

سینماتیک مستقیم دو ربات موازی 4-RRUR با دو ساختار هندسی متفاوت و یک ربات 4-RUU

پیام ورشوی جاغرق^۱، داود نادری^{۲*}، مهدی طالع ماسوله^۳

۱- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

* همدان، صندوق پستی ۴۱۶۱-۶۵۱۷۵، d_naderi@basu.ac.ir

چکیده- در این مقاله، سینماتیک مستقیم حالت خاصی از مکانیزم‌های موازی $4-R'R'R'R'$ ، $4-R'R'R'R'$ و $4-R'R'R'R'$ که به ترتیب منجر به دو ربات موازی فضایی ۴ درجه آزادی با دو ساختار هندسی متفاوت به نام 4-RRUR و یک ربات موازی فضایی ۴ درجه آزادی به نام 4-RUU گردیده‌اند، مورد مطالعه قرار گرفته است. این ربات‌ها حاصل سنتز انجام‌شده بر روی مکانیزم‌های موازی ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی می‌باشند. هر یک از این ربات‌ها از چهار زنجیره سینماتیکی یکسان و هر زنجیره از پنج مفصل لولایی تشکیل شده است. راستای مفاصل لولایی در این سه ربات با یکدیگر متفاوت بوده و باعث ایجاد سه ساختار هندسی متفاوت گردیده است. تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم این ربات‌های موازی در فضای اقلیدسی سه‌بعدی انجام گرفته و در نهایت نشان داده شده است که یک عبارت جبری تک‌متغیره از درجه ۳۴۴، ۲۳۰ و ۸ به ترتیب مبین سینماتیک مستقیم هر یک از ربات‌ها می‌باشد. همچنین، این نتایج با حل سینماتیک معکوس و شبیه‌سازی مقایسه شده و صحت آن به اثبات رسیده است.

کلیدواژه‌گان: ربات موازی فضایی، الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی، سینماتیک مستقیم، فضای اقلیدسی سه‌بعدی

Forward kinematic problem of two 4-RRUR with different geometric structures and one 4-RUU parallel robots

P. Varshovi Jaghargh¹, D. Naderi^{2*}, M. Tale Masouleh³

1- PhD Student, Mech. Eng., Bu-Ali Sina Univ., Hamedan, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Bu-Ali Sina Univ., Hamedan, Iran

3- Assis. Prof., Mech. Eng., Tehran Univ., Tehran, Iran

* P. O. B. 65175-4161 Hamedan, d_naderi@basu.ac.ir

Abstract- In this paper, the forward kinematic of the special cases of $4-R'R'R'R'$, $4-R'R'R'R'$ and $4-R'R'R'R'$ parallel mechanisms that respectively lead to two 4-RRUR with different geometric structures and one 4-RUU spatial 4-DOF parallel robots has been studied. They are originated from the type synthesis of 4-DOF parallel mechanisms with motion patterns of 3T1R. Each of them is composed of four kinematic chains and each chain consists of five revolute joints. The directions of revolute joints have been different with each others that create three different geometrical structures. The forward kinematic problem is done in three dimensional Euclidean space and finally, a univariate mathematical expression of degree 344, 230 and 8 is indicated the forward kinematic problem of each parallel robot. Also, the results are compared with inverse kinematic problem and simulations and their validity have been confirmed.

Keywords: Parallel Robot, 3T1R Motion Pattern, Forward Kinematic Problem, Three-Dimensional Euclidean Space

۱- مقدمه

ربات موازی مکانیزم حلقه بسته‌ای است که در آن سکوی متحرک به وسیله حداقل دو زنجیره سینماتیکی سری به سکوی ثابت متصل شده است. این مکانیزم‌ها دارای برتری‌هایی از قبیل صلبیت، دقت و نسبت تحمل نیرو به وزن بالا در مقایسه با ربات‌های سری هستند [۱]. ربات‌های موازی در چند دهه اخیر، به دلیل کاربرد بسیار زیاد، مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. شبیه‌ساز پرواز [۲،۳]، ابزار و ماشین‌آلات [۴]، میکروروبات‌ها و نانوربات‌ها [۴] از جمله کاربردهای آن‌ها محسوب می‌شوند. همچنین فضای کاری کوچک‌تر نسبت به ربات‌های سری، کنترل پیچیده مجری نهایی و تعدد نقاط تکین در داخل فضای کاری از معایب این نوع ربات‌ها به حساب می‌آیند [۱].

