



## طراحی موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه با استفاده از روش رقابت استعماری و المان محدود اصلاح یافته

مجتبی شیخی<sup>۱</sup>، علی قدوسیان<sup>۲\*</sup>، مرتضی شیخی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان

۳- دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

\* سمنان، صندوق پستی ۳۵۱۹۶۴۵۳۹۹، aghoddosian@semnan.ac.ir

**چکیده-** طراحی موقعیت مناسب ساپورت‌های سازه همواره یکی از مسائل مهم و کاربردی در مهندسی بوده و در بهبود کارایی سازه نقش مهمی دارد. در این مقاله برای طراحی موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه، با بهره‌گیری از ترکیب روش المان محدود اصلاح یافته و روش بهینه‌سازی رقابت استعماری مقدار حداکثر ممان خمشی در سازه مینیمم می‌شود. در اینجا ساپورت‌های در نظر گرفته شده به صورت صلب و الاستیک می‌باشد. روش بهینه‌سازی رقابت استعماری در مقایسه با روش‌های گذشته نسبت به طراحی موقعیت بهینه ساپورت‌ها، روشی قدرتمند و کارا بوده و در تعداد تکرار کمتری به نتایج بهتری می‌رسد. استفاده از روش المان محدود اصلاح یافته علاوه بر کاهش حجم محاسبات و بالا بردن سرعت همگرایی الگوریتم بهینه‌سازی، امکان رسیدن به موقعیت بهینه سراسری ساپورت‌ها را فراهم می‌کند. برای نشان دادن کارایی و قدرت روش حاضر در یافتن نقطه بهینه سراسری مسئله، موقعیت بهینه ساپورت‌ها برای سه سازه متداول طراحی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که تعیین موقعیت بهینه ساپورت‌ها با استفاده از ترکیب روش‌های ارائه شده، مقدار حداکثر ممان خمشی سازه را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.

**کلیدواژگان:** سازه، ساپورت، المان محدود اصلاح یافته، ممان خمشی، روش بهینه‌سازی رقابت استعماری.

## Optimal design of structural support positions using ica and mfem

M. Sheikhi<sup>1</sup>, A. Ghoddosian<sup>2\*</sup>, M. Sheikhi<sup>3</sup>

1- PhD Student, Mech. Eng., Semnan Univ., Semnan, Iran

2- Assist. Prof., Mech. Eng., Semnan Univ., Semnan, Iran

3- PhD Student, Civil Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran

\* P.O.B. 3519645399, Semnan, Iran. aghoddosian@semnan.ac.ir

**Abstract-** The design of the structural supports has always been practically important in engineering applications. In addition to holding a structure properly, supports can also be utilized to improve the structural performances. In this study, by using modified finite element method (MFEM) and Imperialist Competitive Algorithm (ICA), the maximum of bending moment was minimized. In this paper both elastic and rigid supports are taken into account. As compared to other design optimization methods, ICA is robust, more efficient, and requiring fewer number of function evaluations, while leading to better quality of results. Applying the modified finite element method not only reduces computational cost and increases convergence rate, but also reach the global optimum position of supports. Three classical examples are given to demonstrate the validity and capability of the proposed optimization procedure for finding the global support positions. Results show that support position optimization by using present method, can reduce the maximal moment significantly, and deserves more investigation.

**Keywords:** Structure, Support, Modified Finite Element Method (MFEM), Bending Moment, Imperialist Competitive Algorithm (ICA).

## ۱- مقدمه

روی گره‌های در نظر گرفته در مش‌بندی اولیه سازه قرار گیرد. از آنجا که در این روش از آنالیز حساسیت برای بهینه‌سازی استفاده شده و نمی‌توان به یک تابع صریح برای آنالیز حساسیت ممان خمشی نسبت به محل ساپورت‌ها دست پیدا کرد، استفاده از آنالیز حساسیت باعث پیچیدگی راه‌حل شده است.

از نقطه نظر مهندسی، با تعیین موقعیت بهینه ساپورت‌های یک سازه و حداقل کردن ممان خمشی حداکثر در سازه، می‌توان به یک طراحی مناسب رسید. برای این منظور باید این نکته را مد نظر داشت که عضو از سازه که به آن مقدار ممان خمشی حداکثر اعمال می‌شود، همواره ثابت نیست و با عوض شدن محل ساپورت‌ها در حین فرایند حل از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند. از طرف دیگر علاوه بر اینکه محل اعمال حداکثر ممان خمشی در هر مرحله بهینه‌سازی تغییر می‌کند، مقدار آن نیز دارای تغییرات شدیدی است و از یک مقدار مثبت بزرگ به یک مقدار منفی کوچک و بالعکس می‌رسد. بنابراین تابع هدف برای این مسئله، تابعی شدیداً غیر خطی و بدرفتار نسبت به موقعیت ساپورت‌ها می‌باشد. این موضوع باعث عدم کارایی روش‌های بهینه‌سازی و پیچیده‌تر شدن محاسبات می‌شود. با توجه به موارد ذکر شده، در صورت استفاده از روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر آنالیز حساسیت که برای به‌دست آوردن نقطه بهینه به مشتق تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی (روش‌های بهینه‌سازی مرتبه اول<sup>۳</sup>) نیاز دارند، علاوه بر اینکه جواب دقیقی به‌دست نمی‌آید، پیچیدگی محاسبات مسئله نیز بیشتر می‌شود. به همین خاطر در این مقاله از روش بهینه‌سازی رقابت استعماری<sup>۴</sup> که روشی مرتبه صفر و قدرتمند بوده و به محاسبه مشتق تابع هدف نسبت به موقعیت ساپورت‌ها نیاز ندارد، استفاده شده است.

## ۲- الگوریتم بهینه‌سازی رقابت استعماری

الگوریتم رقابت استعماری اولین بار در سال ۲۰۰۷ توسط آتش پز و کارولوکس ابداع شد [۹]. با توجه به قدرت فوق‌العاده این الگوریتم در یافتن نقطه بهینه سراسری مسائل پیچیده، سریعاً مورد اقبال محققان در زمینه‌های مختلف قرار گرفت. این

قاب‌ها یا سازه‌ها مانند اسکلت ساختمان‌ها، پل‌ها، سازه‌های فضایی و دریایی و ... دارای کاربرد عملی وسیعی در مهندسی هستند. ممان خمشی در اعضای آنها همیشه یکی از مهمترین معیارها برای رسیدن به یک طراحی ایمن و مناسب بوده است. بنابراین کاهش حداکثر ممان خمشی در سازه یکی از پارامترهای مهم در طراحی مهندسی به شمار می‌آید. در چند سال اخیر بر روی بهینه‌سازی سازه از لحاظ اندازه، شکل و توپولوژی برای به‌دست آوردن حداقل وزن سازه تحت قیود مختلف از جمله جابجایی و تنش کارهای زیادی انجام شده است.

