل تغییر غلظت جزء مصرفی) متناسب است [۱]. می‌توان فرض کرد که گرمای تولیدی برابر مصرف جزء غلظت توسط توده زیستی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q(\dot{S}_1, \dot{S}_2) = w \dot{S}_1(S_1, S_2) = w \left[ \frac{-\mu_1 S_1}{K_{S1} + S_1} \right] S_2 \quad (18)$$

در رابطه بالا،  $w$  ثابت تناسب است که در واکنش‌های گرماده برابر ۱- می‌باشد. معادلات ذکرشده، با مفهوم فرایند زیستی

که  $M_s$  و  $\Delta h_s$  آنتالپی واکنش و وزن ملکولی جزء غلظت می‌باشند. همان‌طور که می‌دانیم مدل داری در محیط‌های متخلخل، با سرعت پایین برقرار است. در مسئله مورد بحث که می‌تواند مرتبط با انتقال حرارت و جرم در کودهای شیمیایی باشد، به دلیل پایین بودن عدد رینولدز، استفاده از مدل داری برای معادله مومنتوم فرض درستی است. معادلات بدون بعد نیز به صورت زیر است:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + Q(S_1, S_2) \quad (11)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial S_1}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial S_1}{\partial Y} = \frac{1}{Le} \left( \frac{\partial^2 S_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y^2} \right) + \dot{S}_1 \quad (12)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S_2}{\partial \tau} = \dot{S}_2 \quad (13)$$

که در این حالت  $X$  و  $Y$  مختصات بدون بعد افقی و عمودی بوده و  $U$  و  $V$  مولفه‌های سرعت بدون بعد در این راستاها می‌باشند.  $\theta$  نشان‌دهنده دمای بدون بعد در داخل میدان محاسباتی می‌باشد. سایر اعداد بدون بعد به شرح زیر است:

$$Ra = \frac{gK\beta L \Delta T}{\alpha \nu} \quad Le = \frac{\alpha}{D_m} \quad \varepsilon = \frac{\phi}{\sigma} \quad (14)$$

که  $Le$  و  $Ra$  به ترتیب عدد لوپس و عدد رایلی می‌باشند. عدد لوپس یکی از اعداد بدون بعد مهم در مسائل دارای تغییرات غلظت بوده و به صورت نسبت ضریب هدایت گرما به ضریب نفوذپذیری غلظت تعریف می‌شود.  $\dot{S}_1$ ،  $\dot{S}_2$  در رابطه (۱۲) و (۱۳) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\dot{S}_1 = \left[ \frac{\mu_1 S_1}{K_{S1} + S_1} \right] S_2$$

$$\dot{S}_2 = \left[ \frac{\mu_2 S_1}{K_{S2} + S_1} - K_D \right] S_2 \quad (15)$$

دیگر پارامترها نیز به صورت زیر تعریف می‌گردند:

1. Maximum specific growth rate constant
2. Half saturation constant
3. Death rate constant

جدول ۲ مقادیر پارامترهای بعددار به کار برده شده [۱۲]

$0.001/h$	$K_D^*$
$1/22/h$	$\mu^*$
$10^2$ میلی گرم بر لیتر	$K_S^*$
$10^5$ میلی گرم بر لیتر	$\Delta S$
$0.1$ متر	$L$

جدول ۳ مقادیر پارامترهای بی بعد به کار برده شده

نسبت تخلخل	$Le$	$\mu$	$K_S$	$K_D$
۰/۵	۷۴۲/۸۴	۳/۱۷۹۷	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲۶
۰/۷	۴۶۸/۵۳	۷/۰۵۷۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۵۷۸
۰/۷۵	۴۰۰	۸/۸۵	۰/۰۰۱	۰/۰۰۷۲۶
۰/۸	۳۳۱/۴۲	۱۱/۴۰۳۰	۰/۰۰۱	۰/۰۰۹۳

توجه به این نکته ضروری است که پارامترهای تعریف شده در جدول ۳ تابع نسبت تخلخل هستند و باید در هر نسبت تخلخل به طور جداگانه محاسبه شوند.

