http://mechanics.journals.modares.ac.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

دوره ۱۲ شماره ۳ شهریور ۱۳۹۱ ص‌ص ۱۱-۲۶

تاریخچه مقاله:
دریافت ۹۰/۱۱/۶
پذیرش ۹۱/۲/۱
ارائه در سایت ۹۱/۵/۳۰

مقایسهٔ تئوریهای تغییرشکل و نموی در تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک مستطیلی به کمک روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته

مهدی معارفدوست[۱]، مهران کدخدایان[۲*]

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
۲- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد
* مشهد، کدپستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۴۴، kadkhoda@um.ac.ir

چکیده- در این مقاله کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک مستطیلی به‌وسیلهٔ تئوری‌های تغییرشکل (DT) و نموی (IT) در پلاستیسیته تحلیل شده و نتایج تحت بارها و شرایط مرزی متنوع مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرند. بار به‌صورت صفحه‌ای و به‌صورت کششی و فشاری یکنواخت وارد می‌شود. ماده مورد استفاده AL7075T6 و هندسه مورد نظر صفحه $0.01 \le h/a \le 0.05$ می‌باشد. روش عددی به‌کار گرفته شده روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته است. اثرات ضریب بار، ضخامت و شرایط مرزی مختلف بر ضریب کمانش، در تحلیل دو تئوری نموی و تغییرشکل مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در صفحات نازکتر همخوانی خوبی بین جواب‌های به‌دست آمده از هر دو تئوری پلاستیسیته وجود دارد که با افزایش ضخامت صفحه، اختلاف قابل ملاحظه‌ای میان بارهای کمانشی به‌دست آمده از دو تئوری بوجود می‌آید. نتایج به‌دست آمده با سایر نتایج گزارش شده مقایسه گردیده و علاوه بر آن برای برخی حالات نیز نتایج جدیدی ارائه شده است. در مورد محدودهٔ اعتبار تئوری‌های مذکور و همچنین اختلاف آنها با یکدیگر نتایج جدیدی به‌دست آمده است.

کلیدواژگان: صفحات مستطیلی، روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته، کمانش الاستوپلاستیک، تئوری تغییرشکل، تئوری نموی.

A comparison between the incremental and deformation theories to analyze elastoplastic buckling of thin rectangular plates by GDQ method

M. Maarefdoust[1], M. Kadkhodayan[2*]

1- PhD Student of Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Iran
2- Prof. of Mech. Eng., Ferdowsi Univ. of Mashhad, Iran
* P.O.Code 9177948944, Mashhad, Iran. kadkhoda@um.ac.ir

Abstract- In this paper elastoplastic buckling of thin rectangular plates are analyzed with deformation theory (DT) and incremental theory (IT) and the results are investigated under different loads and boundary conditions. Load is applied in plane and in uniform tension and compression form. The used material is AL7075T6 and the plate geometry is $0.01 \le h/a \le 0.05$. The Generalize Differential Quadrature method is employed as numerical method to analyze the problem. The influences of loading ratio, plate thickness and various boundary conditions on buckling factor were investigated in the analysis using both incremental and deformation theories. In thin plates the results obtained from both plasticity theories are close to each other, however, with increasing the thickness of plates a considerable difference between the buckling loads obtained from two theories of plasticity is observed. The results are compared with those of others published reports. Moreover, for some different situations new results are presented. Some new consequences are achieved regarding the range of validation of two theories.

Keywords: Rectangular Plates, GDQM, Elastoplastic Buckling, Deformation Theory, Incremental Theory.

۱- مقدمه

در دهه‌های گذشته مسأله کمانش پلاستیک صفحات مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است. آنها مسأله محاسبه بار کمانشی صفحات را معمولا با روشهای پلاستیسیته مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند.

دوربان در تحقیقاتش دریافت که تئوری نموی نسبت به تئوری تغییرشکل بار کمانشی بیشتری را پیش‌گویی می‌کند و نتایج آزمایشگاهی با تئوری تغییرشکل همخوانی بیشتری دارند [۱]. هرچند مواردی وجود دارند که بار بحرانی به‌دست آمده از هر دو تئوری کاملا مشابه هم هستند که به ویژه در مورد پوسته‌های سیلندری شکل تحت بار فشاری محوری این مسأله صادق است [۲]. دوربان و زوکرمن تحلیل الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی تحت بار کششی (فشاری) محوری را برای چندین حالت مختلف تکیه‌گاهی به روش جداسازی متغیرها انجام دادند و اولین نتایج مسأله کمانش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی را گزارش کردند. اما شرایط مرزی محدود در این گزارش شامل (تکیه‌گاه گیردار و ساده) داده‌های به‌دست آمده در آن را محدود کرده است [۳]. در صورتی‌که تمامی تکیه‌گاه‌ها گیردار باشند حل معادلات امکان‌پذیر نمی‌باشد و باید از روش‌های عددی کمک گرفته شود. در مطالعهٔ حاضر سعی شده که این محدودیت‌ها توسط روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته، برداشته شود و مسأله برای حالات مختلف حل شود. وانگ و همکارانش کمانش الاستیک-پلاستیک صفحات ضخیم و نازک را بر اساس تئوری تغییرشکل (DT) و تئوری نموی (IT) بررسی کردند. آنها به این نتیجه رسیدند که نه تنها تئوری تغییرشکل مقدار فاکتور تنش کمانشی کمتری را محاسبه می کند، بلکه با افزایش ضخامت و ثابت رامبرگ ازگود اختلاف نتایج بین دو تئوری پلاستیسیته افزایش می‌یابد [۵،۴]. محققان تحقیقات زیادی روی این مسأله انجام داده‌اند، با این حال کماکان علت قطعی وجود اختلاف بین نتایج به‌دست آمده از دو تئوری تغییرشکل پلاستیک و تئوری نموی هنوز موضوع بررسی مطالعات جاری است.

در این مقاله سعی شده است تا به کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته (GDQ) مسأله کمانش پلاستیک صفحات مستطیلی مورد مطالعه قرار گیرد و موضوع اختلاف نتایج بین دو تئوری مورد بررسی دقیقتری قرار گیرد و برخی عوامل مؤثر بر آن شناسایی گردند. علاوه بر آن، تحلیل مسأله برای حالات مختلف شرایط مرزی که در گذشته انجام نشده است، تعمیم داده شود.

۲- معادلات دیفرانسیل حاکم

معادلات حاکم بر تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی در مرجع [۶] آمده است. شکل ۱ هندسه حاکم بر صفحه مستطیلی ایزوتروپیک الاستیک تحت بارهای لبه محوری را نشان می‌دهد. a طول، b عرض و h ضخامت صفحه را نشان می دهند. تنش به‌صورت یکنواخت $\sigma_y = p$ و $\sigma_x = -\xi p$ (ξ ضریب بار است) وارد می‌شود. $\xi = 0$ برای حالت فشاری تک محوری و $\xi = -1$ برای حالت فشاری دو محوری مساوی یکنواخت در نظر گرفته شده است.

معادلات سرعت برای صفحات نازک به‌صورت (۱) می‌باشند:

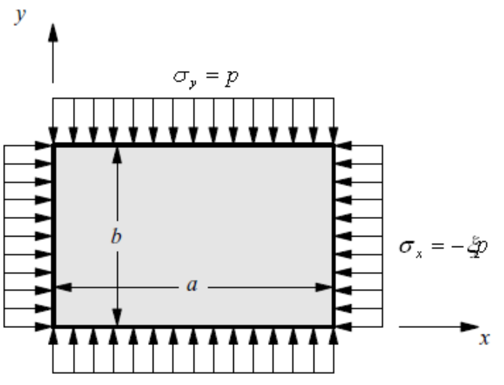
$$\upsilon_x = u - z\frac{\partial w}{\partial x},\ \upsilon_y = \upsilon - z\frac{\partial w}{\partial y},\ \upsilon_z = w \qquad (۱)$$

و رابطه بین نرخ تنش و نرخ کرنش در صفحات نیز به‌صورت (۲) است:

$$\dot{\sigma}_{xx} = E\left(\alpha\dot{\varepsilon}_{xx} + \beta\dot{\varepsilon}_{yy}\right)\ \dot{\sigma}_{yy} = E\left(\beta\dot{\varepsilon}_{xx} + \gamma\dot{\varepsilon}_{yy}\right)\ \dot{\tau}_{xy} = 2G\dot{\varepsilon}_{xy} \qquad (۲)$$

که در آن E و G مدول الاستیک و مدول برشی مؤثر می‌باشند. α ، β ، γ و مدول برشی مؤثر به نوع تئوری پلاستیسیته بکار گرفته شده وابسته هستند.

در مطالعهٔ حاضر از دو تئوری معروف در پلاستیسیته شامل تئوری نموی با معادلات پایه پرانتل-رس و تئوری تغییرشکل با معادلات پایه هنکی استفاده می‌شود.



شکل ۱ هندسه مسأله

الف- تئوری نموی (IT) با معادلات پایه پرانتل-رس

معادله اساسی این تئوری عبارتست از [۶]:

$$E\,\dot{\varepsilon}_{ij} = (1+\upsilon)\dot{S}_{ij} + \frac{1-2\upsilon}{3}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{3\dot{\sigma}_e}{2\sigma_e}\left(\frac{E}{T}-1\right)S_{ij} \tag{۳}$$

در این رابطه S_{ij} تانسور تنش انحرافی و T مدول یانگ تانژانتی می‌باشند که با استفاده از منحنی تنش-کرنش به‌دست می‌آیند و σ_e تنش مؤثر است. T و σ_e از رابطهٔ (۴) به‌دست می‌آیند:

$$T = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e}$$
$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 \tag{۴}$$

که ε_e کرنش مؤثر کل می‌باشد. ضرایب α ، β، γ و مدول برشی در این روش عبارتند از:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\left[4-3\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{\sigma_1^2}{\sigma_e^2}\right]$$
$$\beta = \frac{1}{\rho}\left[2-2(1-2\upsilon)\frac{T}{E}-3\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2}\right]$$
$$\gamma = \frac{1}{\rho}\left[4-3\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{\sigma_2^2}{\sigma_e^2}\right]$$
$$\rho = (5-4\upsilon)-(1-2\upsilon)^2\frac{T}{E}-3(1-2\upsilon)\left(1-\frac{T}{E}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2}$$
$$\frac{E}{G} = 2(1+\upsilon). \tag{۵}$$

ب- تئوری تغییر شکل (DT) با معادلات پایه هنکی

معادله اساسی این تئوری عبارتست از [۵]:

$$E\,\dot{\varepsilon}_{ij} = \left(\frac{3E}{2S}-\frac{1-2\upsilon}{2}\right)\dot{S}_{ij} + \frac{1-2\upsilon}{3}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{3\dot{\sigma}_e}{2\sigma_e}\left(\frac{E}{T}-\frac{E}{S}\right)S_{ij} \tag{۶}$$