تا به امروز، بیشتر کارهای تئوری و عملی انجام‌شده بر روی ربات‌های موازی ۳ درجه آزادی صفحه‌ای و یا ۶ درجه آزادی انجام گرفته است. اما، در سال‌های اخیر، ربات‌های موازی با ۶ درجه آزادی کمتر از ۶ (ربات‌های موازی با ۶ درجه آزادی محدود) مورد توجه قرار گرفته است [۵]. این نوع ربات‌ها در مقایسه با ربات‌های موازی ۶ درجه آزادی دارای برتری‌هایی از قبیل ساختار مکانیکی و الگوریتم کنترل ساده‌تر، هزینه ساخت پایین‌تر و سرعت حرکت بالاتر می‌باشند [۶]. بنابراین، در آن دسته از کاربردهای صنعتی که نیاز به ربات‌هایی با ۶ درجه آزادی نمی‌باشد، از ربات‌های ۴ و ۵ درجه آزادی استفاده می‌شود. این نوع ربات‌ها می‌توانند به ترتیب در ماشین‌های ابزار سی‌ان‌سی^۲ و مونتاژ قطعات مورد استفاده قرار گیرند. اولین ربات موازی ۴ درجه آزادی، با زنجیره‌های سینماتیکی یکسان، توسط زلاتانوف [۵] ارائه شد و پس از آن ربات‌های موازی ۴ درجه آزادی دیگری ارائه گردید. یکی از معروف‌ترین ربات‌های موازی ۴ درجه آزادی، ربات دلتا^۳ می‌باشد که طرح اولیه آن توسط کلاول [۷] ارائه گردید. مهم‌ترین مزیت این ربات سرعت حرکت آن می‌باشد که می‌تواند در کاربردهایی با نیاز به حرکات سریع مورد استفاده قرار گیرد.

سنتز اکثر ربات‌های موازی بر اساس سعی و خطا و مهارت‌های مهندسی انجام شده است، اما اخیراً روش‌های

1. Limited-DOF
2. Computer Numerical Control (CNC)
3. DELTA parallel robot

سیستماتیکی از قبیل تئوری پیچش^۴ [۸]، تئوری گروهی تغییر مکان^۵ [۹] و روش زنجیره مجازی^۶ [۱۰] ارائه شده است که می‌تواند انواع ربات‌های موازی را با الگوهای حرکتی خاص ایجاد کند. الگوی حرکتی^۷، مجموعه‌ای از موقعیت‌ها و جهت‌گیری‌های پیوسته‌ای است که انواع حرکت‌های دلخواه عملگر نهایی را تشریح می‌کند. اکثر مطالعات انجام‌شده تا به امروز بر روی سنتز این مکانیزم‌ها انجام شده و توجه کمتری به تحلیل سینماتیکی آن‌ها شده است. کنگ و همکارش [۱۱]، بر اساس تئوری پیچش و روش زنجیره مجازی، سنتز مکانیزم‌های موازی با الگوهای حرکتی خاص را انجام دادند. آن‌ها مکانیزم‌های چهار درجه آزادی با زنجیره‌های سینماتیکی یکسان را، با توجه به الگوی حرکتی سکوی متحرک، به سه دسته سه درجه انتقالی و یک درجه دورانی 3T1R^۸، دو درجه انتقالی و دو درجه دورانی 2T2R^۹ و همچنین سه درجه دورانی و یک درجه انتقالی 3R1T^{۱۰} تقسیم کردند. در سنتز انجام‌شده، تنها تعداد، نوع و روابط هندسی بین اتصالات در هر زنجیره مشخص شده است. حرکت 3T1R را اصطلاحاً حرکت شونفلیز^{۱۱} یا حرکت اسکارا^{۱۲} [۱۲] می‌نامند. این حرکت شامل سه درجه انتقالی به علاوه ۱ درجه دورانی حول محوری با راستای ثابت می‌باشد.