### ۳- بحث در نتایج

شکل ۲ گرمای تولیدی بیوشیمیایی در مرکز حفره بر حسب زمان را نشان می دهد. با توجه به شکل، با افزایش زمان، گرمای تولیدی در داخل محیط متخلخل افزایش یافته و به یک مقدار ماکزیمم می رسد، سپس مقدار آن به صفر کاهش می یابد. هر چه ضریب نسبت تخلخل در داخل محفظه بیشتر باشد، گرمای تولیدی در داخل ماده متخلخل نیز افزایش می یابد. تغییرات زمانی گرمای بیوشیمیایی تولیدی تابعی از میزان غلظت دو جزء در داخل ماده متخلخل است. تولید گرما در محیط نتیجه یک واکنش شیمیایی است که این واکنش شیمیایی نتیجه مصرف جزء غلظت (ماده مصرفی) توسط توده زیستی است. با گذشت زمان، غلظت توده زیستی بیشتر شده و در نتیجه مقدار بیشتری از جزء ثانویه را مصرف می کند. به همین دلیل، واکنش با شدت بیشتری ادامه پیدا کرده و در نتیجه گرمای بیشتری در محیط تولید می شود. از آنجایی که جزء مصرفی (موجود در محیط) محدود است، این اتفاق تا جایی ادامه می یابد که جزء ثانویه به طور کامل مصرف شود و غلظت آن به صفر برسد. در این لحظه، گرمای تولیدی در محیط به صفر می رسد و باعث ایجاد یک ناپیوستگی در نمودار گرما می شود. اگر ماده مصرفی موجود در محیط نامحدود باشد، نمودار گرمای تولیدی به طور

غیرهمدمنا منطبق بوده و توسط تولید گرمای داخلی کنترل می شود. عدد ناسلت محلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Nu = \left( - \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0,1} \quad (19)$$

معادلات حاکم بر جریان (۹) تا (۱۳) به همراه شرایط مرزی (۱۷)، با استفاده از روش حجم محدود، در یک شبکه یکنواخت  $101 \times 101$  گسسته سازی شده اند. جملات جابه جایی با استفاده از روش آپویند و جمله تابع زمان معادلات انرژی و انتقال جرم، با استفاده از روش کاملاً ضمنی، گسسته سازی می شوند. جهت حل معادلات جبری، از تکرار خط به خط و الگوریتم توماس بهره گرفته شده است. میزان تکرار تا موقعی ادامه پیدا می کند که میزان خطا در همه متغیرها به  $10^{-5}$  برسد. حل عددی به صورت غیر پایاست و گام زمانی به کار رفته  $\Delta \tau = 10^{-3}$  می باشد. شرط توقف دستگاه معادلات به صورت زیر است:

$$\frac{\sum_{i,j} |\xi_{i,j}^m - \xi_{i,j}^{m-1}|}{\sum_{i,j} |\xi_{i,j}^m|} \leq 10^{-5} \quad (20)$$

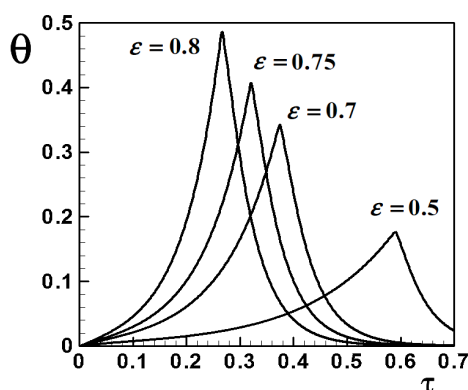
که در رابطه بالا  $\xi$  بیانگر متغیرهای  $\psi, \theta$  می باشد و  $m$  مرتبه تکرار است. در جدول ۱ عدد ناسلت محلی بر روی دیواره سمت چپ و در مرکز آن بر حسب تعداد گره نشان داده شده است. همان گونه که مشخص است، نتایج به دست آمده از حل عددی مستقل از تعداد شبکه می باشد.