که در آن S مدول یانگ سکانتی است که با استفاده از منحنی تنش-کرنش به‌دست می‌آید. ضرایب α، β، γ و مدول برشی سکانتی در این روش به‌صورت رابطهٔ (۷) می‌باشند:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\left[4-3\left(1-\frac{T}{S}\right)\frac{\sigma_1^2}{\sigma_e^2}\right]$$
$$\beta = \frac{1}{\rho}\left[2-2(1-2\upsilon)\frac{T}{E}-3\left(1-\frac{T}{S}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2}\right]$$
$$\gamma = \frac{1}{\rho}\left[4-3\left(1-\frac{T}{S}\right)\frac{\sigma_2^2}{\sigma_e^2}\right]$$
$$\rho = 3\frac{E}{S}+(1-2\upsilon)\left[2-(1-2\upsilon)\frac{T}{E}-3\left(1-\frac{T}{S}\right)\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2}\right]$$
$$\frac{E_s}{G_s} = 2(1+\upsilon_s)\,,\ \upsilon_s = \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\upsilon\right)\frac{S}{E} \tag{۷}$$

معادله حاکم بر کمانش ورقهای نازک عبارت است از [۶]:

$$\alpha\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(\beta+\mu)\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2} + \gamma\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = -\frac{12}{h^2}\left(\frac{\sigma_1}{E}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\sigma_2}{E}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \tag{۸}$$

حال اگر $X = \frac{x}{a}$ ،$Y = \frac{y}{b}$ ،$\lambda = \frac{a}{b}$ ،$\sigma_2 = p$ ،$\sigma_1 = -\xi p$ و $\mu = \frac{1}{1+\upsilon}$ آنگاه معادله (۸) به‌صورت (۹) در می‌آید:

$$\alpha\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2(\beta+\mu)\lambda^2\frac{\partial^4 W}{\partial X^2\partial Y^2} + \gamma\lambda^4\frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \frac{12a^2P}{h^2E}\left(\xi\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \lambda^2\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}\right) \tag{۹}$$

۳- شرایط مرزی حاکم

شرایط مختلف تکیه‌گاهی عبارتند از [۶]:

- *تکیه‌گاه ساده در* $X=0$ و $X=a$

$$W=0,\ \alpha\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta\lambda^2\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \tag{۱۰}$$

در $Y=0$ و $Y=b$

$$W=0,\ \gamma\lambda^2\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \beta\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \tag{۱۱}$$

- *تکیه‌گاه یکسر گیردار در* $X=0$ و $X=a$

$$W=0,\ W_{,X}=0 \tag{۱۲}$$

و در $Y=0$ و $Y=b$

$$W=0,\ W_{,Y}=0 \tag{۱۳}$$

- *تکیه‌گاه آزاد در* $X=0$ و $X=a$

شرایط تکیه‌گاهی آزاد به کمک مرجع [۶] به‌صورت زیر استخراج گردیده است:

$$\alpha\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \beta\lambda^2\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0$$
$$\alpha\frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (\beta+2\mu)\lambda^2\frac{\partial^3 W}{\partial X\partial Y^2} = \frac{12\sigma_x a^2}{Eh^2}\xi\frac{\partial W}{\partial X} \tag{۱۴}$$

و در $Y=0$ و $Y=b$

$$\gamma\lambda^2\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \beta\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0$$
$$\lambda^2\gamma\frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + (\beta+2\mu)\frac{\partial^3 W}{\partial X^2\partial Y} = -\frac{12\sigma_y a^2}{Eh^2}\frac{\partial W}{\partial Y} \tag{۱۵}$$

دوربان و زوکرمن [۳] شرایط مرزی SSSS, SCSC و CSCS را بررسی کردند. در مطالعهٔ حاضر علاوه بر تأیید

حالات فوق، حالت‌های SCCC, CCCC, CSFS, SSFS, SFSF و CFCF مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

۴- روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته

روش مربعات دیفرانسیلی (روش یک چهارم تفاضلی) روش ساده و کارایی در حل مسائل مهندسی می‌باشد. اولین بار در سال ۱۹۷۱، بلمن و کاستی [۷] آن را به‌عنوان یک تکنیک جدید برای حل عددی مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیلی معمولی و پاره‌ای، مطرح کردند. هدف آنها ارائه یک راه‌حل جدید برای فائق شدن بر مشکلات پایداری و حجم محاسبات مسائل عددی بود.

اولین کاربرد این روش در زمینهٔ مسایل مهندسی توسط برت و مالیک [۸] صورت گرفت، هنگامی‌که مسائل مقدار مرزی در حالت دو بعدی خطی و یک بعدی غیر خطی مورد بررسی قرار گرفتند. مزیت دستیابی به یک حل دقیق با کمترین محاسبات انجام شده نسبت به روش‌های حل عددی دیگر نظیر المان محدود و یا جا به جایی محدود باعث شده است که کارایی این روش تدریجاً آشکار شود و گسترش یابد. این روش توانایی حل معادلات دیفرانسیل از درجات بالا را با انتخاب نقاط کم دارد. از ویژگی‌های دیگر آن می‌توان به‌سادگی در کاربرد و برنامه‌نویسی و همچنین سرعت همگرایی بالا اشاره کرد.

در این روش شبکه‌بندی به‌صورت تبدیل ناحیهٔ حل به مجموعه ای از نقاط به نام گره انجام می‌پذیرد. در اینجا مقدار مشتق تابع f در هرگره نسبت به یک راستای مشخص (بطور مثال x) را به‌صورت مجموع خطی وزن دار از مقادیر تابع در تعدادی نقاط در آن راستا، بیان می‌کند. بیان ریاضی تعریف فوق را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\left.\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial x^r}\right|_{(x1,y1)} = \sum_{k=l}^{m_r} C_{ik}^{(r)}.f(x_k,y_f) \qquad (۱۶)$$

برای مشتق‌گیری در راستای y و مشتق مرکب، قوانین روش مربعات دیفرانسیلی به شکل رابطهٔ (۱۷) بیان می‌شوند:

$$\left.\frac{\partial^r f(x,y)}{\partial y^r}\right|_{(x1,y1)} = \sum_{\ell=l}^{m_r} C_{f\ell}^{(s)} f(x_i,y_\ell)$$
$$\left.\frac{\partial^{(r+s)} f(x,y)}{\partial x^r \partial y^r}\right|_{(x1,y1)} = \sum_{k=l}^{m_r} C_{ikt}^{(r)}.\sum_{\ell=l}^{n_y} C_{j\ell}^{(s)} f(x_i,y_\ell) \qquad (۱۷)$$

وزن‌ها در روابط فوق، در قالب ماتریس C به نام ماتریس ضرایب وزنی بیان شده‌اند و اندیس‌های γ و s نشانگر مرتبهٔ مشتق‌گیری و ماتریس ضرایب مربوط می‌باشند.

به‌منظور استخراج ماتریس ضرایب وزنی، تابع مطلوب در هر راستا توسط توابعی تقریب زده می‌شوند که این توابع تقریب به نام توابع آزمایش شناخته می‌شوند و شرط انتخاب این توابع، کامل بودن آنهاست. به این معنی که توابع آزمایش باید حالت یکنواختی از متغیرهای میدانی را بیان کنند و تا بالاترین مرتبه‌ای که در معادلهٔ حاکم بر مسأله ظاهر شده، قابلیت مشتق‌گیری داشته باشند.

توابع میانیاب لاگرانژ به‌عنوان توابع آزمایش، فرمول‌های صریحی را برای به‌دست آوردن ماتریس ضرائب ارائه کرده‌اند. در این فرمول‌ها ضرایب وزنی بطور مستقیم و دقیق، مستقل از تعداد و موقعیت گره‌ها، حاصل می‌شوند. فرمول‌های ارائه شده توسط شو و ریچارد، به‌واسطهٔ بیان یک رابطهٔ بازگشتی برای محاسبه ماتریس ضرایب در مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر، مورد توجه بیشتری قرار گرفته‌اند. در این فرمول‌ها مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس ضرایب برای مشتق مرتبهٔ اول به‌صورت رابطهٔ (۱۸) بیان می‌شوند:

$$C_{kk}^{(l)} = \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_k)\prod(x_k)}$$
$$i,k = 1,2,\ldots,n_x \;,\qquad i \neq k$$
$$\prod(x_i) = \prod_{\substack{m=1\\ m\neq l}}^{n_x}(x_i - x_m) \qquad (۱۸)$$

مؤلفه‌های غیر قطر اصلی ماتریس در مشتق‌های مراتب بالاتر، توسط رابطهٔ بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_{ik}^{(r)} = r\left(C_{ii}^{(r-l)}.C_{ik}^{(l)} - \frac{C_{ik}^{(r-l)}}{x_i - x_k}\right) \quad i,k = 1,2,\ldots,$$
$$i \neq k \;,\; 2 \leq r \leq (n_x - 1) \qquad (۱۹)$$

و اعضای قطر اصلی نیز به‌صورت رابطهٔ (۲۰) تعریف می‌شوند:

$$C_{ii}^{(r)} = -\sum_{\substack{m=l\\ m\neq l}}^{m_i} C_{im}^{(r)}$$
$$i = 1,2,\ldots,n_x \;,\; 1 \leq r \leq (n_x - 1) \qquad (۲۰)$$

به‌منظور تعیین ماتریس ضرایب در مشتق‌های مرتبه بالاتر، می‌توان از رابطهٔ بازگشتی (۲۱) استفاده کرد:

$$\left[C^{(r)}\right] = \left[C^{(1)}\right]\left[C^{(r-1)}\right],\; 2 \leq r \leq (n_x - 1) \qquad (۲۱)$$

با توجه به اینکه وزن‌ها بر اساس تعداد و موقعیت گره‌ها حاصل می‌شوند می‌توان به این نکته پی برد که موقعیت و تعداد گره‌ها، که به آنها نقاط نمونه نیز گفته می‌شود، نقش مهمی در دقت نتایج نهایی ایفا می‌کنند. تاکنون قواعد زیادی جهت محاسبه

نقاط نمونه ارائه شده است که تعدادی از آنها در ذیل نشان داده شده‌اند.

$$x_i = 1 + 2\frac{i-1}{n-1}\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (۱-۲۲)$$

$$x_i = -\cos\frac{i-1}{n-1}\pi\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (۲-۲۲)$$

$$x_i = \frac{i-1}{n-3}\ ,\ i = 3, \ldots\ldots, n-2 \qquad (۳-۲۲)$$

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{i-1}{n-3}\pi)\ ,\ i = 3, \ldots\ldots, n-2 \qquad (۴-۲۲)$$