یکی از راه‌های کنترل ربات موازی، کنترل ربات بر اساس حل مسئله سینماتیک مستقیم است. مسئله سینماتیک مستقیم^{۱۳} یک ربات موازی شامل پیدا کردن تمامی حالت‌های ممکن عملگر نهایی، به ازای ورودی‌های معلوم، برای مفاصل فعال می‌باشد. علاوه بر این، عبارت سینماتیک مستقیم^{۱۴} نیز عبارتی است که به صورت ریاضی وضعیت یک زنجیره سینماتیکی از ربات موازی را متناسب با موقعیت مفصل فعال آن مشخص می‌کند [۱۳]. تحلیل سینماتیک مستقیم این دسته از ربات‌ها، نیازمند چهارچوب ریاضی مناسبی می‌باشد که بتواند

4. Screw theory
5. Displacement group theory
6. Virtual chain approach
7. Motion pattern
8. 3 Translation and 1 Rotation (3T1R)
9. 2 Translation and 2 Rotation (2T2R)
10. 3 Rotation and 1 Translation (3R1T)
11. Schönflies motion
12. SCARA motion
13. Forward Kinematic Problem (FKP)
14. Forward Kinematic Expression (FKE)

بررسی و دو طرح ساده‌سازی شده برای این مکانیزم ارائه کردند که تحلیل سینماتیک مستقیم آن‌ها ساده‌تر از مکانیزم موازی اصلی انجام می‌گرفت. همچنین، او و همکارانش [۱۳] دو روش برای حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی بر پایه استفاده از پارامترهای استودی ارائه کردند. در روش اول، بر اساس آزمایش و خطا، متغیرهای غیرفعال حذف می‌شدند و در روش دوم، بر پایه تولید چندجمله‌ای‌های خطی (استفاده از الگوریتم LIA^۴) و حذف متغیرهای مربوط به مفاصل غیرفعال، عبارت سینماتیک مستقیم حاصل می‌شد. در این روش، تنها با ارائه پارامترهای دناویت-هارتبرگ یک زنجیره، می‌توان عبارت سینماتیکی را به دست آورد. همچنین، سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی ۵ درجه آزادی با الگوی حرکتی 3R2T نیز توسط الگوریتم ارائه شده در روش دوم مورد بررسی قرار گرفت.

با توجه به تحقیقات انجام‌شده در زمینه سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی و به دلیل تاریخچه کوتاه ربات‌های موازی فضایی ۴ درجه آزادی با ساختار زنجیره‌های یکسان، مشخصات سینماتیکی این دسته از ربات‌ها بسیار محدود بررسی شده است. همچنین، سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی فضایی (به دلیل سیستم معادلات غیرخطی حاصله)، پیچیده است و نمی‌تواند به راحتی تحلیل گردد. در این تحقیق، ابتدا ساختار هندسی سه ربات موازی ۴ درجه آزادی $4-RRUR_1$ ، $4-RRUR_2$ و $4-RUU$ با الگوی حرکتی 3T1R تشریح شده است. سپس مسئله سینماتیک مستقیم حالت عمومی این ربات‌ها که تا به حال مورد بررسی قرار نگرفته است، ارائه شده است و یک عبارت سینماتیکی تک‌متغیره، که بیانگر مسئله سینماتیک مستقیم می‌باشد، برای هر یک از ربات‌ها به دست آمده و با نتایج حل سینماتیک معکوس و شبیه‌سازی مقایسه شده است. شایان ذکر است که در این مطالعه، تداخل مکانیکی در نظر گرفته نشده است.