در تمام این مسائل می‌توان با در نظر گرفتن موقعیت بهینه ساپورت‌ها و طراحی دوباره آنها کارایی سازه را بهتر کرد. اخیراً به‌دست آوردن موقعیت ساپورت‌های سازه برای دستیابی به کارایی و بهبود سازه به‌منظور کاهش حداکثر ممان خمشی سازه [۲،۱]، کاهش حداکثر خیز در سازه [۳]، افزایش فرکانس طبیعی [۵،۴] و افزایش بار کمانشی سازه [۶] و یا حتی حداقل کردن تنش و کرنش در قطعه کار در خلال فرایند ماشین‌کاری [۷] و غیره مورد توجه محققان قرار گرفته است. با این حال تاکنون مطالعات کمی در مورد کاهش ممان خمشی حداکثر با استفاده از تغییر در موقعیت ساپورت‌های سازه انجام شده است. امام و الشیری [۲] مطالعاتی در زمینه بهینه کردن موقعیت ساپورت‌های سازه برای رسیدن به حداقل ممان خمشی حداکثر در سازه انجام داده‌اند. مطالعه آنها بر پایه استفاده از روش بهینه‌سازی جهات امکان‌پذیر<sup>۱</sup> و بهره‌گیری از آنالیز حساسیت<sup>۲</sup> و همچنین روش تفاضل محدود بوده که روشی پیچیده و با دقت کم است. هرناندز و پرزن [۸] نیز با استفاده از آنالیز حساسیت برای تنش عمودی نسبت به موقعیت ساپورت‌ها به بهینه کردن آنها پرداخته‌اند. وانگ [۱] نیز با استفاده از روش المان محدود و به‌کارگیری یک الگوریتم ابتکاری به کمک آنالیز حساسیت، موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه را برای رسیدن به حداقل ممان خمشی حداکثر در سازه تعیین می‌کند. در روش ارائه شده توسط وانگ، محل ساپورت‌ها به صورت گسسته بوده و فقط می‌تواند

1. Feasible Directions
2. Sensitivity Analysis

3. First Order Method
4. Imperialist Competitive Algorithm

در این رابطه  $N \cdot C_n$ ، تعداد اولیه کشورهای در حال توسعه امپراطوری  $n$ ام و  $N_{col}$  تعداد کل کشورهای در حال توسعه موجود در جمعیت کشورهای اولیه است. پس از تعیین تعداد کشورهای در حال توسعه هر امپراطوری، تعداد  $N \cdot C_n$  تا از کشورهای در حال توسعه اولیه به صورت تصادفی انتخاب شده و به امپراطوری  $n$ ام اختصاص داده می‌شود.

قدرت کل یک امپراطوری به صورت مجموع قدرت کشور توسعه یافته ( $cost(imp)$ ) به اضافه درصدی از میانگین قدرت کشورهای در حال توسعه ( $mean(cost(col))$ ) آن تعریف می‌شود [۹]. این موضوع در رابطه (۴) آورده شده است.

$$T.C_n = cost(imp) + \% \xi (mean(cost(col))) \quad (4)$$

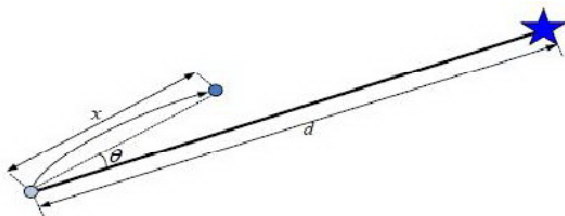
در رابطه فوق،  $T.C_n$  قدرت کل امپراطوری  $n$ ام و  $\xi$  عددی مثبت و معمولاً بین صفر و یک و نزدیک به صفر در نظر گرفته می‌شود. کوچک در نظر گرفتن  $\xi$  باعث می‌شود که قدرت کل یک امپراطوری، تقریباً برابر با هزینه حکومت مرکزی آن (کشور توسعه یافته) شود.

دو رکن اصلی این الگوریتم، سیاست جذب و رقابت استعماری است. بر اساس سیاست جذب، کشورهای توسعه یافته سعی در به تحت سلطه کشیدن کشورهای در حال توسعه با تغییر در فرهنگ و رسوم آنها دارند. این سیاست منجر به گرایش کشورهای در حال توسعه به طرف کشورهای توسعه یافته می‌شود. در شکل ۱ این پدیده به تصویر کشیده شده است [۱۰].

در شکل ۱، پارامترهای  $\theta$  و  $x$  اعدادی تصادفی با توزیع یکنواخت و  $d$  فاصله بین کشور در حال توسعه و توسعه یافته است (روابط (۵) و (۶)).

$$x \sim U(0, \beta \times d), \beta > 1 \quad (5)$$

$$\theta \sim U(-\gamma, \gamma) \quad (6)$$



شکل ۱ حرکت کشور در حال توسعه به سمت کشور توسعه یافته [۱۰]

الگوریتم نظیر سایر روش‌های بهینه‌سازی هیورستیک با یک جمعیت اولیه آغاز می‌شود. در این الگوریتم هر عنصر جمعیت یک کشور (معادل کروموزوم در الگوریتم ژنتیک) نامیده می‌شود. کشورها نیز در آن به دو دسته کشورهای در حال توسعه<sup>۱</sup> و کشورهای توسعه یافته<sup>۲</sup> تقسیم می‌شوند. هر کشور توسعه یافته، بسته به قدرت خود، تعدادی از کشورهای در حال توسعه را به سلطه خود در آورده و در مجموع یک امپراطوری را تشکیل می‌دهند.