جدول ۱ مقادیر ناسلت محلی روی دیواره سمت چپ و در مرکز آن بر حسب تعداد گره

تعداد گره	$ Nu_y $
۳۵	۰/۰۴۵۳۷۶
۷۵	۰/۰۴۴۶۱۸
۱۰۱	۰/۰۴۳۹۳۸
۱۲۱	۰/۰۴۳۳۵

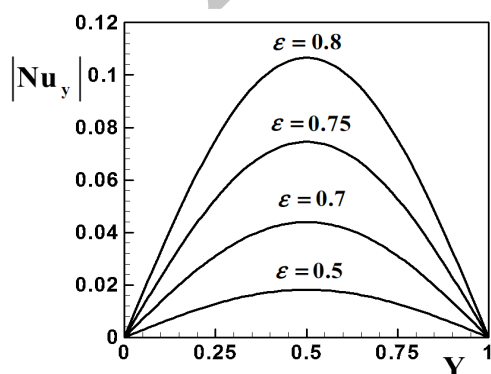
مسئله برای مقادیر ارائه شده در جداول ۲ و ۳ شبیه سازی می شود. با استفاده از مقادیر جدول ۲ و با توجه به اینکه معادلات حاکم برای چهار ضریب تخلخل مختلف مورد بررسی قرار می گیرند، اعداد بدون بعد برای این چهار حالت به صورت جدول ۳ می باشند.



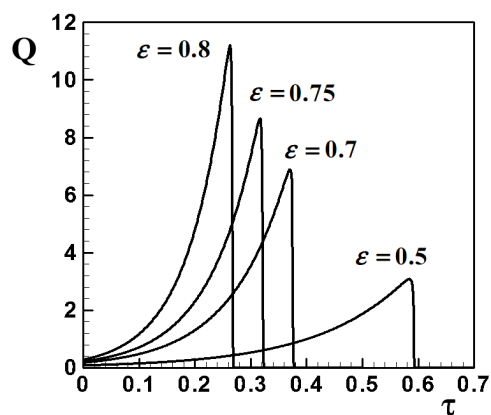


شکل ۳ دما در مرکز حفره در حالت غیر پایا

شکل ۴ مقادیر عدد ناسلت محلی روی دیواره را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، بیشترین مقدار انتقال حرارت در قسمت میانی دیواره می‌باشد. با توجه به اینکه در مطالعه حاضر عدد رایلی خیلی کوچک است، در نتیجه مرتبه بزرگی انتقال حرارت جابه‌جایی عملاً کوچک می‌باشد (هدف، بررسی پروسه واکنش شیمیایی و گرمای تولیدی است)؛ پس عامل تغییر دما در محیط ترم‌های هدایت و تغییر دما در اثر گرمای تولیدی می‌باشد. حال از آنجایی که گرمای تولیدی در کل محیط یکسان است، انتقال حرارت هدایت (با توجه به شرایط مرزی) باعث می‌شود که دما در مرکز ماکزیمم شود، در نتیجه عدد ناسلت هم این گونه است. هر چه ضریب تخلخل بیشتر باشد، مقادیر عدد ناسلت بیشتر خواهد شد. در شکل ۵ نرخ مصرف و تولید دو جزء برای مقادیر جدول ۳ در مرکز حفره ارائه شده است. مقادیر منفی  $\dot{S}_1$  به معنی مصرف جزء مصرفی و مقادیر مثبت  $\dot{S}_2$  به معنی رشد توده زنده می‌باشد. در حالت پایا، نرخ مصرف و تولید به صفر می‌رسد.