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{i-2}{n-3}\pi)\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n_x \qquad (۵-۲۲)$$

معروفترین این قواعد نقاط واقع بر صفرهای چند جمله‌ای چبیشف است. این نقاط توسط رابطهٔ (۲۳) محاسبه می‌شوند:

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{2i-1}{2n}\pi)\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (۲۳)$$

توزیع نقاط نمونه چبیشف-گوس-لوباتو دارای بیشترین سرعت همگرایی و بالاترین دقت می‌باشد که در این تحقیق نیز از این رابطه به شکل (۲۴) استفاده می‌شود:

$$x_i = \frac{1}{2}(1 - \cos\frac{i-1}{n-1}\pi)\ ,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad (۲۴)$$

در این روش، مرز مسأله تنها یک نقطه است و از نظر ریاضی نمی‌توان دو یا چند شرط مرزی را در این نقطه اعمال کرد. به‌منظور حل این مشکل و اعمال چندین شرط مرزی در هر لبه، محققان روش‌های مختلفی را پیشنهاد کرده‌اند. اولین و ساده‌ترین روش توسط جانگ و همکارانش ارائه شد. در این روش که به تکنیک δ معروف است، نقاطی با فاصله بسیار کم، $\delta \approx 10^{-5}$ (در مقیاس بدون بعد)، در همسایگی نقاط مرزی انتخاب شده، سپس معادلات مرزی به نقاط مرزی واقعی و نقاط δ اعمال می‌شوند. روش‌های دیگری نیز مبتنی بر یکپارچه‌سازی شرایط مرزی در ماتریس ضرایب و همچنین تعریف درجات آزادی اضافی توسط محققان پیشنهاد شده است. به کمک اعمال روش یک چهارم تفاضلی معادله حاکم بر سیستم (۹) و شرایط مرزی (۱۰-۱۵) به‌صورت رابطهٔ ۲۵ در می‌آید:

$$\alpha\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(4)} W_{kj} + 2(\beta+\mu)\lambda^2 \sum_{m=1}^{N_y} C_{jm}^{(2)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{2} W_{km}$$
$$+ \gamma\lambda^4 \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(4)} W_{ik} = \frac{12a^2 P}{h^2 E}(\xi \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} - \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(2)} W_{ik})$$
(۲۵)

- *تکیه‌گاه یکسرگیردار*

$$W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0$$
$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{1k}^{(1)} W_{kj} = \sum_{k=1}^{N_x} C_{Nk}^{(1)} W_{kj} = \sum_{k=1}^{N_y} C_{ik}^{(1)} W_{ik} = \sum_{k=1}^{N_y} C_{Nk}^{(1)} W_{ik} = 0$$

- *تکیه‌گاه ساده*

$$W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0$$
$$\alpha\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \beta\lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0$$
$$\beta\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \gamma\lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0$$

- *تکیه‌گاه آزاد* $X = 0\ ,\ X = 1$

$$\alpha\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \beta\lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0,\ i = 2, \ldots, N-1$$
$$(\beta+2\mu)\lambda^2 \sum_{m=1}^{N_y} C_{jm}^{(2)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{1} W_{km} + \alpha\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(3)} W_{kj} = \frac{12a^2\sigma_x}{h^2 E}\xi(\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(1)} W_{kj})$$

- *تکیه‌گاه آزاد* $Y = 0\ ,\ Y = 1$

$$\beta\sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(2)} W_{kj} + \gamma\lambda^2 \sum_{n=1}^{N_y} C_{jn}^{(2)} W_{in} = 0,\ i = 2, \ldots, N-1$$
$$(\beta+2\mu)\sum_{m=1}^{N_y} C_{jm}^{(1)} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{2} W_{km} + \lambda^2\gamma\sum_{k=1}^{N_y} C_{j}^{(}$$
$$- \frac{12a^2\sigma_y}{h^2 E}(\sum_{k=1}^{N_y} C_{jk}^{(1)} W_{ik})$$

حال معادله (۲۵) را می‌توان به‌صورت (۲۶) نوشت:

$$[M][W] = \frac{12Pa^2}{Eh^2}[N][W] \qquad (۲۶)$$

با توجه به اینکه معادله فوق یک معادله غیر خطی است (ضرایب به بار وابسته هستند) برای حل آن از روش تکرار استفاده می‌شود. با حل مقادیر ویژه معادله فوق، می‌توان مقدار P را محاسبه کرد. اکنون ضریب کمانش K به‌صورت رابطهٔ (۲۷) تعریف می‌شود:

$$K = \frac{12Pa^2(1-\nu^2)}{Eh^2\pi^2} = \frac{P(1-\nu^2)}{\alpha E}$$
$$\alpha = \frac{\pi^2 h^2}{12a^2} \qquad (۲۷)$$

که α نسبت ضخامت نامیده می‌شود.

۵- نتایج و بحث

ماده مورد استفاده در این تحقیق AL7075-T6 می‌باشد که به دلیل کاربرد زیاد آن در صنعت هوافضا انتخاب شده است. در اینجا از مدل رامبرگ- ازگود به شکل رابطهٔ (۲۸) استفاده شده است:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_e}{E} + k\left(\frac{\sigma_e}{E}\right)^n \qquad (۲۸)$$

که در آن ε کرنش پلاستیک کل و (n,k) خواص ماده هستند. مدول تانژانتی و سکانتی مورد استفاده در معادلات به شکل ذیل محاسبه می‌شوند:

$$\frac{E}{T} = 1 + nk\left(\frac{\sigma_e}{E}\right)^{n-1}$$
$$\frac{E}{S} = 1 + k\left(\frac{\sigma_e}{E}\right)^{n-1} \qquad (۲۹)$$

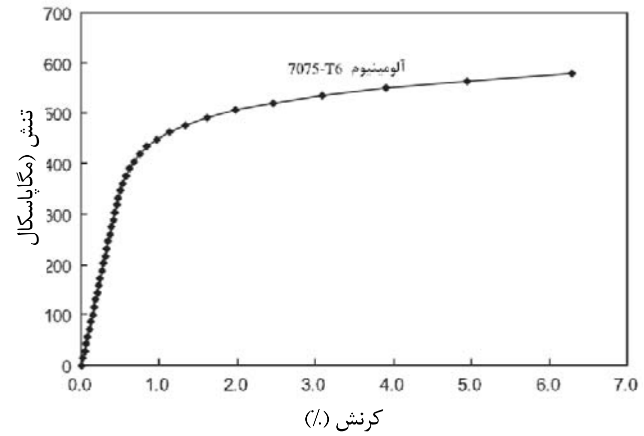
خصوصیات این فلز با استفاده از معادله (۲۸) در جدول ۱ آمده است. منحنی تنش-کرنش این فلز نیز در شکل ۲ نمایش داده شده است. برای تحلیل دقیق مسأله ابتدا به تعیین نقاط نمونه و حساسیت مش در تحلیل پرداخته می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۳ مشخص است تعداد سیزده مش در این مسأله در نظرگرفته شده است. جدول ۲ نشان می دهد که توزیع نقاط نمونه معادله (۲۴) دارای بالاترین دقت می‌باشد.

با توجه به اینکه دوربان و همکارانش قبلاً به‌صورت روش جداسازی متغیرها به تحلیل این مسأله پرداخته‌اند، ابتدا نتایج به‌دست آمده با مرجع [۳] مقایسه شده و سپس سایر نتایج جدید ارائه شده‌اند.

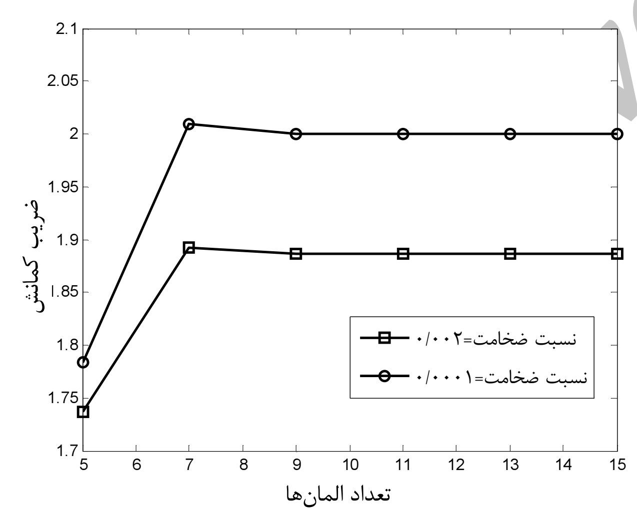
جدول ۱ خواص مواد در رابطه رامبرگ-ازگود [۳]

مدول یانگ	۷۲/۴ گیگاپاسکال
n	۱۰/۹
k	۳/۹۴×۱۰^۲۱
ضریب پواسون	۰/۳۲

منحنی ضریب بارگذاری (ξ) بر حسب ضریب کمانش (K) در نسبت‌های ضخامت (α) مختلف برای دو تئوری تغییرشکل و نموی و شرایط مرزی مختلف CSCS, SCSC, SSSS استخراج گردیده است که نتایج حاصل با نتایج مرجع [۳] همخوانی دارند، اشکال (۴،۹و۱۰). این نتایج برای صفحهٔ مربعی $\lambda = 1$ به‌دست آمده‌اند.