برای پیاده سازی این الگوریتم، در ابتدا یک آرایه  $1 \times N_{var}$  بعدی (کشور) از متغیرهای مسئله  $(p_1, p_2, \dots, p_{N_{var}})$  در نظر گرفته می‌شود.

$$Country = [p_1, p_2, p_3, \dots, p_{N_{var}}] \quad (1)$$

در حل یک مسئله بهینه‌سازی، این روش به دنبال یافتن کشوری با بهترین موقعیت می‌باشد. یافتن این کشور، در حقیقت معادل یافتن بهترین پارامترهای مسئله است که کمترین مقدار تابع هزینه را تولید می‌کنند. هزینه یک کشور با ارزیابی تابع هزینه  $f$  در متغیرهای طراحی به دست می‌آید (رابطه (۲)).

$$cost_i = f(country_i) = f(p_1, p_2, \dots, p_{N_{var}}) \quad (2)$$

برای شروع الگوریتم، تعداد  $N_{coun}$  کشور اولیه به صورت تصادفی ایجاد می‌شود. تعداد ( $N_{imp}$ ) تا از بهترین اعضای این جمعیت (کشورهای دارای کمترین مقدار تابع هزینه) به عنوان کشورهای توسعه یافته انتخاب شده و بقیه آنها ( $N_{col}$ )، کشورهای در حال توسعه را تشکیل می‌دهند. برای تقسیم کشورهای در حال توسعه اولیه بین امپراطوری‌ها، به هر امپراطوری تعدادی کشور متناسب با قدرت آنها تعلق می‌گیرد. تعداد اولیه کشورهای در حال توسعه یک امپراطوری به صورت رابطه (۳) تعیین می‌شود [۹].

$$N \cdot C_n = round \left\{ \frac{cost_{t_n}}{\sum_{i=1}^{N_{imp}} cost_{t_i}} \times N_{col} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_{imp} \quad (3)$$

1. Colony
2. Imperialist

رولت دارای هزینه محاسباتی بسیار کمتری می‌باشد. این مکانیزم، عملیات نسبتاً زیاد مربوط به محاسبه تابع توزیع جمعی احتمال<sup>۱</sup> که در چرخه رولت مورد نیاز است را حذف می‌کند و فقط به داشتن تابع چگالی احتمال<sup>۲</sup> نیاز دارد [۱۱]. در نهایت الگوریتم رقابت استعماری منجر به حالتی می‌شود که تنها یک امپراطوری باقی می‌ماند. این حالت در الگوریتم رقابت استعماری وقتی اتفاق می‌افتد که به نقطه بهینه برسد و الگوریتم متوقف شود. در شکل ۲ فلوچارت روش بهینه‌سازی رقابت استعماری آورده شده است.

### ۳- تعریف و تحلیل مسئله

در حالت کلی ساپورت‌های سازه به‌منظور جلوگیری از خیز بیش از حد سازه به کار می‌رود. در بهینه‌سازی موقعیت ساپورت‌های سازه باید به موارد زیر توجه شود.

- موقعیت ساپورت‌های سازه باید در یک دامنه تعریف شده مشخص قرار گیرد.
  - موقعیت ساپورت‌ها به دلایل مختلف از جمله تقارن سازه، شرایط هندسی، محدودیت در تعداد ساپورت‌ها می‌تواند با هم ارتباط داشته باشد.
  - با تغییر محل ساپورت‌های سازه، محل اعمال ممان خمشی حداکثر، علامت و مقدار آن تغییر می‌کند.
  - هدف مسئله مینیمم کردن حداکثر ممان خمشی سازه تحت اثر بارهای مختلف است.
- با توجه به موارد فوق، مسئله بهینه‌سازی موقعیت ساپورت‌های سازه را از لحاظ ریاضی می‌توان به صورت رابطه (۹) بیان کرد.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } |MBM| \\ \text{s.t.} & \begin{cases} S_{Lj} \leq S_j \leq S_{Uj}, j = 1, \dots, m \\ S_d = f(S_j), d = 1, \dots, l \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه فوق  $S_j$  موقعیت  $j$ امین ساپورت مستقل،  $S_d$  موقعیت  $d$ امین ساپورت وابسته،  $S_{Lj}$  و  $S_{Uj}$  به ترتیب حد پایین و بالا برای موقعیت ساپورت‌ها،  $m$  تعداد ساپورت‌های مستقل سازه و  $l$  تعداد ساپورت‌های با موقعیت وابسته نسبت به دیگر ساپورت‌های سازه می‌باشد.

در روابط فوق،  $\beta$  و  $\gamma$  اعداد اختیاری بوده و معرف محدوده‌ای است که کشورهای در حال توسعه به‌طور تصادفی در اطراف کشور توسعه یافته در حال جستجو می‌باشند. اگر در حین این حرکت، یک کشور در حال توسعه‌ای نسبت به کشور توسعه یافته، به موقعیت بهتری دست پیدا کند، جای آن دو باهم عوض می‌شود. به عبارتی کشور در حال توسعه، کل کشورهای آن امپراطوری را تحت سلطه خود در می‌آورد و به یک کشور توسعه یافته تبدیل می‌شود.

بر اساس رقابت استعماری، هر امپراطوری که نتواند بر قدرت خود بیفزاید و قدرت رقابت خود را از دست بدهد، حذف خواهد شد. این حذف شدن، به صورت تدریجی صورت می‌گیرد. بدین معنی که به مرور زمان، امپراطوری‌های ضعیف، کشورهای در حال توسعه خود را از دست داده و امپراطوری‌های قوی‌تر، این کشورها را جذب کرده و بر قدرت خویش می‌افزایند. برای تصاحب کشورهای در حال توسعه امپراطوری ضعیف‌تر، رقابتی میان کلیه امپراطوری‌ها ایجاد می‌شود. برای محاسبه احتمال تصاحب این کشورها توسط هر امپراطوری، ابتدا باید از روی هزینه کل هر امپراطوری، هزینه نرمالیزه شده آن را تعیین کرد (رابطه (۷)).

$$N \cdot T \cdot C_n = \max_i \{T \cdot C_n\} - T \cdot C_n \quad (7)$$

در این رابطه  $T \cdot C_n$  هزینه کل امپراطوری  $n$ ام و  $N \cdot T \cdot C_n$  هزینه کل نرمالیزه شده آن امپراطوری می‌باشد. حال با داشتن هزینه کل نرمالیزه شده، احتمال تصاحب کشور در حال توسعه، توسط هر امپراطوری از رابطه (۸) به‌دست می‌آید.

$$P_{p_n} = \frac{N \cdot T \cdot C_n}{\sum_{i=1}^{N_{imp}} N \cdot T \cdot C_n}, n = 1, 2, \dots, N_{imp} \quad (8)$$

باید توجه داشت که کشورهای در حال توسعه مذکور توسط قویترین امپراطوری، تصاحب نخواهد شد، بلکه امپراطوری‌های قوی‌تر، احتمال تصاحب بیشتری دارند.