۲- ساختار هندسی ربات‌های موازی چهار درجه آزادی (3T1R) مورد نظر

در مرجع [۱۱]، ۱۱ مکانیزم ۴ درجه آزادی با الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و ۱ درجه دورانی معرفی شده است که ۶ مکانیزم

انتقال و دوران را به طور کامل تشریح کند. این کار می‌تواند با استفاده از جبر هندسی انجام گیرد. جبر هندسی مطالعه اهداف تعریف‌شده به وسیله چندجمله‌ای‌ها با استفاده از ابزارهای جبری می‌باشد. منشاء جبر هندسی به دکارت^۱ برمی‌گردد که دو ایده کاملاً درخشان در این زمینه ارائه کرده است [۱۳، ۱۴]:

(۱) استفاده از مختصات برای تشریح نقاط در فضای اقلیدسی
(۲) توصیف منحنی‌ها و سطوح توسط معادلات جبری
با پیشرفت سیستم‌های کامپیوتری، امکان استفاده از تئوری‌ها و الگوریتم‌های جبری افزایش یافته است.

در دو دهه اخیر، الگوریتم‌ها و روش‌های زیادی برای حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی ارائه شده است. گسلاين و همکارش [۱۵]، یک چندجمله‌ای درجه ۶ برای بیان سینماتیک مستقیم ربات موازی صفحه‌ای 3-RPR به دست آوردند. همچنین دو مکانیزم ساده‌سازی شده نیز برای مکانیزم مذکور ارائه گردید. هوستی [۱۴]، با استفاده از نگاشت سینماتیکی که اولین بار به وسیله استودی معرفی شد، الگوریتمی برای حل سینماتیک مستقیم ربات موازی ۶ درجه آزادی استوارت ارائه کرد. این الگوریتم، با استفاده از پارامترهای استودی، حرکت سه‌بعدی را به یک فضای هفت‌بعدی شبه‌بیضی^۲ نگاشت می‌کرد. الگوریتم به یک چندجمله‌ای تک‌متغیره از درجه ۴۰ می‌انجامد که نشان‌دهنده آن است که سینماتیک مستقیم ربات گوس-استوارت حداکثر دارای ۴۰ جواب می‌باشد.

یی و همکارش [۱۶] یک شبکه عصبی آموزش دادند که حل سینماتیک مستقیم ربات موازی ۶ درجه آزادی استوارت را با خطای ۲/۸۶ میلی‌متر و ۲/۸ درجه انجام می‌داد. برونیکس [۱۷] حل بسته سینماتیک مستقیم ربات موازی هانت-پریمروز را بر پایه پیدا کردن نقطه بالایی چهاروجهی‌هایی که اضلاع آن را زنجیره‌های ربات موازی تشکیل می‌داد، ارائه کرد. لی و همکارش [۱۸] نیز، سینماتیک مستقیم ربات استوارت را با استفاده از حذف جبری^۳ به دست آوردند و نشان دادند که یک چندجمله‌ای تک‌متغیره از درجه ۴۰ بیانگر سینماتیک مستقیم این ربات می‌باشد. طالع ماسوله و همکارانش [۱۹]، سینماتیک مستقیم ربات موازی 5-RPUR را