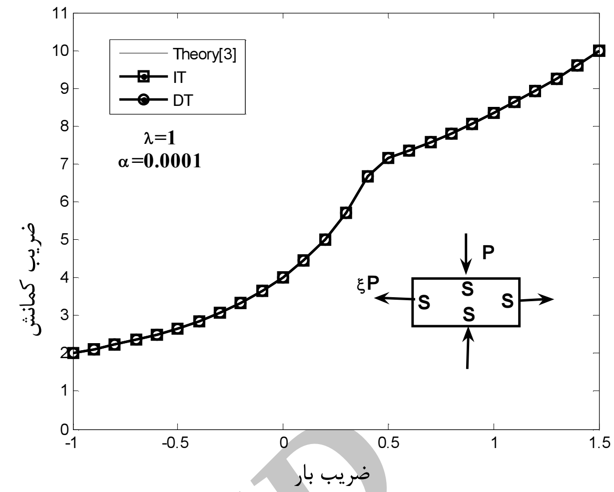
شکل ۲ منحنی تنش-کرنش حقیقی فلز آلومینیوم 7075-T6 [۴]



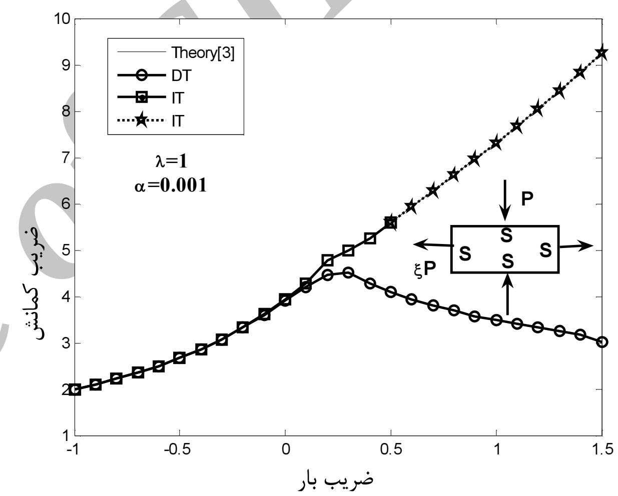
شکل ۳ منحنی حساسیت مش برای حالت SSSS

جدول ۲ دقت توزیع نقاط نمونه برای محاسبه ضریب کمانش

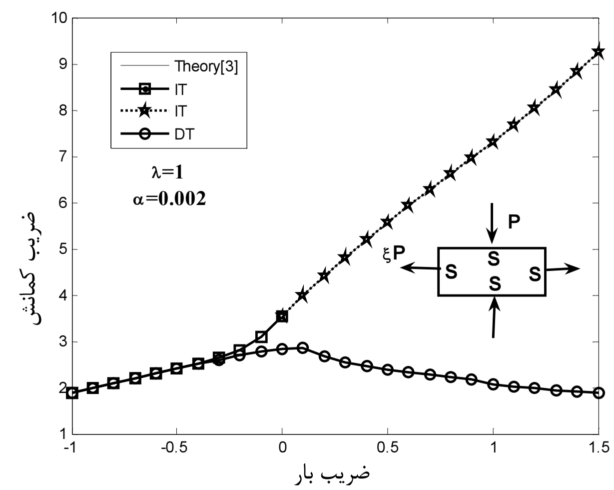
شرایط مرزی	نوع تئوری	تعداد نقاط نمونه	ضریب کمانش ($\alpha=0.0001$ $\xi=-1$)	معادله (۲۲-۳)	معادله (۲۲-۴)	معادله (۲۲-۵)	معادله (۲۳)	معادله (۲۴)
SSSS	IT, DT	۱۳		۲/۰۰۱۰	۱/۹۹۹۷	۱/۹۹۹۷	۲/۰۰۰۵	۲/۰۰۰۰
	دوربان [۳]		۲/۰۰۰۰					



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SSSS

در حالت SSSS وقتی $\alpha = 0.0001$ باشد، کمانش در ناحیه الاستیک اتفاق می‌افتد و نتایج حاصل از هر دو تئوری کاملا بر هم منطبق می شوند. دراین حالت برای تمام شرایط مرزی نتایج حاصل به نتایج کمانش الاستیک نزدیک خواهد بود. وقتی $\alpha = 0.001$، $\xi \prec 0.1$، $\alpha = 0.002$ و $-0.25 \prec \xi$ باشد، تطابق خوبی بین دو تئوری پلاستیسیته بوجود می‌آید. با این حال، با افزایش ضریب بارگذاری ξ تفاوتها کاملاً زیاد می‌شود.

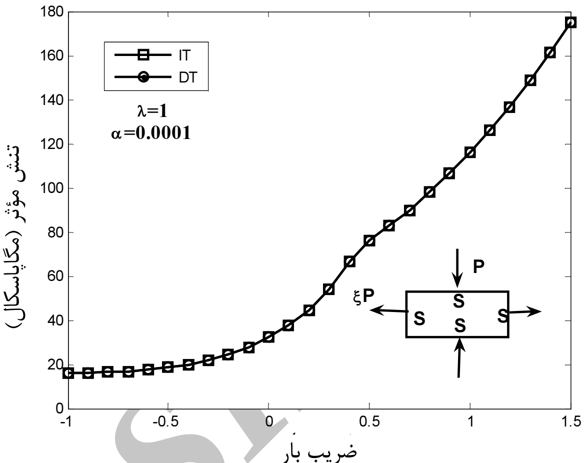
همانطور که مشخص است با افزایش ضخامت صفحه، محدودهٔ ضریب بار برای انطباق دو تئوری تغییرشکل و نموی کمتر می‌شود. در حالت کشش در راستای محور و فشار عمود بر محور ($0 \le \xi \le 1.5$)، تنش‌های پیش‌بینی شده توسط تئوری نموی بیش از حد تحمل ماده می‌باشد و بنابراین نتایج حاصل به‌طور مضاعف وارد محدودهٔ غیر قابل قبولی می‌شود. این نتایج در شکل‌های رسم شده با علامت ستاره مشخص شده‌اند. علامت مربع نشان‌دهندهٔ نتایج حاصل از تئوری نموی در محدوده منحنی تنش- کرنش ماده می‌باشد. همچنین برای اطمینان از درستی نتایج به‌دست آمده، مقایسه‌ای با نتایج قبلی در جدول ۳ انجام شده است.

جدول ۳ مقایسهٔ ضریب کمانش برای صفحات مربعی تحت بارتک محوری و دو محوری با شرایط تکیه‌گاهی SSSS

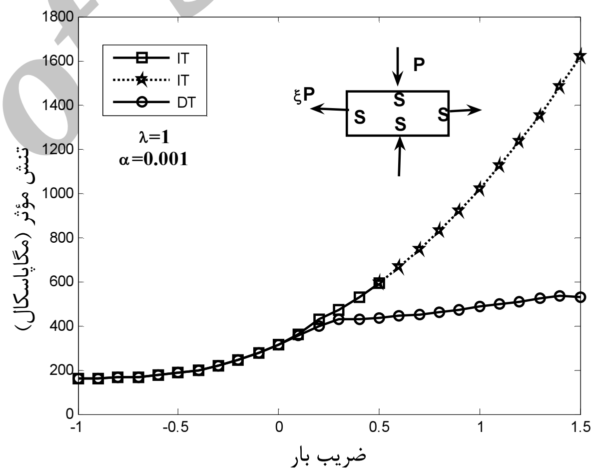
شرایط مرزی		$\alpha = 0.0001$		$\alpha = 0.002$	
		DT	IT	DT	IT
SSSS (تک محوری)	هندلمن و پراگر [۹]	-----	۴/۰۰۰۰	---	۳/۵۷۴۰
	شریواستاو [۱۰]	۴/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۲/۸۰۵۸	۳/۵۲۷۸
	وانگ [۱۱،۱۲]	۴/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۲/۷۹۵۴	۳/۴۹۵۵
	وانگ [۱۳]	۴/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۲/۷۹۵۴	۳/۴۹۵۵
		۴/۰۰۰۰	۴/۰۰۰۰	۲/۷۹۵۴	۳/۴۹۵۵
SSSS (دو محوری)	دوربان [۳]	۲/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۱/۸۶۴۹	۱/۸۷۱۳
	وانگ [۱۱، ۱۲]	۲/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۱/۸۶۴۹	۱/۸۷۱۳
	وانگ [۱۳]	۲/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۱/۸۶۴۹	۱/۸۷۱۳
		۲/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۱/۸۶۴۹	۱/۸۷۱۳

شکل ۵ منحنی ضریب بار–تنش مؤثر (σ_e) در نسبت‌های ضخامت (α) مختلف برای دو تئوری تغییرشکل و نموی و شرط مرزی SSSS را نشان می‌دهد. در حالت $\alpha = 0.001$، شکل ۵- الف، با افزایش ضریب بار در حالت کششی محوری، تنش مؤثر

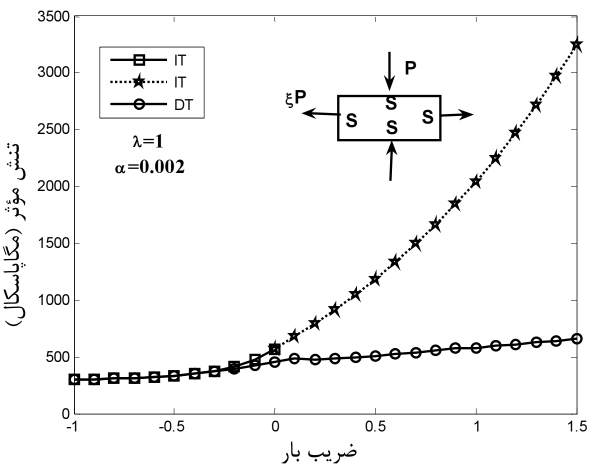
در تئوری نموی بیش از حد تحمل جسم است. با این حال، تئوری تغییر شکل کاملا بر روی منحنی تنش-کرنش حرکت می‌کند و کمانش الاستیک-پلاستیک در جسم را نشان می‌دهد.



(الف)



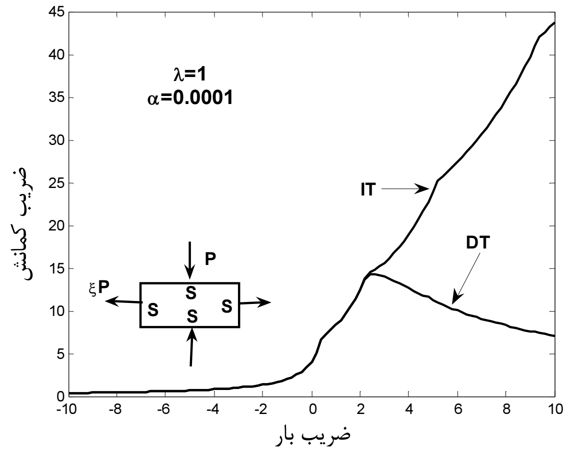
(ب)



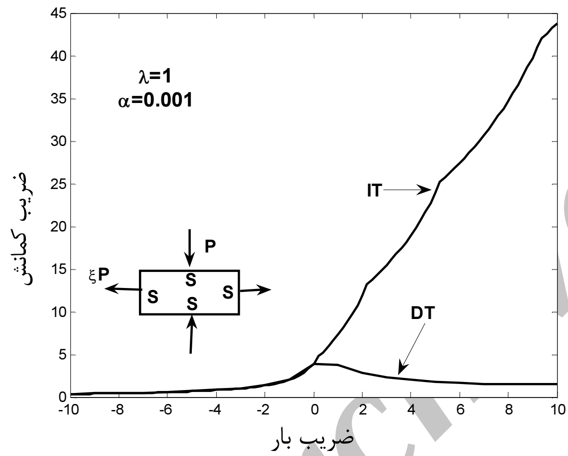
(ج)

شکل ۵ منحنی ضریب بار (ξ) بر حسب تنش مؤثر (σ_e)

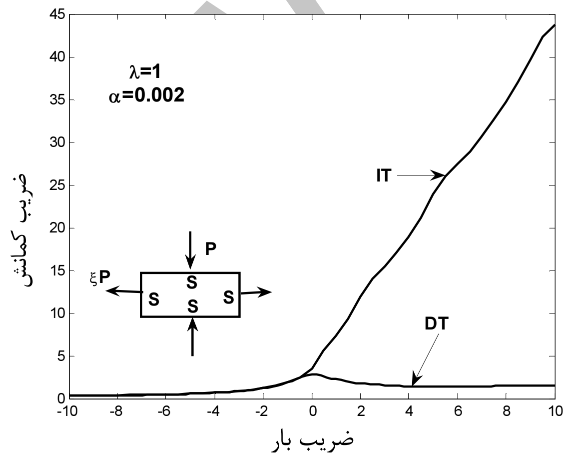
در حالت $\alpha = 0.002$، شکل ۵- ج، کمانش پلاستیک در جسم رخ می‌دهد و در اینجا نیز تئوری تغییر شکل در محدودهٔ منحنی تنش-کرنش و تئوری نموی در خارج آن حرکت می‌کند.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۶ اثر ضریب بار بر ضریب کمانش براساس دو تئوری نموی و تغییر شکل

با افزایش ضخامت صفحه، در حالت کششی محوری و فشاری عمودی جوابهای حاصل از تحلیل تئوری نموی بطور افزاینده غیرقابل قبول می‌شوند.