با داشتن احتمال تصاحب هر امپراطوری، مکانیزمی همانند چرخه رولت مورد نیاز است تا کشور در حال توسعه مورد رقابت را با احتمالی متناسب با قدرت امپراطوری‌ها در اختیار یکی از آنها قرار دهد. در کنار امکان استفاده از چرخ رولت، مکانیزم جدیدی در این فرایند استفاده شده است که نسبت به چرخ

1. Cumulative Distribution Function (CDF)  
2. Probability Density Function (PDF)

استفاده شده است. پیاده‌سازی این روش به کمک کدنویسی در نرم‌افزار متلب انجام شده است. با توجه به اینکه مثال‌های در نظر گرفته شده در اینجا تحت بارگذاری چندگانه می‌باشند، برای محاسبه مقدار تابع هدف ابتدا تحلیل مسئله به ازای تمام حالت‌های بارگذاری‌ها انجام می‌گیرد و مقدار حداکثر ممان خمشی در کل سازه در هر حالت بارگذاری محاسبه می‌شود. در این صورت مقدار تابع هدف برابر با حداکثر ممان خمشی به دست آمده به ازای تمام حالت‌های بارگذاری می‌باشد. در شکل ۳ فلوجارت چگونگی محاسبه مقدار تابع هدف برای سازه-ای تحت  $n$  حالت بارگذاری ارائه شده است. در فلوجارت روش رقابت استعماری (شکل ۲) در خانه‌هایی که نیاز به استفاده از فلوجارت شکل ۳ می‌باشد، علامت \* استفاده شده است. به علت درک بهتر چگونگی عملکرد روش المان محدود اصلاح یافته، در بخش بعدی در حین حل مثال‌های عددی به توضیح این روش پرداخته می‌شود.

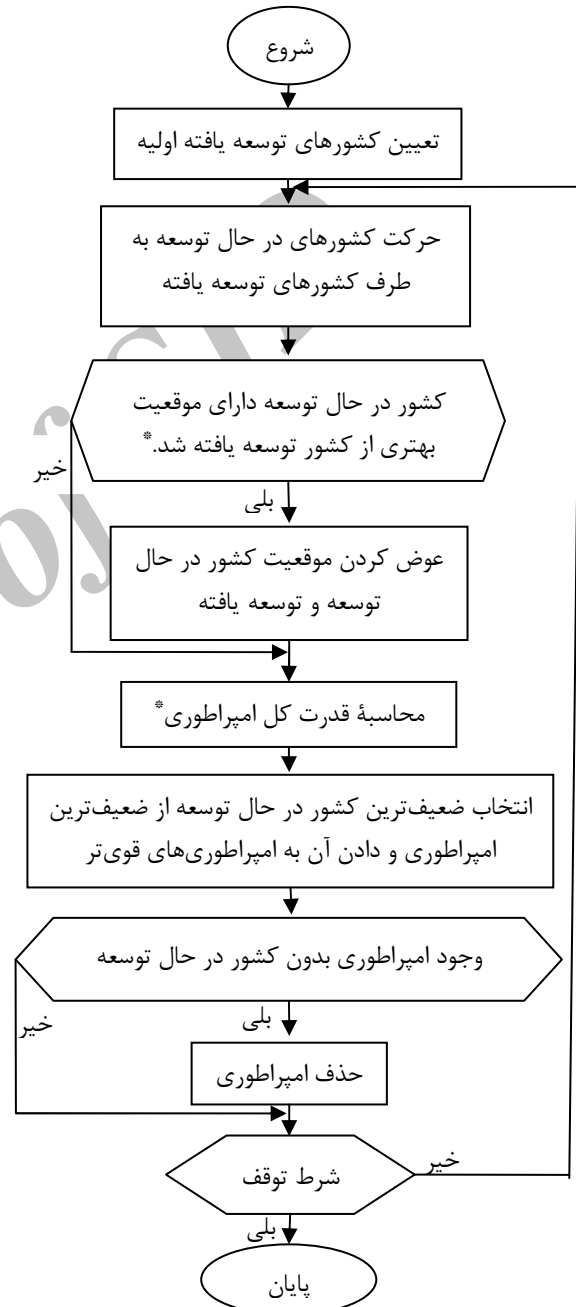
#### ۴- مثال‌های عددی

##### ۴-۱- تیر با ساپورت ساده

در این بخش برای نشان دادن کارایی و مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با روش‌های گذشته، سازه شکل ۴ که وانگ [۱] موقعیت بهینه ساپورت‌های آن را با استفاده از آنالیز حساسیت به دست آورد، در نظر گرفته شده است. این سازه یک تیر یکنواخت به طول ۲ متر با دو ساپورت ساده و دارای سطح مقطع مربعی به طول  $a=0.1m$  و مدول الاستیسیته  $E=210Gpa$  است. تیر تحت بارهای مختلف قرار گرفته است. به دلیل تقارن در شکل هندسی و بارگذاری سازه، موقعیت ساپورت‌ها برای رسیدن به کمترین مقدار ممان خمشی حداکثر نیز باید به صورت متقارن قرار بگیرند. بنابراین برای تعیین موقعیت بهینه ساپورت‌های این سازه، متغیر طراحی  $X/L$  در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن حداکثر ممان خمشی از روش المان محدود، تیر به ۲۰ المان تقسیم شده است.

وانگ [۱] برای به دست آوردن موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه، در ابتدا آنالیز حساسیت ممان خمشی در اثر تغییر موقعیت ساپورت‌های سازه را با استفاده از روش متغیرهای کمکی<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار داد [۱۲] و سپس با استفاده از روش

در رابطه (۹) عبارت  $|MBM|$  مقدار قدرمطلق حداکثر ممان خمشی در کل اعضای سازه است. چون با عوض شدن محل ساپورت‌ها مقدار ممان از مثبت به منفی و یا بالعکس تغییر می‌کند، تابع هدف قدرمطلق ممان در نظر گرفته شده است.



شکل ۲ فلوجارت روش بهینه‌سازی رقابت استعماری

در این مقاله برای تحلیل مسئله و محاسبه مقدار ممان خمشی حداکثر در سازه از روش المان محدود اصلاح یافته