1. Descartes
2. Seven-dimensional quasi-elliptic space
3. Algebraic elimination

4. Linear Implicitization Algorithm

مفصل لولایی در هر زنجیره سینماتیکی) در چهارچوب ثابت تعریف می‌شود. به طور مشابه، بردار \mathbf{d}'_i نیز بردار موقعیت نقطه E_i در چهارچوب متحرک (مکان آخرین مفصل لولایی در زنجیره شماره i) است. همچنین، در زنجیره‌های سینماتیکی 1-RRUR و 2-RRUR اندازه بردارهای $B_i C_i$ ، $C_i D_i$ و $D_i E_i$ به ترتیب با مقادیر a_i ، L_1 و L_2 و در زنجیره سینماتیکی 1-RUU اندازه بردارهای $B_i C_i$ و $C_i E_i$ به ترتیب با مقادیر a_i و L_1 نشان داده می‌شوند. در نهایت، موقعیت عملگر نهایی (بردار اتصال نقطه O به نقطه O') به وسیله بردار $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$ و جهت‌گیری چهارچوب متحرک (عملگر نهایی) نسبت به چهارچوب ثابت نیز به وسیله ماتریس دوران \mathbf{Q} (رابطه ۱) بیان می‌گردد.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در روابط فوق، $s_\theta = \sin \theta$ و $c_\theta = \cos \theta$ می‌باشد. همچنین، از آنجا که نقاط E_i (مفصل انتهایی در هر زنجیره) به عملگر نهایی متصل است، می‌توان موقعیت آن را، برای سه ربات موازی تحت مطالعه، به صورت مستقیم بر اساس موقعیت عملگر نهایی (پارامترهای x ، y ، z و θ) نوشت:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{E_i} & y_{E_i} & z_{E_i} \end{bmatrix}^T &= \mathbf{p} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}'_i \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{ix} \\ d'_{iy} \\ d'_{iz} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + d'_{ix} c_\theta - d'_{iy} s_\theta \\ y + d'_{ix} s_\theta + d'_{iy} c_\theta \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

که در سه ربات موازی فوق، $\mathbf{d}'_1 = (0, 0, 0)$ ، $\mathbf{d}'_2 = (b, -b, 0)$ ، $\mathbf{d}'_3 = (0, -2b, 0)$ و $\mathbf{d}'_4 = (-b, -b, 0)$ نصف طول عملگر نهایی می‌باشد. همچنین، موقعیت نقاط C_i (اولین مفصل لولایی پس از مفصل فعال در هر زنجیره) نسبت به چهارچوب ثابت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

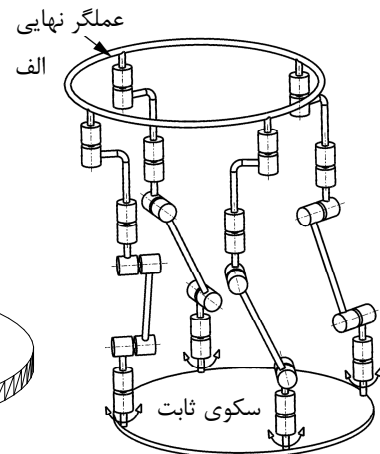
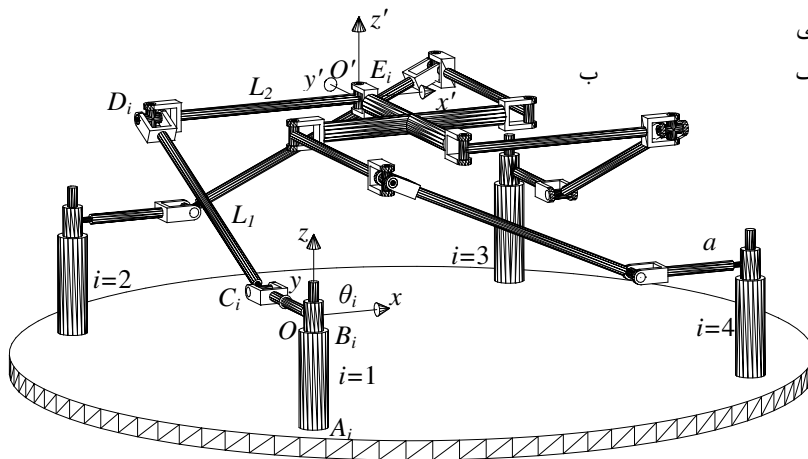
$$\begin{bmatrix} x_{C_i} & y_{C_i} & z_{C_i} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{B_i} + a \cdot \cos \theta_i & y_{B_i} + a \cdot \sin \theta_i & z_{B_i} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

در ادامه به تشریح ساختار هندسی هر یک از این ربات‌ها پرداخته می‌شود.