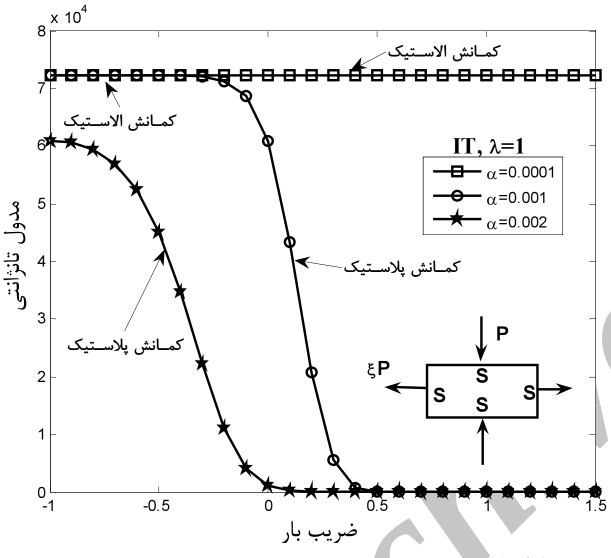
شکل ۶ منحنی ضریب بار- ضریب کمانش را برای مقایسهٔ دو تئوری نموی و تغییر شکل در نسبت‌های ضخامت (α) مختلف برای شرط مرزی SSSS نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل مشخص است با افزایش ضریب بار ξ و تبدیل بار از حالت فشاری به کششی و همچنین با افزایش ضخامت، اختلاف بین دو تئوری نموی و تغییر شکل بیشتر می‌شود. علاوه بر این، هنگامی‌که بار بصورت فشاری صفحه‌ای وارد می‌شود تطابق خوبی بین دو تئوری وجود دارد. زمانی‌که بار محوری بصورت کششی به صفحه وارد می‌شود با افزایش ضخامت صفحه هیچ تطابقی بین جوابهای به‌دست آمده از دو تئوری مشاهده نمی‌شود. در اینجا، در حالت $\alpha = 0.0001$ و $\alpha = 0.001$ و $\alpha = 0.002$ بیشترین بار کمانشی به ترتیب در $\xi = 2.3$ و $\xi = 0.3$ و $\xi = 0$ رخ می‌دهد. در صفحات نازک ($\alpha \le 0.001$) بیشترین بار کمانشی در حالت کششی محوری و فشاری عمودی ($\xi \ge 0$) اتفاق می‌افتد. با افزایش ضخامت صفحه، در شرایط تکیه‌گاهی مختلف، ماکزیمم بار کمانش در حالت فشاری دو محوری ($-0.2 \le \xi \le 0$) رخ می‌دهد (جدول ۴).

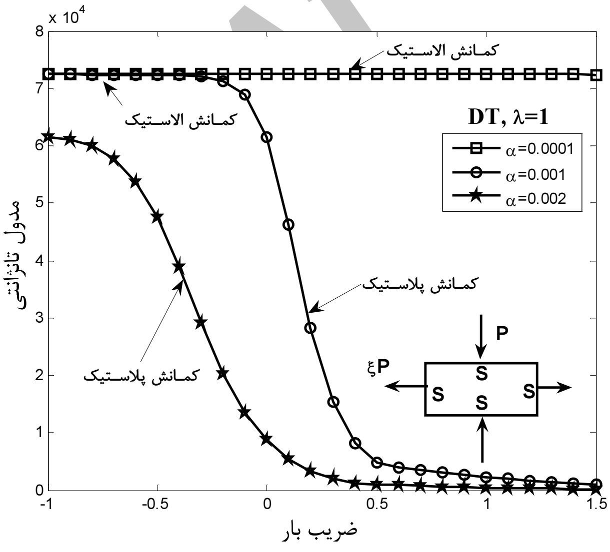
ضعیف شدن مدول فلزات با افزایش کشش و در نتیجه غلبه اثر پایداری کششی بر کمانشی از دیگر عواملی است که با افزایش $\xi \ge 0$ بار کمانشی را کاهش می‌دهد. شکل ۷ منحنی مدول تانژانتی- ضریب بار تئوری نموی در حالت SSSS را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود در حالت استفاده از تئوری نموی با افزایش نسبت ضخامت (α) و ضریب بار ($\xi \ge 0$)، مدول تانژانتی (T) بطرف صفر متمایل می‌شود و در نتیجه جوابهای این تئوری در این حالت غیر قابل قبول می‌شود، (شکل ۷). در اینجا در حالت $\alpha = 0.0001$ کمانش الاستیک، در حالت $\alpha = 0.001$ کمانش الاستیک-پلاستیک و در حالت $\alpha = 0.002$ کمانش پلاستیک در صفحه رخ داده است. با افزایش منطقهٔ پلاستیک، سختی صفحه کاهش می‌یابد و بارهای کمانشی کوچکتر می‌شوند. با این حال، با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل، این امر اتفاق نمی‌افتد، (شکل ۸). لذا، این عامل می تواند یکی از دلایلی باشد که جوابهای به‌دست آمده از حالت تئوری تغییرشکل با جوابهای آزمایشگاهی همخوانی بیشتری دارد. علاوه بر این، می‌توان دریافت که تئوری تغییرشکل وابستگی زیادی به پارامتر ضریب بار ندارد و تغییرات آن نسبت به پارامتر نسبت ضخامت بیشتر است (شکل‌های ۶ و ۹-۱۲).

جدول ۴ مقدارضریب بار برای ماکزیمم بار کمانش

شرایط مرزی	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.002$
SSSS	$\xi = 0.3$	$\xi = 0$
SCSC	$\xi = 0.2$	$\xi = 0$
CSCS	$\xi = -0.3$	$\xi = -0.2$
SSCC	$\xi = 0$	$\xi = -0.1$
SCCC	$\xi = 0$	$\xi = -0.1$
CSSS	$\xi = 0$	$\xi = -0.1$
CCCC	$\xi = -0.2$	$\xi = -0.2$

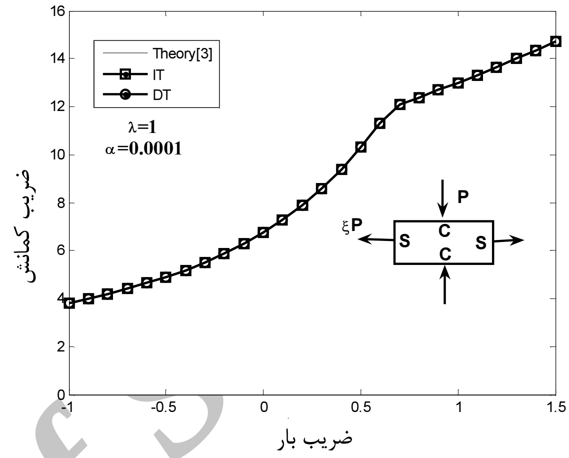


شکل ۷ منحنی مدول تانژانتی- ضریب بار تئوری نموی

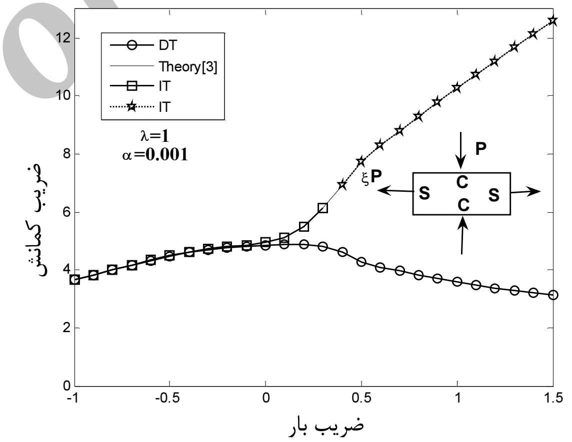


شکل ۸ منحنی مدول تانژانتی - ضریب بار تئوری تغییر شکل

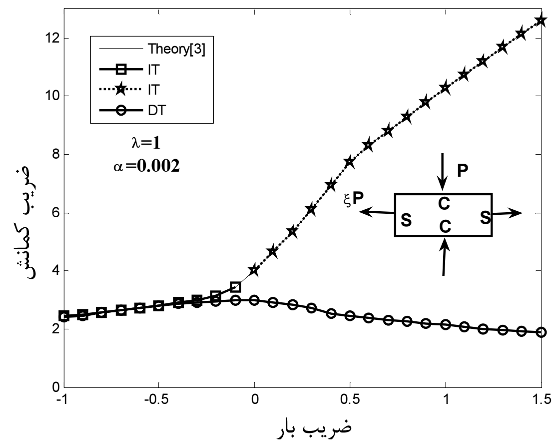
به طور کلی می‌توان گفت مادامی‌که ضریب بار و نسبت ضخامت افزایش می‌یابند، منطقهٔ پلاستیک وسیع‌تر شده و اختلاف بیشتری بین مدول لحظه‌ای دو تئوری اتفاق می‌افتد و با توجه به اینکه نسبت ضخامت اثر بیشتری در گسترش منطقه پلاستیک صفحه دارد، اثر آن قابل ملاحظه‌تر است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۹ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SCSC

با توجه به رابطهٔ (۳۰):

$$\sigma_e = (1+\xi+\xi^2)^{(-1/2)}\left(\frac{\alpha k}{1-\upsilon^2}\right)E \qquad (۳۰)$$

اثر نسبت ضخامت و ضریب بار بر روی سطح تنش کاملاً مشهود است.