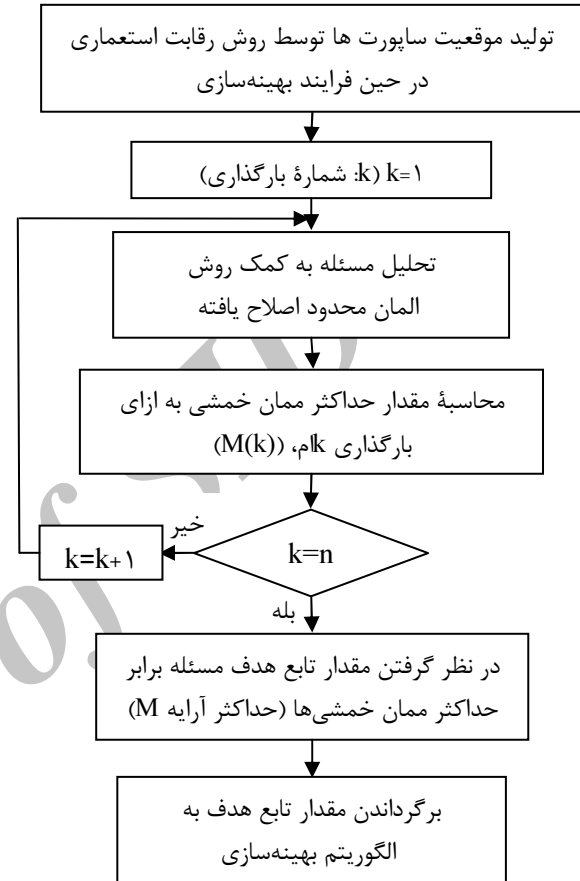
1. Adjoint Variable

حساسیت هستند منتقل می‌شوند. این روند تا رسیدن به حالتی که ساپورت بین دو گره خاص به صورت متناوب منتقل شود، ادامه می‌یابد.

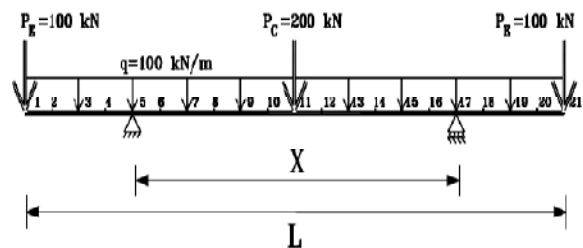
در این مقاله برای به دست آوردن موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه با استفاده از روش بهینه‌سازی رقابت استعماری در ابتدا ۳۰ کشور به صورت تصادفی انتخاب شد. از این تعداد، ۴ کشور توسعه یافته و بقیه آنها به‌عنوان کشورهای در حال توسعه در نظر گرفته شده‌اند.

در شکل ۵ چگونگی روند رسیدن به نقطه بهینه برای سازه شکل ۴ با دو ساپورت ساده آورده شده است. در این حالت نقطه بهینه به ازای  $\frac{X}{L} = 0.16409$  و مقدار حداکثر ممان خمشی  $42/347 \text{ kNm}$  به دست می‌آید. بنابراین موقعیت بهینه ساپورت‌ها باید در  $x_1 = 0.3591 \text{ m}$  و  $x_2 = 1/6409 \text{ m}$  نسبت به دو انتهای سازه قرار گیرند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه بر روی گره‌های اولیه سازه که در شکل ۴ نشان داده شده قرار ندارد. به همین دلیل در این مقاله، روش المان محدود اصلاح یافته ارائه شده است. در این روش بدون تغییر دادن المان‌بندی کل سازه صرفاً با جابجایی نزدیکترین گره به موقعیت ساپورت‌ها علاوه بر امکان قرارگیری ساپورت در هر نقطه دلخواهی در سازه، از مش‌بندی دوباره کل سازه که باعث تغییر در تمام درایه‌های ماتریس سختی می‌شود، جلوگیری می‌کند. این اصلاح انجام شده در تحلیل المان محدود سازه، باعث بالا رفتن سرعت همگرایی الگوریتم و کاهش حجم محاسبات برای یافتن موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه به‌طور قابل توجهی می‌شود. در روش ارائه شده توسط وانگ [۱]، ساپورت‌ها حتماً باید بر روی گره‌های اولیه سازه قرار بگیرند و برای رسیدن به جواب دقیق‌تر مسئله، باید مش‌بندی را ریز و ریزتر کرد که این مورد باعث تغییر کامل ماتریس سختی در حین فرایند بهینه‌سازی شده و حجم محاسبات را بالاتر برده و از سرعت همگرایی الگوریتم بهینه‌سازی می‌کاهد. علاوه بر این، در این روش اگر در طی مراحل بهینه‌سازی، الگوریتم به بهینه محلی برسد، آنگاه توانایی فرار از آن را ندارد و نقطه بهینه محلی را به عنوان نقطه بهینه مسئله اعلام می‌کند. با استفاده از ترکیب روش المان محدود اصلاح یافته و روش رقابت استعماری، الگوریتم توانایی فرار از نقطه بهینه

بهینه‌سازی ابداعی خود با نام انتقال تکاملی [۱۳] به مینیمم کردن ممان خمشی حداکثر می‌پردازد.



شکل ۳ فلوجارت چگونگی محاسبه تابع هدف در مسئله



شکل ۴ تیر یکنواخت ساده با دو ساپورت ساده [۱]

در روش انتقال تکاملی ابتدا هر یک از ساپورت‌ها بر روی یکی از گره‌های سازه قرار می‌گیرد. بعد از محاسبه مقدار حساسیت ممان خمشی حداکثر نسبت به موقعیت ساپورت‌ها، ساپورت‌ها بر روی یکی از گره‌های همسایه خود که دارای بیشترین مقدار

## 1. Evolutionary Shift

محل را داشته و با احتمال بالایی به نقطه بهینه سراسری مسئله همگرا خواهد شد. روش ارائه شده در این مقاله را می‌توان به ازای هر نوع ساپورت از جمله گیردار، مفصلی، ساده و یا ترکیبی از ساپورت‌های مختلف به کار برد و موقعیت بهینه آنها را به‌دست آورد. به همین منظور در این جا موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه شکل ۴ برای حالت‌های مختلف با در نظر گرفتن ساپورت ساده و گیردار و همچنین با و بدون در نظر گرفتن قید تقارن سازه، در نظر گرفته شده است. در جدول ۱ نتایج حاصل از حل این حالت‌ها و مقایسه نتایج با مرجع [۱] و حل تحلیلی آورده شده است (در پیوست الف چگونگی محاسبه موقعیت بهینه ساپورت‌ها به روش تحلیلی ارائه شده است).