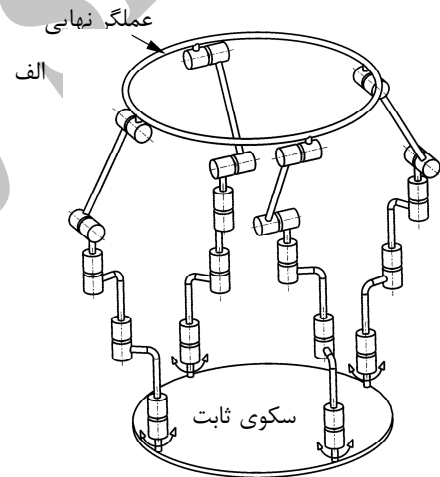
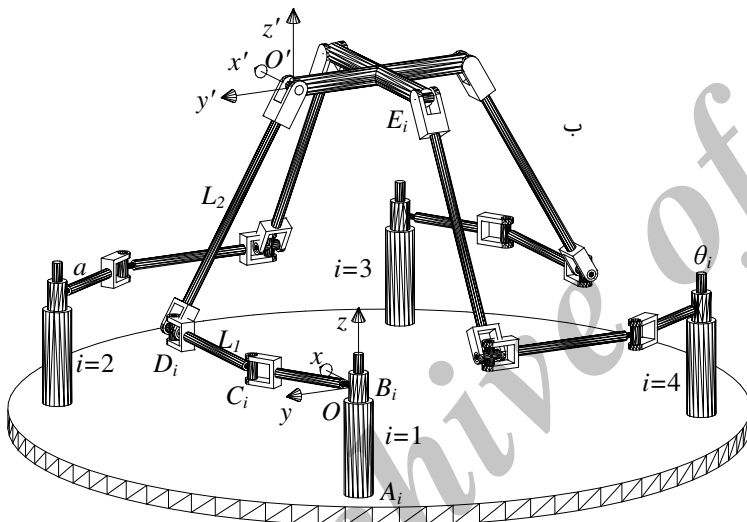
از آن‌ها در گروه 5R (متشکل از ۵ مفصل لولایی در هر زنجیره) طبقه‌بندی شده‌اند. مکانیزم‌های موازی فضایی 4-RRUR ، 4-RRUR ، 4-RRUR و 4-RRUR (مفاصل با بالانویس یکسان دارای محورهای موازی می‌باشند)، که طرح کلی آن‌ها به ترتیب در شکل‌های ۱-الف، ۲-الف و ۳-الف آورده شده است، از گروه 5R هستند و ربات‌های موازی 1-RRUR ، 2-RRUR و 4-RUU (شکل‌های ۱-ب، ۲-ب و ۳-ب) نیز، به ترتیب، حالت خاصی از این سه مکانیزم می‌باشند. شایان ذکر است که در سرتاسر این مقاله مفاصل لولایی با R و مفاصل یونیورسال با U نشان داده شده است. همچنین، در زیر مفاصل فعال خطی کشیده شده است که آن‌ها را از مفاصل غیرفعال مجزا می‌نماید.

همان‌گونه که در شکل‌های ۱-ب، ۲-ب و ۳-ب مشاهده می‌شود، هر یک از این سه ربات از یک عملگر نهایی تشکیل شده‌اند که این سکو به وسیله چهار زنجیره سینماتیکی یکسان به سکوی ثابت متصل شده است. همچنین، چهارچوب ثابت O_{xyz} بر روی مفصل B_i (طوری که محور z در راستای اولین مفصل لولایی یا همان مفصل فعال قرار گیرد) و چهارچوب متحرک $O'_{x'y'z'}$ بر روی مفصل E_i (طوری که راستای محور z' در راستای محور z از چهارچوب ثابت قرار گیرد) قرار داده شده است. با توجه به شرایط و قیود حاکم بر این ربات‌ها، جهت‌گیری محور z' از چهارچوب متحرک، همواره ثابت و در جهت محور z از چهارچوب ثابت می‌باشد، اما جهت‌گیری محورهای x' و y' ، با تغییر ورودی‌های مکانیزم، تغییر می‌کند. مجری نهایی هر یک از این ربات‌ها توانایی ایجاد سه درجه انتقالی (x ، y ، z) به علاوه یک درجه دورانی حول محور z (θ) را دارا می‌باشند. در حقیقت، این سه ربات جزء ربات‌های با درجه آزادی محدود می‌باشند که مجری نهایی آن‌ها نمی‌تواند حول محورهای موازی محورهای x و y دوران کند. همچنین، یک کارانداز لولایی با محور دورانی موازی محور z نیز (متصل به سکوی ثابت) ورودی هر زنجیره را تشکیل می‌دهد. علاوه بر این، اندازه زاویه کارانداز لولایی در هر زنجیره (θ_i) همواره نسبت به جهت مثبت محور x سنجیده می‌شود.