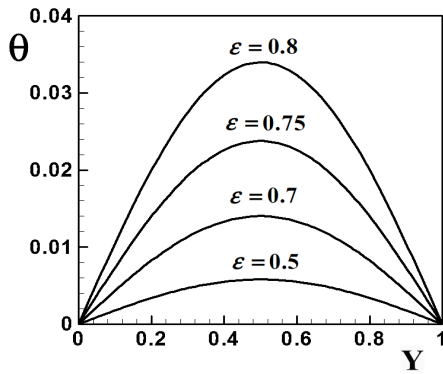
شکل ۴ مقادیر ناسلت محلی روی دیواره در زمان  $\tau = 0.5$ 

پیوسته افزایش یافته و مقدار بیشینه‌ای برای آن وجود ندارد. همان گونه که ذکر شد، بیشینه مقدار نمودار گرمای تولیدی در محیط ناشی از از بین رفتن کامل جزء مصرفی است. توجه شود که به دلیل وابستگی مدل نمودار به ضریب تخلخل، زمان صرف شدن گرمای تولیدی برای نسبت تخلخل‌های مختلف متفاوت است. با توجه به روابط، مقیاس زمانی به کار برده شده در مسئله  $\sigma L^2 / \alpha$  می‌باشد که  $\alpha = k / \rho c_p$  و ضریب هدایت در محیط متخلخل به صورت  $k = \phi k_f + (1 - \phi) k_g$  تعریف می‌شود. این مقیاس زمانی تابعی از نسبت تخلخل محیط است و با تغییر نسبت تخلخل، زمان لازم برای رسیدن به حالت تعادل تغییر می‌کند. علاوه بر این، هر چه نسبت تخلخل افزایش یابد، از حجم ذرات جامد کم می‌شود (فضای خالی بیشتری در محیط داریم) و واکنش شیمیایی با شدت بیشتری انجام خواهد شد؛ در نتیجه نرخ گرمای تولیدی بیشتر می‌شود. از طرف دیگر، با گذشت زمان شیب نمودار گرما ( $Q$ ) افزایش یافته و تابعیت آن نسبت به زمان کم می‌شود. شکل ۳ نیز دما را در مرکز حفره در حالت ناپایا برای مقادیر جدول ۳ نشان می‌دهد. به دلیل افزایش گرمای تولیدی در زمان‌های اولیه، دما نیز در مرکز حفره با گذشت زمان افزایش می‌یابد و به یک مقدار ماکزیمم می‌رسد. از آنجایی که منبع گرمای بیوشیمیایی در یک زمان مشخص به صفر می‌رسد، بنابراین دما در داخل ماده متخلخل، بعد از مدتی با گذشت زمان، کاهش خواهد یافت. به دلیل وابستگی مدل نمودار به ضریب تخلخل، با افزایش نسبت تخلخل، نرخ انجام واکنش شیمیایی و در نتیجه گرمای تولیدی و همچنین دما در محیط افزایش می‌یابد.



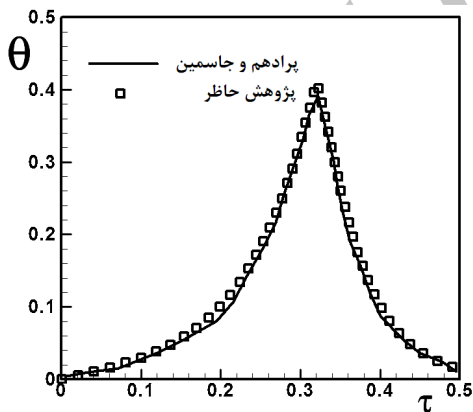
شکل ۵ گرمای تولیدی بیوشیمیایی در مرکز حفره بر حسب زمان برای نسبت تخلخل‌های مختلف

متخلخل، میزان رشد و مصرف توده‌ها در ماده متخلخل و همچنین گرمای تولیدی ناشی از واکنش شیمیایی دارد. افزایش نسبت تخلخل در محیط مورد مطالعه باعث افزایش گرمای تولیدی بیوشیمیایی در محفظه می‌شود.