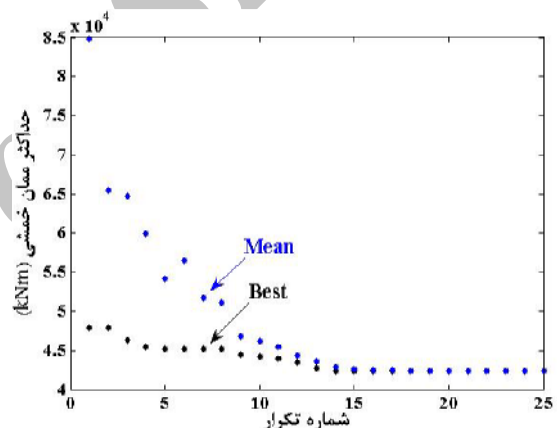
#### ۴-۲- سازه اسکلتی با دو ساپورت الاستیک

##### ۴-۲-۱- حالت اول

در این مثال یک سازه اسکلتی تحت بارگذاری چندگانه در نظر گرفته شده است. در حالت اول بارگذاری، یک نیروی گسترده با شدت  $w = 30 \text{ kN/m}$  بر روی تمام اعضای بالایی سازه به صورت شکل ۶ اعمال می‌شود. در حالت دوم بارگذاری، چهار نیروی متمرکز بر روی سازه اعمال می‌شود. اعضای سازه نیز به دو گروه تقسیم می‌شوند. اعضای قطری دارای سطح مقطع دایره با قطر  $D = 200 \text{ mm}$  و بقیه اعضا دارای سطح مقطع لوله‌ای با قطر خارجی  $D_o = 80 \text{ mm}$  و قطر داخلی  $D_i = 60 \text{ mm}$  می‌باشند. مدول الاستیسیته تمام اعضای سازه نیز برابر با  $E = 210 \text{ Gpa}$  در نظر گرفته شده است. هدف این مثال یافتن موقعیت بهینه دو ساپورت الاستیک با سختی  $5 \text{ MN/m}$  بر روی اعضای پایینی سازه برای کاهش حداکثر ممان خمشی سازه می‌باشد. در اینجا فرض بر این است که فاصله بین دو ساپورت برابر یک متر می‌باشد. این فرض باعث کاهش تعداد متغیرهای طراحی مسئله می‌شود. برای حل این مسئله به کمک روش المان محدود اصلاح یافته علاوه بر گره‌های در نظر گرفته شده در سازه شکل ۶، در وسط اعضای پایینی سازه نیز یک گره در نظر گرفته شده است. در صورتی که موقعیت ساپورت‌ها بین اعضای سازه قرار گیرد، گره وسط عضو به محل ساپورت انتقال یافته و مسئله به کمک روش المان محدود اصلاح یافته حل می‌شود.

مقدار حداکثر ممان خمشی در سازه در حالت بدون ساپورت الاستیک برابر با  $8/68 \text{ kNm}$  در حالت بارگذاری دو در

محل را داشته و با احتمال بالایی به نقطه بهینه سراسری مسئله همگرا خواهد شد. روش ارائه شده در این مقاله را می‌توان به ازای هر نوع ساپورت از جمله گیردار، مفصلی، ساده و یا ترکیبی از ساپورت‌های مختلف به کار برد و موقعیت بهینه آنها را به‌دست آورد. به همین منظور در این جا موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه شکل ۴ برای حالت‌های مختلف با در نظر گرفتن ساپورت ساده و گیردار و همچنین با و بدون در نظر گرفتن قید تقارن سازه، در نظر گرفته شده است. در جدول ۱ نتایج حاصل از حل این حالت‌ها و مقایسه نتایج با مرجع [۱] و حل تحلیلی آورده شده است (در پیوست الف چگونگی محاسبه موقعیت بهینه ساپورت‌ها به روش تحلیلی ارائه شده است).



شکل ۵ روند رسیدن به موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه

جدول ۱ مقایسه نتایج برای موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه شکل ۴

MBM (KNm)	$x_2$ (m)	$x_1$ (m)	$\frac{X}{L}$	
۴۸	۱/۶	۰/۴	۰/۶	وانگ [۱]
۴۲/۳۴۷	۱/۶۴۰۹	۰/۳۵۹۱	۰/۶۴۰۹	الف
۴۴/۳۵۳	۱/۶۲۶۰	۰/۳۷۴۰	۰/۶۲۶۰	ب ICA
۴۲/۸۰۳	۱/۶۴۴۲	۰/۳۶۸۹	-	پ
۴۳/۶۴۴	۱/۶۳۱۲	۰/۳۹۹۸	-	ت
۴۲/۳۳۰	۱/۶۴۱۱	۰/۳۵۸۹	۰/۶۴۱۱	حل تحلیلی

[۱]، الف، حل تحلیلی: ساپورت‌ها ساده- با قید تقارن سازه  
ب: ساپورت‌ها گیردار- با در نظر گرفتن قید تقارن سازه  
پ: ساپورت‌ها ساده- بدون در نظر گرفتن قید تقارن سازه  
ت: ترکیب ساپورت ساده و گیردار، عدم تقارن در سازه

می‌توانند در هر نقطه‌ای روی اعضای پایینی سازه قرار بگیرند. در شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب چگونگی روند رسیدن به سازه بهینه و شکل این سازه با موقعیت بهینه ساپورت‌ها به کمک ترکیب روش المان محدود اصلاح یافته و روش بهینه‌سازی رقابت استعماری آورده شده است.

در شکل ۹، گره‌های ۱۵ و ۲۴ از محل خود در وسط اعضا بر روی محل بهینه ساپورت‌ها انتقال پیدا کرده‌اند. در جدول ۳ مقایسه بین نتایج به دست آمده به کمک روش حاضر و [۱] ارائه شده است. در این حالت نیز هر دو روش به مقدار حداکثر ممان خمشی تقریباً یکسان (خطایی کمتر از ۰/۰۸ درصد) همگرا شده‌اند.

جدول ۲ مقایسه نتایج برای موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه اسکلتی حالت اول

محل اعمال (گره)	$MBM$ (KNm)	$s$ (m)	
۱۶	۳/۹۸	۶	وانگ [۱]
۲۲	۳/۹۸۳	۵/۹۹۸	ICA

جدول ۳ مقایسه نتایج برای موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه اسکلتی حالت دوم

محل اعمال (گره)	$MBM$ (KNm)	$s_2$ (m)	$s_1$ (m)	
۴	۳/۹۰	۸	۴	وانگ [۱]
۴	۳/۹۰۳	۷/۹۸۹	۴/۰۱۷	ICA

گره شماره ۴ سازه شکل ۶ اتفاق می‌افتد. با اعمال ساپورت الاستیک به سازه و تغییر موقعیت آنها، مقدار و محل اعمال حداکثر ممان خمشی و حالت بارگذاری که منجر به حداکثر ممان خمشی می‌شود، تغییر می‌کند.