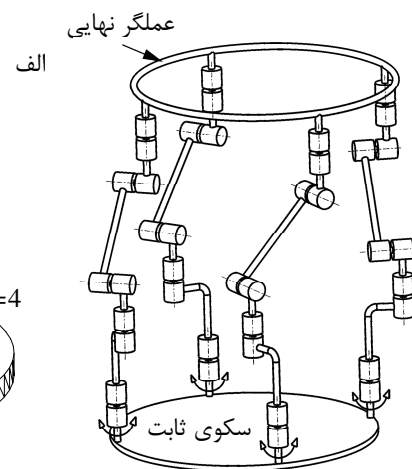
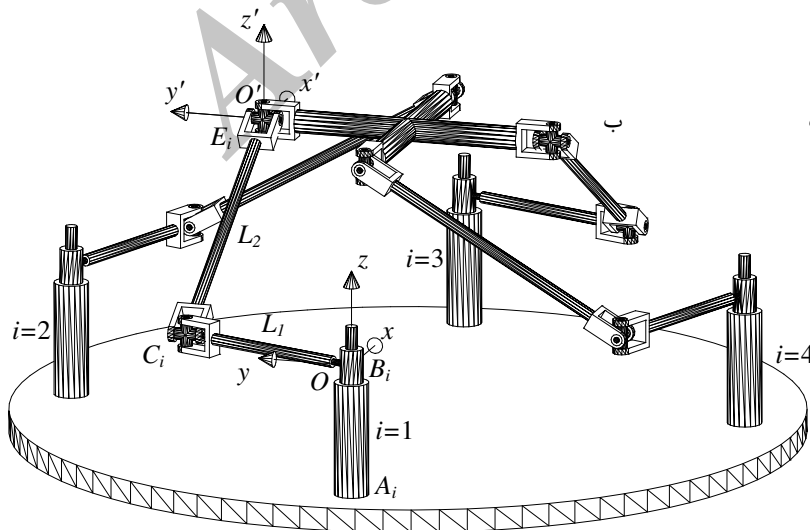
در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نیز، به ترتیب، طرح کلی زنجیره‌های سینماتیکی 1-RRUR ، 2-RRUR و 1-RUU نشان داده شده است. بردار \mathbf{r}_i به عنوان بردار موقعیت نقطه B_i (مکان اولین



شکل ۱ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی $4-R'R'R'R'$ [۱۱]، ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری ربات موازی $4-RRUR_1$



شکل ۲ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی $4-R'R'R'R'R'$ [۱۱]، ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری ربات موازی $4-RRUR_2$

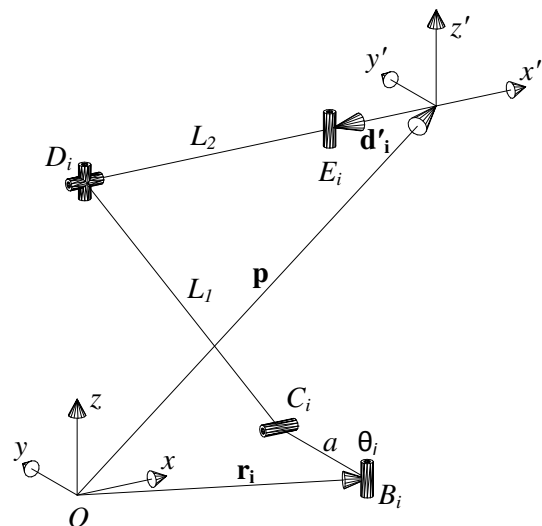


شکل ۳ الف- طرح کلی ارائه شده برای ربات موازی $4-R'R'R'R'R'$ [۱۱]، ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری ربات موازی $4-RRUR_3$