زمانی‌که صفحات خیلی نازک باشند ($\alpha \le 0.000$)، جوابهای به‌دست آمده در تمام شرایط مرزی با جوابهای حاصل از حل کمانش الاستیک بر هم منطبق هستند. اما در دو حالت ($\alpha=0.001$ و $\alpha=0.002$)، با توجه به شرایط مرزی مختلف، کمانش الاستیک-پلاستیک یا کمانش پلاستیک در صفحه رخ می‌دهد.

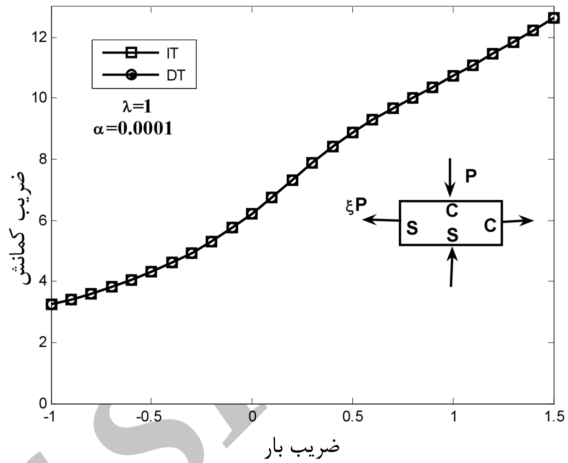
با افزایش ناحیه پلاستیک جوابهای حاصل از دو تئوری از یکدیگر فاصله گرفته و با افزایش ضریب بارگذاری در حالت کششی، اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری افزایش می‌یابد (شکل ۹-ج). جدول ۵ محدوده ضریب بار برای تطابق دو تئوری تغییرشکل و نموی با متغیر ضخامت و شرایط تکیه‌گاهی مختلف را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که گیردار بودن لبه‌ها اختلاف بین دو تئوری نموی و تغییرشکل را افزایش می‌دهد. زیرا شرایط مرزی گیردار باعث افزایش سطح تنش در صفحه خواهد شد که این خود بر اختلاف بین دو تئوری می‌افزاید. افزایش بازه ضریب بار در تطابق دو تئوری در هر حالت به دلیل کاهش سطح تنش بوجود آمده در صفحه می‌باشد. همچنین با افزایش ضخامت صفحه (α)، احتمال رخ دادن کمانش پلاستیک افزایش می‌یابد و بنابراین محدوده تطابق دو تئوری نموی و تغییرشکل کاهش می‌یابد.

جدول ۵ محدوده ضریب بار برای تطابق دو تئوری تغییرشکل و نموی

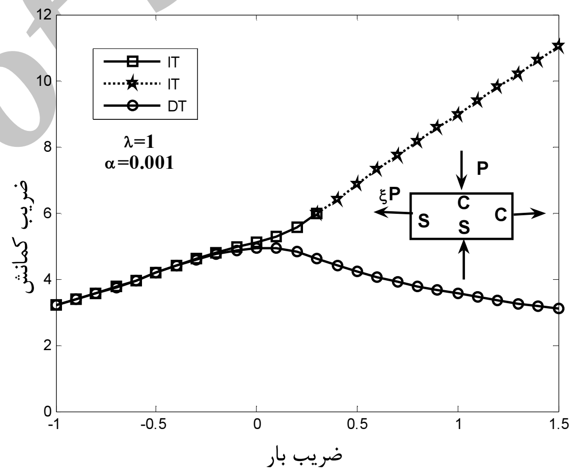
شرایط مرزی	$\alpha=0.001$	$\alpha=0.002$
SSSS	$-1\le\xi\le 0$	$-1\le\xi\le -0.4$
SCSC	$-1\le\xi\le 0$	$-1\le\xi\le -0.4$
CSCS	$-1\le\xi\le -0.3$	-----
SSCC	$-1\le\xi\le -0.2$	$-1\le\xi\le -0.4$
SCCC	$-1\le\xi\le -0.3$	-----
CSSS	$-1\le\xi\le -0.2$	$-1\le\xi\le -0.6$
CCCC	$-1\le\xi\le -0.4$	-----

برای حالتهای SCCC, SSCC, CCCC تاکنون به دلیل ناتوانی در جداسازی متغیرها در حل معادلات هیچ حل عددی ارائه نشده است. اکنون به تحلیل این موارد با روش یک چهارم

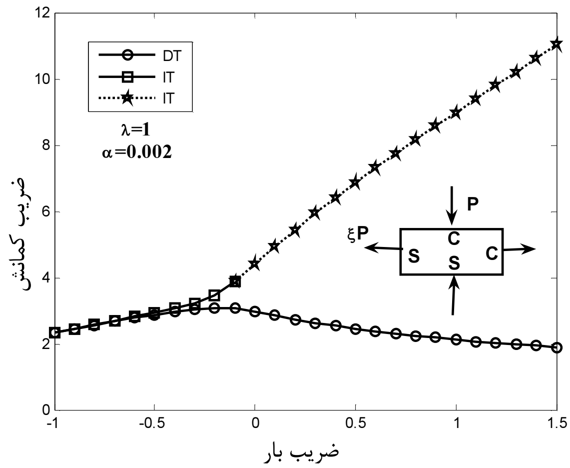
تفاضلی تعمیم یافته پرداخته می شود. اشکال ۱۰ تا ۱۲ مقایسهٔ دو تئوری تغییر شکل و نموی را برای حالات SSCC, SCCC و CCCC نشان می‌دهند.



(الف)



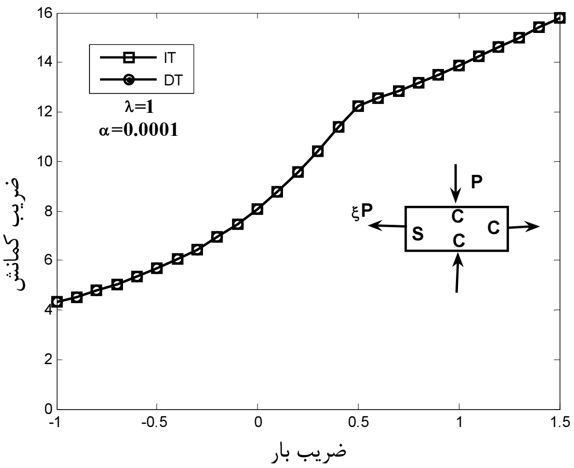
(ب)



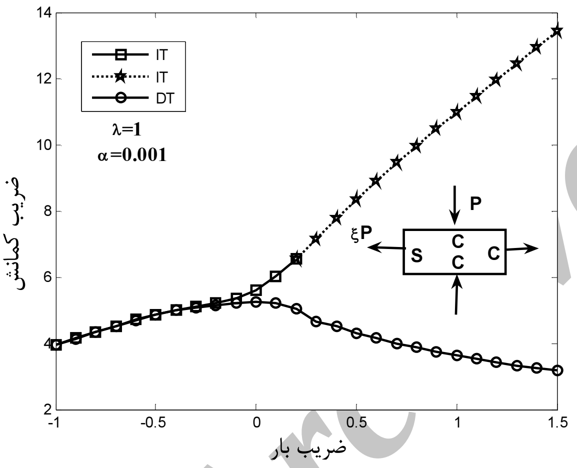
(ج)

شکل ۱۰ مقایسهٔ تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SSCC

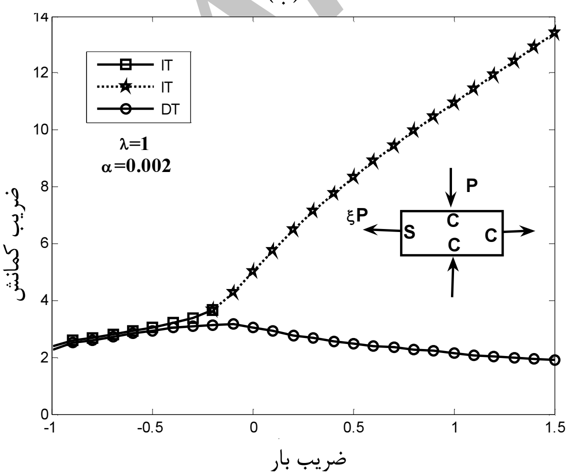
همان‌گونه که در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ مشخص است با افزایش گیردار بودن صفحه، در شرایط یکسان ضریب بار و ضخامت صفحه، بار کمانشی صفحه افزایش می‌یابد.



(الف)

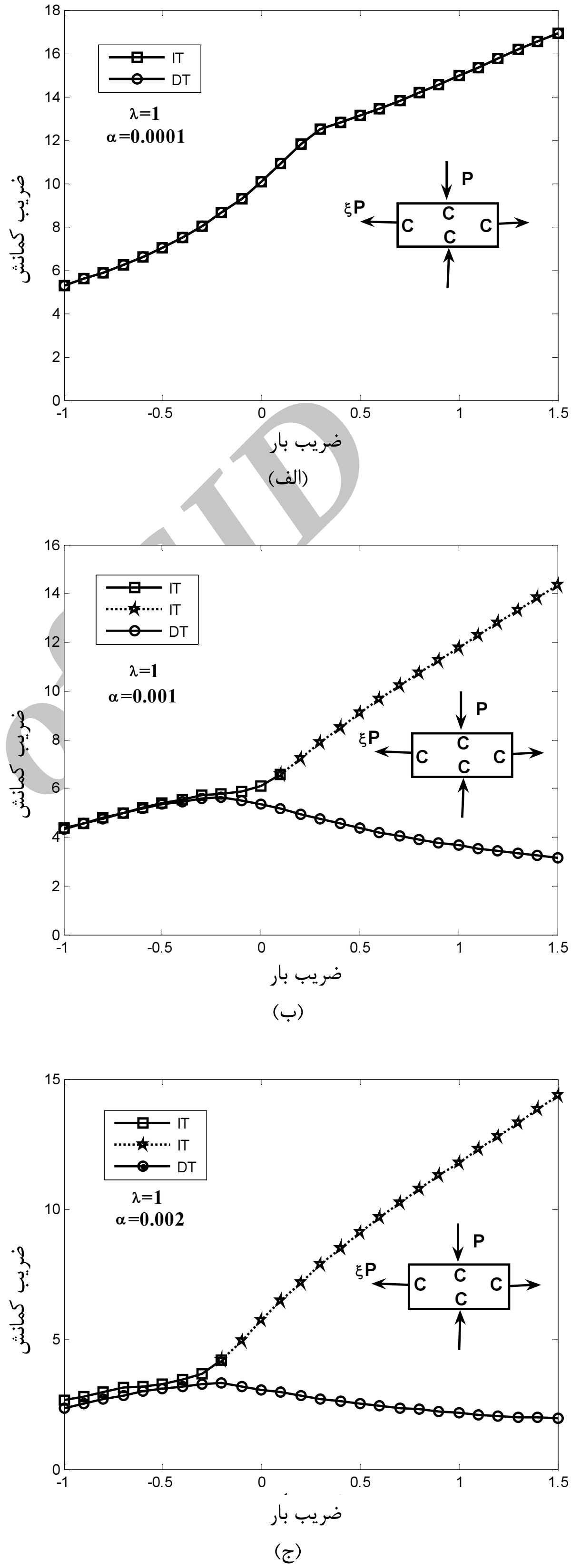


(ب)