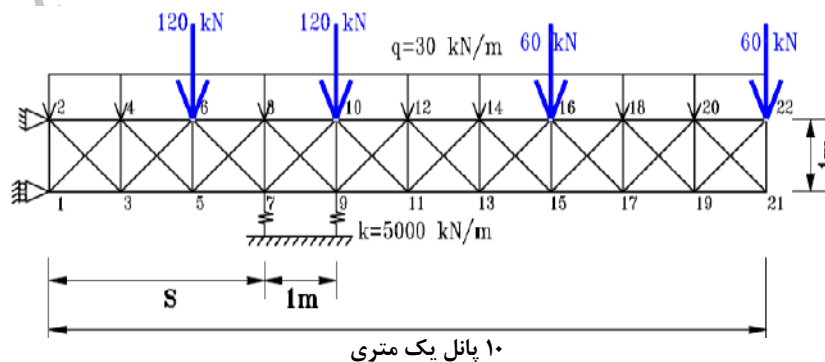
در شکل ۷ مقدار بهترین حل و میانگین حل‌های به دست آمده در تکرارهای مختلف فرایند بهینه‌سازی آورده شده است. در جدول ۲ مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده با استفاده از روش حاضر و [۱] ارائه شده است.

در این حالت مقدار حداکثر ممان خمشی به دست آمده توسط هر دو روش تقریباً یکسان (خطایی کمتر از ۰/۰۸ درصد) بوده و محل اعمال آن نیز در یک گره به دست آمده است (با مقایسه بین المان‌بندی سازه‌های شکل ۶ و ۹ گره ۲۲ در المان‌بندی این مقاله منطبق بر گره ۱۶ در المان‌بندی [۱] می‌باشد).

علت یکسانی مقدار حداکثر ممان خمشی در دو روش در این است که با قرار گرفتن ساپورت‌ها در وسط اعضا، به علت اعمال یک نیروی متمرکز در بین عضو مقدار حداکثر ممان خمشی افزایش پیدا می‌کند. بنابراین برای رسیدن به کمترین مقدار حداکثر ممان خمشی، ساپورت‌ها باید بر روی انتهای اعضا (مفاصل سازه) قرار گیرند.

#### ۴-۲-۲-۴ حالت دوم

در این مثال همان سازه شکل ۶ با مشخصات داده شده در حالت اول در نظر گرفته شده است. تفاوت این حالت در این است که موقعیت دو ساپورت الاستیک به هم وابسته نبوده و



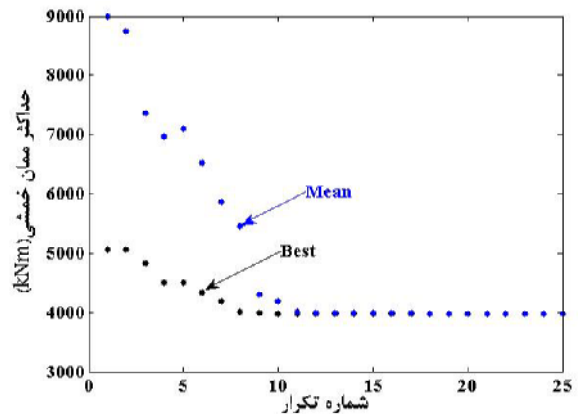
شکل ۶ سازه اسکلتی با دو ساپورت الاستیک تحت بارگذاری چندگانه [۱]



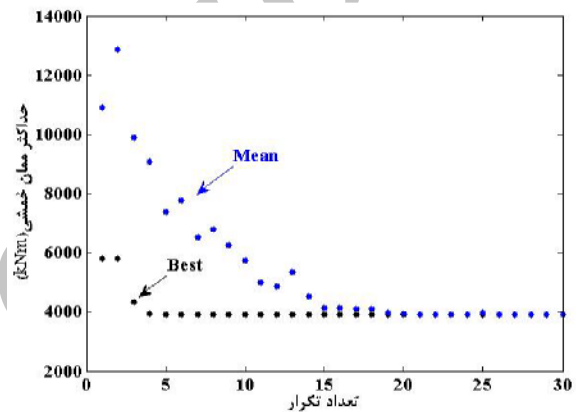
بهینه ساپورت‌ها می‌توان ممان خمشی حداکثر سازه را به‌طور قابل توجهی کاهش داد.

در مقالات گذشته محققان برای یافتن محل بهینه ساپورت‌های سازه از روش‌های بهینه‌سازی بر پایه آنالیز حساسیت استفاده کرده‌اند. با توجه به اینکه مقدار و محل اعمال حداکثر ممان خمشی نسبت به تغییر موقعیت ساپورت‌ها تابعی شدیداً غیرخطی و بد رفتار است و در روش‌های بهینه‌سازی بر پایه آنالیز حساسیت باید در مراحل بهینه‌سازی از مشتق ممان خمشی حداکثر نسبت به محل ساپورت‌ها بهره برد، استفاده از این روش‌ها باعث پیچیده شدن محاسبات شده و مسئله به سختی به جواب بهینه همگرا می‌شود. علاوه بر این روش‌های بهینه‌سازی بر پایه آنالیز حساسیت از جمله روش انتقال تکاملی استفاده شده در [۱]، توانایی فرار از دام نقطه بهینه محلی را نداشته و با احتمال بالایی در نهایت به تقریبی از محل بهینه ساپورت‌ها همگرا می‌شود. از طرف دیگر در روش‌های گذشته ساپورت‌ها فقط می‌توانستند بر روی گره‌های سازه قرار گیرند و برای رسیدن به نقطه بهینه سراسری باید در حین فرایند بهینه‌سازی المان‌بندی سازه را ریز و ریزتر کرد. در این صورت حجم محاسبات بالا رفته و سرعت همگرایی الگوریتم پایین می‌آید.

با توجه به موارد ذکر شده در این مقاله از ترکیب روش بهینه‌سازی رقابت استعماری و المان محدود اصلاح یافته بهره گرفته شده است. روش رقابت استعماری روشی قدرتمند بوده و با احتمال بالایی به موقعیت بهینه سراسری ساپورت‌ها همگرا می‌شود و در طی مراحل بهینه‌سازی نیازی به محاسبه مقدار مشتق تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی نداشته و به راحتی می‌توان آن را به‌صورت برنامه کامپیوتری پیاده‌سازی کرد.