شکل ۷ دما در خط عمودی گذرنده از مرکز حفره در زمان  $\tau = 0.5$

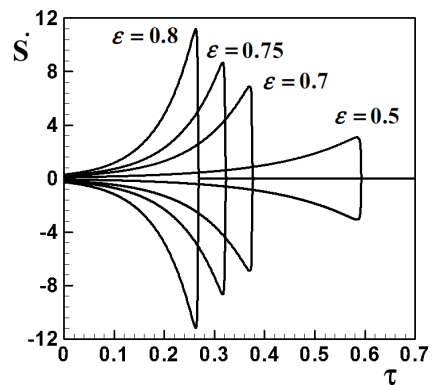
برای معتبرسازی نتایج به‌دست آمده، نمودار دما در مرکز حفره (به‌ازای مقادیر جدول ۳)، در حالت خاصی که نسبت تخلخل برابر ۰/۷۵ است، با مقادیر حاصل از حل عددی پرادهوم و جاسمین [۱۲] مقایسه شده است. همان‌گونه که مشخص است، اختلاف بین نتایج بسیار ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است.



شکل ۸ نمودار دما و گرمای تولیدی در مرکز حفره برای حالت سوم از مقادیر جدول ۳

#### ۴- نتیجه‌گیری

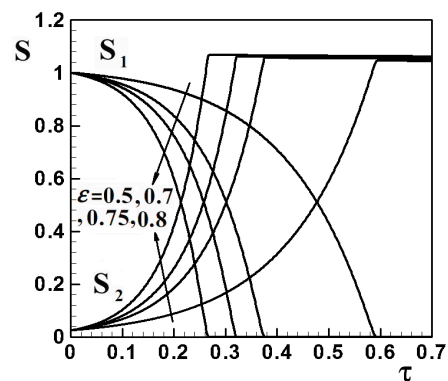
در این مسئله، انتقال حرارت جابه‌جایی در یک ماده متخلخل در حضور شار حرارتی بیوشیمیایی بررسی شد. محیط مورد بررسی یک محیط متخلخل همگن است که شامل دو جزء



شکل ۵ غلظت در مرکز حفره در حالت پایا برای توده زنده و ماده مصرفی

همان‌گونه که ذکر شد، به دلیل وابستگی مدل مونود به ضریب تخلخل، با افزایش نسبت تخلخل، نرخ انجام واکنش شیمیایی و در نتیجه نرخ مصرف جزء مصرفی و نرخ رشد توده زنده بیشتر خواهد شد.

شکل ۶ مقادیر غلظت جزء مصرفی و توده زنده در مرکز حفره را برای مقادیر مختلف نسبت تخلخل، بر حسب زمان، نشان می‌دهد. همان‌گونه که انتظار می‌رود، مصرف یک جزء با زمان با رشد جزء دیگر کاملاً متناسب است. در شکل ۷ می‌توان تغییرات دما را در خط عمودی واقع در مرکز حفره در زمان  $\tau = 0.5$  مشاهده کرد. با توجه به شکل، بیشترین مقدار دما مربوط به مرکز حفره می‌باشد.



شکل ۶ مقادیر غلظت جزء مصرفی و توده زنده در مرکز حفره بر حسب زمان

همان‌گونه که مشخص است، نسبت تخلخل به عنوان یک پارامتر اثرگذار در این فرایند بیوشیمیایی می‌باشد. نسبت تخلخل اثر قابل ملاحظه‌ای بر روی حداکثر دما در محیط