(ج)

شکل ۱۱ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SCCC



شکل ۱۲ مقایسه تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت CCCC

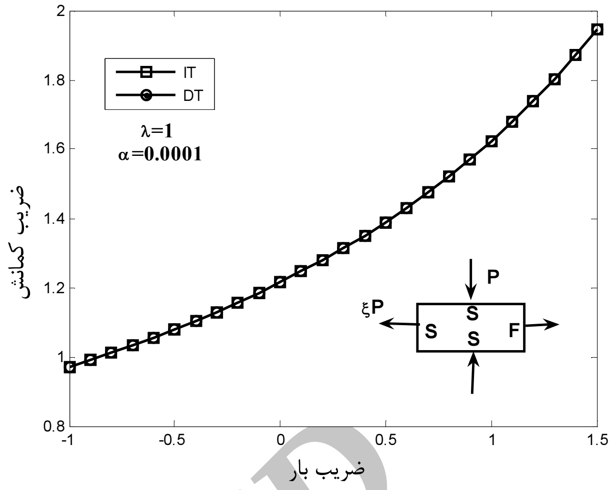
در اینجا محدودهٔ انطباق دو تئوری تغییرشکل و نموی در حالت SSCC نسبت به حالت SCCC وسیعتر است که بدلیل افزایش گیردار بودن صفحه در شرایط مرزی دوم است (شکل‌های ۱۰، ۱۱).

در حالتی که تمام لبه‌ها گیردار باشند (CCCC)، هنگامی که $\alpha=0.0001$، در صفحه کمانش الاستیک و با افزایش ضخامت، کمانش پلاستیک رخ می‌دهد (شکل ۱۲- الف). در این حالت با شرایط $\alpha=0.001$ و $\xi \prec -0.6$، تطابق خوبی بین دو تئوری وجود دارد (شکل ۱۲- ب).

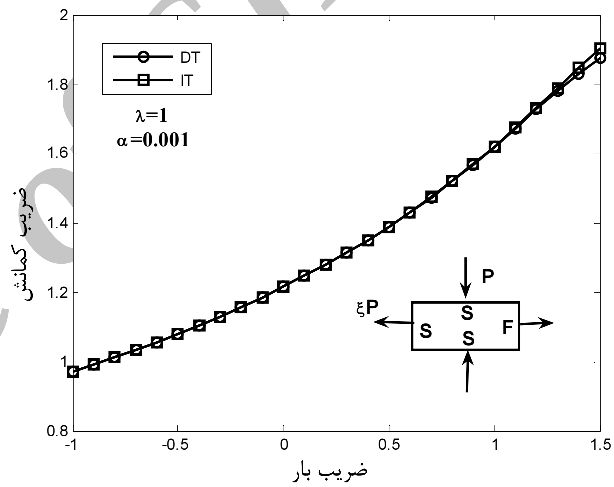
با این حال، چنانچه قبلاً ذکر شد شرایط گیردار باعث افزایش منطقهٔ پلاستیک در صفحه می‌شود و بنابراین دو تئوری نموی و تغییرشکل در حالت $\alpha=0.002$ از یکدیگر دور شده و تطابق بین دو تئوری کاهش می‌یابد (شکل ۱۲- ج). بنابراین با افزایش شرایط مرزی گیردار کمانش پلاستیک رخ خواهد داد.

از آنجا که شرایط تکیه‌گاه آزاد نیز تاکنون مورد بحث و بررسی قرار نگرفته است، در اینجا به بررسی این حالت پرداخته می‌شود. شکل‌های ۱۳ تا ۱۶ مقایسهٔ دو تئوری تغییرشکل و نموی را برای حالت‌هایCFCF, SFSF, CSFS, SSFS بر حسب مقادیر مختلف نسبت ضخامت نشان می‌دهند. همانطور که مشخص است با آزادتر شدن لبه‌ها، محدودهٔ تطابق بین دو تئوری افزایش و با گیردارتر شدن آنها این محدوده کاهش می‌یابد (شکل‌های ۱۳، ۱۴). به بیان دیگر، در ضرایب بار متفاوت، با افزودن شرایط مرزی آزاد کمانش بیشتر بصورت الاستیک و با افزودن شرایط مرزی گیردار کمانش بیشتر بصورت پلاستیک رخ خواهد داد.

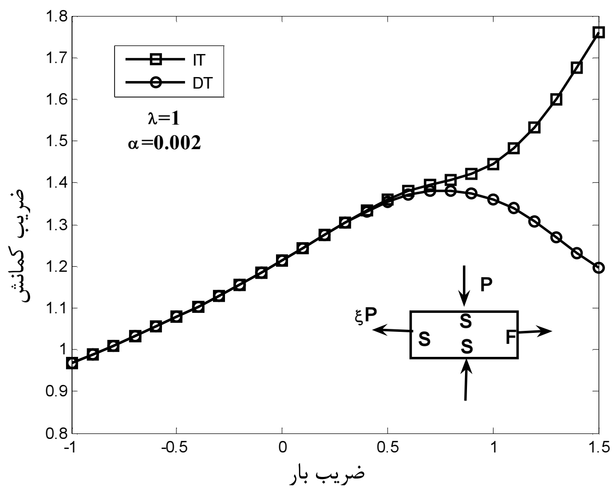
در حالت CFCF وقتی $\alpha=0.002$ تطابقی بین دو تئوری مشاهده نمی‌شود (شکل ۱۶- ج). این به این دلیل است که با افزایش گیردار شدن صفحه سطح تنش افزایش می‌یابد و تفاوت بین دو تئوری بیشتر می‌شود. مقایسهٔ شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نشان می‌دهد که در شرایط یکسان چنانچه تکیه‌گاههای ساده به گیردار تبدیل شوند ضریب کمانش افزایش یافته و محدوده تطابق دو تئوری نموی و تغییرشکل کاهش می‌یابد. همچنین با تبدیل تکیه‌گاههای گیردار به آزاد، ضریب کمانش کاهش یافته و محدودهٔ تطابق دو تئوری افزایش می‌یابد.



(الف)

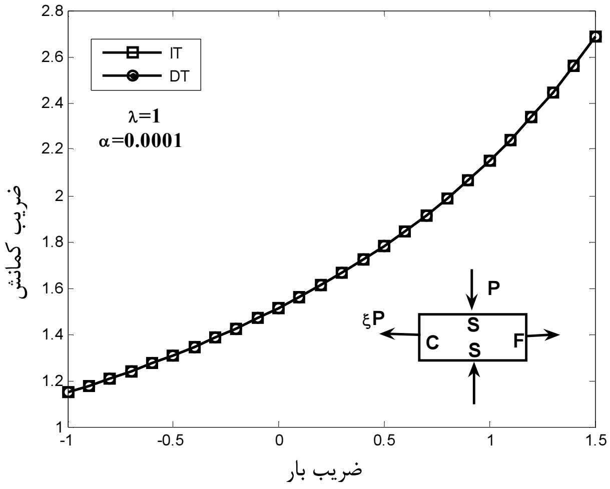


(ب)

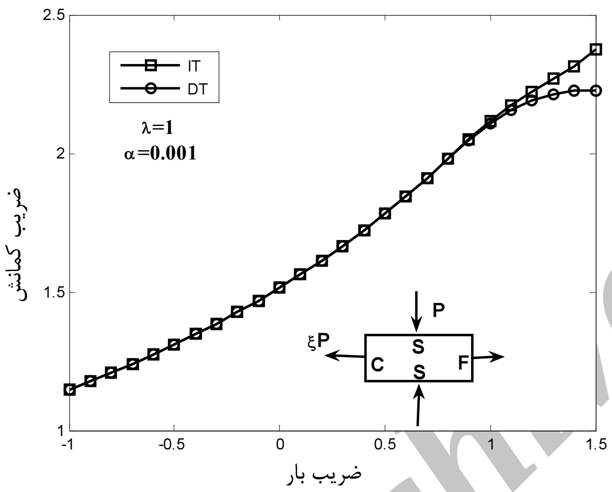


(ج)

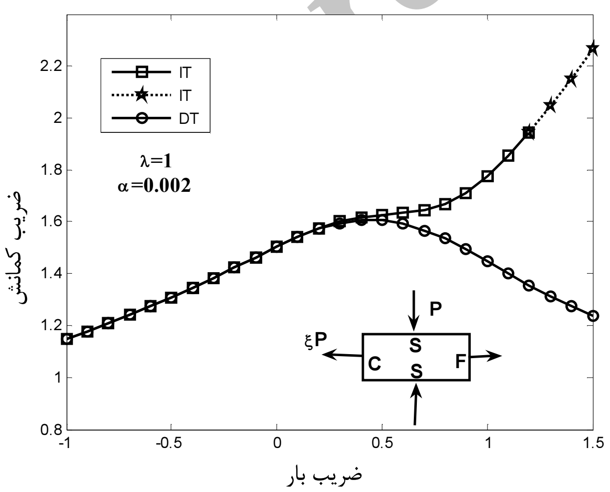
شکل ۱۳ مقایسهٔ تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SSFS



(الف)

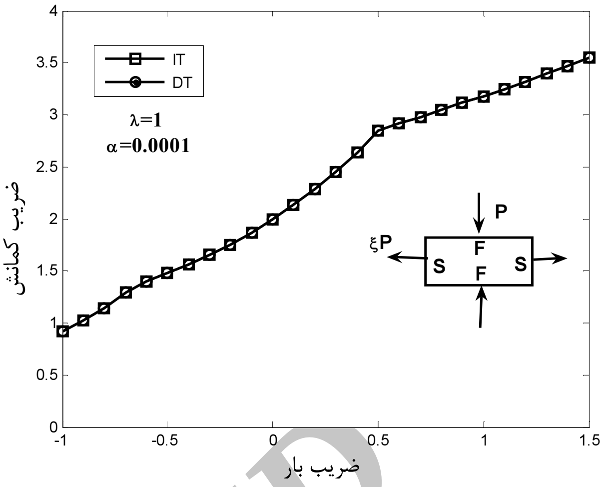


(ب)