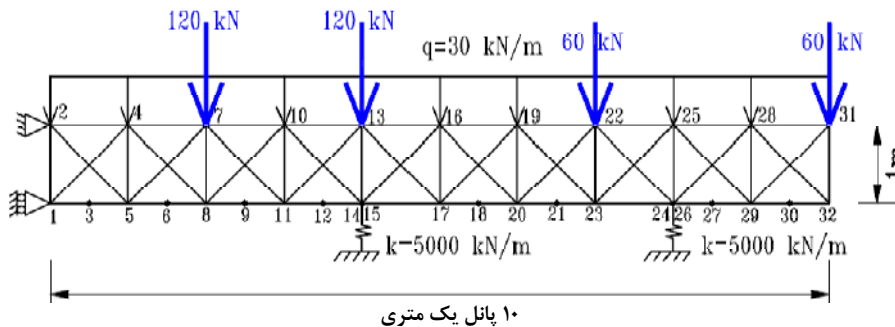
شکل ۷ روند رسیدن به سازه بهینه برای سازه اسکلتی حالت اول



شکل ۸ روند رسیدن به سازه بهینه برای سازه اسکلتی حالت دوم

## ۵- نتیجه‌گیری

در بسیاری از کاربردهای عملی مهندسی، مقدار حداکثر ممان خمشی در سازه‌ها همواره یکی از مهمترین پارامترها برای طراحی مناسب آنها بوده است. به همین دلیل مهندسان به دنبال راه حلی جهت کاهش حداکثر ممان خمشی به‌منظور رسیدن به یک طراحی بهینه هستند. با به‌دست آوردن موقعیت



شکل ۹ سازه اسکلتی با موقعیت بهینه ساپورت‌های الاستیک

## ۷- تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از حمایت‌های بی‌دریغ دفتر استعداد‌های درخشان دانشگاه سمنان تشکر و قدردانی می‌نمایند.

## ۸- مراجع

- [1] Wang D., "Optimal Design of Structural Support Positions for Minimizing Maximal Bending Moment", *Finite Elements in Analysis and Design*; Vol.43, 2006, pp. 95-102.
- [2] Imam M. H. and Al-Shihri M., "Optimum Topology of Structural Supports", *Int. J. of Comp and Struc.*; Vol.61, 1996, pp. 147-154.
- [3] Wang D., "Optimization of Support Position to Minimize the Maximal Deflection of Structures", *Int. J. of solids and struc.*; Vol.41, 2004, pp. 7445-7458.
- [4] Won K. M. and Park Y. S., "Optimal Support Positions for a Structure to Maximize Its Fundamental Natural Frequency", *J. of Sound and Vibration*; Vol.213, 1998, pp. 801-812.
- [5] Wang D., Friswell M. I. and Lei Y., "Maximizing the Natural Frequency of Beam with an Intermediate Elastic Support", *J. of Sound and Vibration*; Vol.291, 2006, pp. 1229-1238.
- [6] Liu Hu, H. C. and Huang C., "Derivative of Buckling Load with Respect to Support Locations", *J. of Eng. Mech.*; Vol.126, 2000, pp. 559-564.
- [7] Marcelin M. A., "Genetic Search Applied to Selecting Support Positions in Machining of Mechanical Parts", *J. of Adv. Manuf. Tech.*; Vol.17, 2001, pp. 344-347.
- [8] Perezzan J. C. and Hernandez S., "Analytical Expressions of Sensitivities for Shape Variables in Linear Bending Systems", *Adv. Eng. Soft.*; Vol.34, 2003, pp. 271-278.
- [9] Atashpaz-Gargari E. and Lucas C., "Imperialist Competitive Algorithm: an Algorithm for Optimization Inspired by Imperialistic Competition", *In: IEEE congress on evolutionary computation*, Singapore; 2007, pp. 4661-4667.
- [10] Khabbazi A., Atashpaz-Gargari E. and Lucas C., "Imperialist Competitive Algorithm for Minimum Bit Error Rate Beamforming", *Int. J. Bio-Inspired Computation*, 2009, pp. 125-133.
- [11] Kaveh A. and Talatahari S., "Optimum Design of Skeletal Structures Using Imperialist Competitive Algorithm", *Computers and Structures*, Vol.88, 2010, pp.1220-1229.
- [12] Haftka R.T. and Gurdal Z., *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [13] Wang D., Zhang W. H. and Jiang J. S., "Truss Shape Optimization with Multiple Displacement Constraints", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.191. 2002, pp. 3597-3612.

روش‌های بهینه‌سازی در یافتن نقطه بهینه در مسائل با متغیرهای طراحی گسسته نسبت به مسائل با متغیرهای طراحی پیوسته با مشکل مواجه می‌شوند. در صورتی که برای تحلیل مسئله از روش المان محدود اصلاح یافته استفاده نشود، ساپورت باید حتماً بر روی گره‌های سازه قرار گیرند، بنابراین متغیرهای طراحی به صورت گسسته تغییر می‌کنند و کارایی و قدرت روش بهینه‌سازی کاهش پیدا می‌کند. در روش المان محدود اصلاح یافته ارائه شده در این جا، ساپورت‌های سازه می‌توانند در هر نقطه دلخواهی بر روی سازه قرار گیرند، بنابراین روش المان محدود اصلاح یافته باعث تبدیل متغیرهای طراحی مسئله از گسسته به پیوسته می‌شود.

از طرفی دیگر استفاده از روش المان محدود اصلاح یافته علاوه بر کاهش حجم محاسبات تحلیل سازه، امکان رسیدن به موقعیت بهینه سراسری ساپورت‌ها را بدون نیاز به ریز کردن و تغییر در المان‌بندی سازه فراهم می‌کند.

## ۶- پیوست الف

در این بخش برای تأیید روش ارائه شده، محل بهینه ساپورت‌های سازه شکل ۳ به صورت تحلیلی تعیین شده است. محل اعمال حداکثر ممان خمشی در سازه بین دو نقطه موقعیت ساپورت‌ها و وسط سازه تغییر می‌کند. در روابط (الف-۱) و (الف-۲) به ترتیب مقدار ممان خمشی در محل ساپورت‌ها و مرکز سازه آورده شده است.

$$M_s = -P_E \frac{L-X}{2} - \frac{1}{2}q \left( \frac{L-X}{2} \right)^2 \quad (\text{الف-۱})$$

$$M_c = R_A \frac{X}{2} - P_E \frac{L}{2} - \frac{1}{2}q \left( \frac{L}{2} \right)^2 \quad (\text{الف-۲})$$

زمانی موقعیت ساپورت‌های سازه بهینه است که مقدار ممان خمشی در این دو نقطه باهم برابر شود.

$$-P_E \frac{L-X}{2} - \frac{1}{2}q \left( \frac{L-X}{2} \right)^2 = R_A \frac{X}{2} - P_E \frac{L}{2} - \frac{1}{2}q \left( \frac{L}{2} \right)^2 \quad (\text{الف-۳})$$

با حل معادله (الف-۳) موقعیت بهینه ساپورت‌های سازه و مقدار حداکثر ممان خمشی در آنها به دست می‌آید.

$$\frac{X}{L} = 0.6411 \quad (\text{الف-۴})$$

$$M_s = 42.330 \text{ kNm} \quad (\text{الف-۵})$$