- [3] Sathiyamoorthy M., Tanmay B., Roy S., Pop I., "Steady Natural Convection Flow in a Square Cavity Filled with a Porous Medium for Linearly Heated Side Wall(s)", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, 2007, pp. 1892-1901.
- [4] Baytas A. C., "Thermal Non-Equilibrium Natural Convection in a Square Enclosure Filled with Generating Solid Phase: Non-Darcy Porous Media", *Int. J. of Energy Research*, Vol. 27, No. 10, 2003, pp. 975-988.
- [5] Varol Y., Oztop H. F., Pop I., "Numerical Analysis of Natural Convection for a Porous Rectangular Enclosure with Sinusoidally Varying Temperature Profile on the Bottom Wall", *Int. J. of Heat Mass Transfer*, Vol. 35, 2008, pp. 56-64.
- [6] Jasmin S., Prud'homme M., "Inverse Determination of a Heat Source from a Solute Concentration Generation Model in Porous Medium", *Int. Comm. in Heat Mass Transfer*, Vol. 32, 2005, pp. 43-53.
- [7] Saeid N. H., Pop I., "Transient Free Convection in a Square Cavity Filled with a Porous Medium", *Int. J. of Heat Mass Transfer*, Vol. 47, 2004, pp. 1917-1924.
- [8] Nield A., Bejan A., *Convection in Porous Media*, New York, Springer, 3<sup>rd</sup> ed., 2006.
- [9] Vafai K., Hadim H. A., *Handbook of Porous Media*, New York, Marcel Dekker, 2000.
- [10] Liu Y., Lin Y., Yang S., "A Thermodynamic Interpretation of the Monod Equation", *Current Microbiology*, Vol. 46, No. 3, 2003, pp. 233-234.
- [11] Shafahi M., Vafai K., "Biofilm Affected Characteristics of Porous Structures," *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, 2009, pp. 574-581.
- [12] Prud'homme M., Jasmin S., "Inverse Solution for a Biochemical Heat Source in a Porous Medium in the Presence of Natural Convection" *Chemical Engineering Science*, Vol. 61, No. 5, 2006, pp. 1667-1675.

غلظت بوده که جزء اول توده زیستی و جزء دوم ماده مصرفی است. ماده مصرفی توسط توده زیستی مصرف می‌شود. ضمن مصرف این ماده توسط توده زیستی، واکنش شیمیایی صورت گرفته، گرما تولید می‌شود. در این مقاله، ضمن استفاده از یک مدل بیوشیمیایی (مدل مونود)، گرمای تولیدی، نرخ رشد غلظت توده زیستی، نرخ مصرف ماده مصرفی، توزیع دما در حفره و عدد ناسلت محلی روی دیواره برای ضرایب تخلخل متفاوت، مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج به‌دست آمده بیانگر اثر مهم نسبت تخلخل در این فرایند بیوشیمیایی می‌باشد. نسبت تخلخل بر روی حداکثر دما در محیط متخلخل، میزان رشد و مصرف توده‌ها و به‌خصوص گرمای تولیدی ناشی از واکنش شیمیایی تاثیر می‌گذارد. افزایش نسبت تخلخل در محیط مورد مطالعه باعث افزایش گرمای تولیدی بیوشیمیایی در محفظه می‌شود. این گرمای تولیدی اثر بسیار مهمی در کنترل فرایندهای بیوشیمیایی دارد. از جمله کارهای آینده، می‌توان به بررسی نسبت تخلخل متغیر با مکان، جهت کنترل فرایند، اشاره کرد که توسط مولفان در حال بررسی است.

## ۵- مراجع

- [1] El-Fadel M., Findikakis A. N., Leckie J. O., "Numerical Modeling of Generation and Transport of Gas and Heat in Landfill I: Model Formulation", *Waste Management and Research*, Vol. 14, 1996, pp. 483-504.
- [2] Baytas A. C., Pop I., "Free Convection in a Square Porous Cavity using a Thermal Nonequilibrium Model," *Int. J. of Thermal Science*, Vol. 41, No. 9, 2002, pp. 861-870.