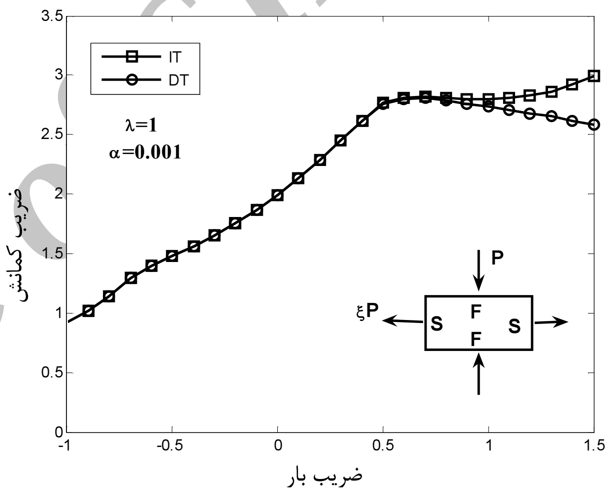


(ج)

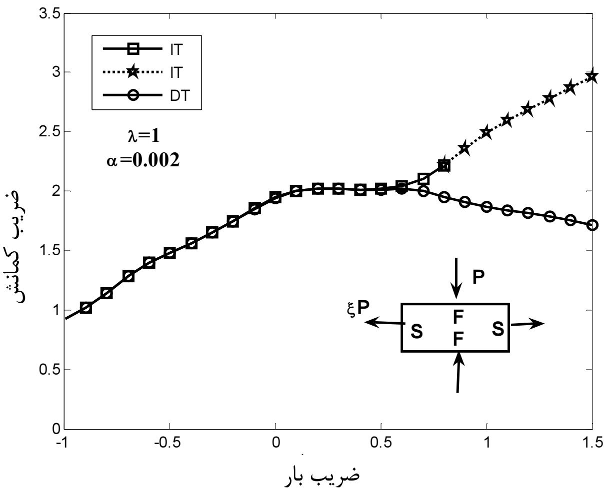
شکل ۱۴ مقایسهٔ تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت CSFS



(الف)

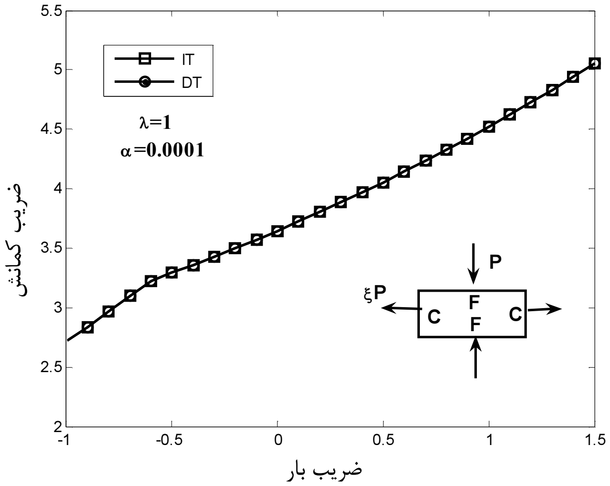


(ب)

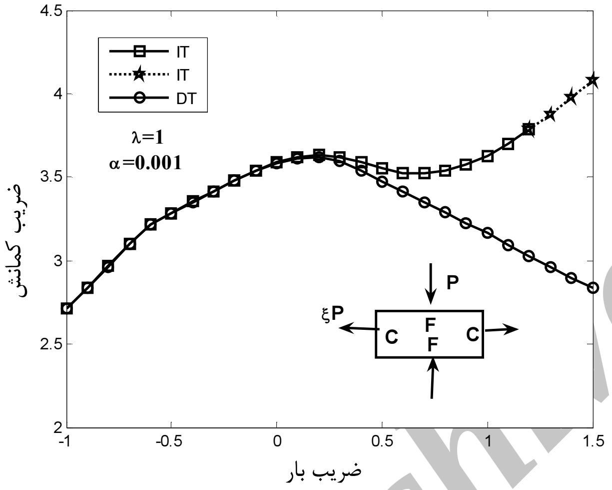


(ج)

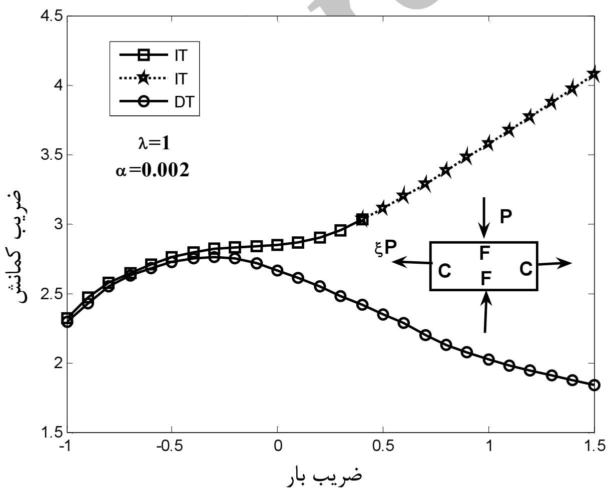
شکل ۱۵ مقایسهٔ تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت SFSF



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۱۶ مقایسهٔ تئوریهای نموی و تغییرشکل برای حالت CFCF

۶- نتیجه‌گیری

مسأله کمانش الاستوپلاستیک صفحات به کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته و به کمک دو تئوری پلاستیسیتهٔ تغییرشکل و نموی مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج جدیدی ارائه شد. چگونگی تاثیر عواملی مانند ضخامت صفحه، ضریب بارگذاری، خواص ماده و شرایط مرزی بر ضریب کمانش به کمک دو تئوری مختلف بررسی گردید. نتایج نشان می‌دهند زمانی‌که صفحات خیلی نازک باشند ($\alpha \le 0.0001$)، جوابهای به‌دست آمده در تمام شرایط مرزی با جوابهای حاصل از کمانش الاستیک بر هم منطبق هستند. با این حال، با افزایش ضخامت صفحه کمانش الاستیک-پلاستیک یا کمانش پلاستیک در صفحه رخ می‌دهد. در این حالت، هنگامی‌که با افزایش ضریب بار ناحیهٔ پلاستیک در صفحه گسترش می‌یابد، اختلاف بین نتایج حاصل از دو تئوری پلاستیسیته از یکدیگر بیشتر می‌شود که در اینجا اثر ضخامت صفحه از بار محسوس‌تر است.

همچنین مشخص شد که تغییرات تئوری تغییرشکل نسبت به پارامتر نسبت ضخامت (α) از تئوری نموی بیشتر می‌باشد. با گیردارتر شدن صفحه به دلیل افزایش سطح تنش، کمانش پلاستیک در آن سریعتر رخ می‌دهد. بنابراین با ازدیاد شرایط مرزی گیردار اختلاف ضریب کمانش بین دو تئوری نموی و تغییرشکل بیشتر می‌شود. از طرف دیگر، با افزایش شرایط مرزی آزاد، ضریب کمانش کاهش یافته و اختلاف ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل کمتر می‌شود.

نتایج نشان می‌دهند که اختلاف بین دو تئوری نموی و تغییرشکل در حالت کششی محوری ($\xi \ge 0$) افزایش می‌یابد. به علاوه، ضرایب کمانش حاصل از تئوری تغییرشکل در مقایسه با تئوری نموی، به ضریب بار وابستگی کمتری دارند. همچنین قابل توجه است که در صفحات نازکتر در بارگذاری فشاری دو محوری و با ضرایب بار متفاوت، تطابق قابل قبولی بین ضریب کمانش حاصل از دو تئوری نموی و تغییرشکل وجود دارد. با این حال، با افزایش ضخامت صفحه، ضریب کمانش حاصل از تحلیل نموی در حالتی که بار به‌صورت کششی وارد شود، قابل اطمینان نیست. علاوه بر آن، افزایش ضخامت صفحه تأثیر چندانی بر ضریب کمانش حاصل ندارد که این خود نشان‌دهندهٔ مناسب نبودن استفاده از تئوری نموی در این حالت می‌باشد.

۷- فهرست علایم

a	طول صفحه
b	عرض صفحه
c, k	پارامترهای رامبرگ-ازگود
D	صلبیت خمشی صفحه
h	ضخامت صفحه
K	ضریب کمانش
S_{ij}	تانسور تنش انحرافی
$S(E_s)$	مدول سکانتی
$T(E_t)$	مدول تانژانتی
u, v, w	جابجاییها
$X = \frac{x}{a}$	پارامتر بدون بعد طول
$Y = \frac{y}{b}$	پارامتر بدون بعد طول

علائم یونانی

α	نسبت ضخامت
β	پارامتر مورد استفاده در روابط تنش-کرنش
γ	پارامتر مورد استفاده در روابط تنش-کرنش
ρ	پارامتر مورد استفاده در روابط تنش-کرنش
ε	کرنش پلاستیک کل
λ	نسبت ابعادی
σ_e	تنش مؤثر
υ	ضریب پواسون
ξ	ضریب بار

۸- مراجع

[1] Durban D., "Plastic Buckling of Plates and Shells", AIAA Paper 97-1245, *NASA/CP-206280*, 1998, pp. 293–310.

[2] Ore E. and Durban D., "Elastoplastic Buckling of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells", *International Journal of Mechanical Sciences* 34 (9), 1992, pp. 727–742.

[3] Durban D. and Zuckerman Z., "Elastoplastic Buckling of Rectangular Plates in Biaxial Compression/tension", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, 1999, pp. 751–765.

[4] Wang X. W. and Huang J. C., "Elastoplastic Buckling Analyses of Rectangular Plates under Biaxial Loadings by the Differential Quadrature

Method", *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, 2009, pp. 14–20.

[5] Zhang W. and Wang X., "Elastoplastic Buckling Analysis of Thick Rectangular Plates by using the Differential Quadrature Method", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61, 2011, pp. 44–61.

[6] Chakrabarty J., *Applied Plasticity,* Second Edition, Springer, 2010.

[7] Bellman RE. and Casti J., "Differential Quadrature and Long-Term Integration", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. *34*, 1971, pp. 235–238.

[8] Bert C. W. and Malik M., "Differential Quadrature in Computational Mechanics: a Review", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 49, 1996, pp. 1–27.

[9] Handelman G. H. and Prager W., "Plastic Buckling of Rectangular Plates under Edge Thrusts", *NACA Technical Note* No. 1530, Washington D.C, 1948.

[10] Shrivastava S. C., "Inelastic Buckling of Plates Including Shear Effects", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, 1979, pp. 567-575.

[11] Wang C. M., Xiang Y. and Chakrabarty J., "Elastic/plastic Buckling of Thick Plates", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 38, 2001, pp. 8617-8640.

[12] Wang C. M., Xiang. Y., and Wang. C. Y., "Buckling and Vibration of Plates with an Internal Line-Hinge via Ritz Method", *Proceedings of the First Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics,* Sydney, 2001, pp. 1663-1672.

[13] Wang. C. M. and Aung. T. M., "Plastic Buckling Analysis of Thick Plates using p-Ritz Method", *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 44, 2007, pp. 6239–6255.