۲-۱- ساختار هندسی ربات موازی 4-RRUR₁

هنگامی که طول و انحراف رابط بین دو مفصل لولایی برابر صفر و زاویه پیچش رابط آن‌ها برابر ۹۰ درجه باشد، یک مفصل یونیورسال^۱ تشکیل می‌شود [۲۰]. ربات موازی 4-RRUR₁ نیز، حالت خاصی از مکانیزم موازی "R'R'R'R"-4 می‌باشد که در آن، محورهای دوران مفاصل لولایی سوم و چهارم از هر زنجیره یک مفصل یونیورسال را تشکیل می‌دهند.

شکل ۴ طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی 4-RRUR₁ را نشان می‌دهد که با توجه به سنتز انجام‌شده در مرجع [۱۱] ایجاد شده است. یک مفصل لولایی T، با محور دوران موازی محور z، ورودی و مفصل فعال هر زنجیره را تشکیل می‌دهد. محورهای دوران مفاصل لولایی دوم و سوم در هر زنجیره سینماتیکی همواره موازی و در صفحه‌ای موازی صفحه x-y قرار دارند. دو مفصل لولایی انتهایی نیز دارای محورهای موازی (موازی محور z) می‌باشند. همچنین، محورهای دوران مفاصل سوم و چهارم در هر زنجیره سینماتیکی متقاطع و بر هم عمود بوده و یک مفصل یونیورسال را تشکیل می‌دهند. شایان ذکر است که در ربات موازی 4-RRUR₁ چهار مفصل لولایی متصل به سکوی ثابت و چهار مفصل لولایی متصل به عملگر نهایی همواره دارای محورهای موازی (موازی محور z) می‌باشند.

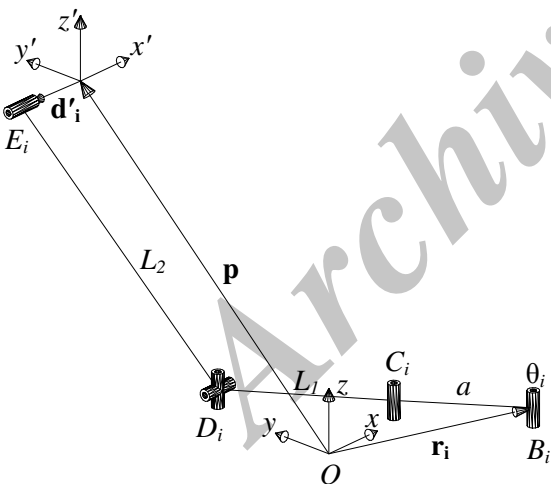


شکل ۴ طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی 4-RRUR

1. Universal joint

۲-۲- ساختار هندسی ربات موازی 4-RRUR₂

طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی 4-RRUR₂ در شکل ۵ آورده شده است. این ربات حالت خاصی از ربات موازی "R'R'R'R"-4 می‌باشد که سنتز آن در مرجع [۱۱] آورده شده است. همان‌گونه که در شکل ۵ ملاحظه می‌گردد، یک کارانداز لولایی با محور دورانی موازی محور z (متصل به سکوی ثابت) ورودی هر زنجیره را تشکیل می‌دهد. پس از آن دو مفصل لولایی قرار دارند که محور دورانی آن‌ها همواره در راستای محور z می‌باشد. دو مفصل انتهایی در هر زنجیره سینماتیکی نیز همواره در صفحه موازی صفحه x-y قرار دارند. در این ربات نیز، محورهای دوران دو مفصل لولایی سوم و چهارم متقاطع و عمود بر هم می‌باشند و یک مفصل یونیورسال را ایجاد می‌کنند. شایان ذکر است که ۴ مفصل لولایی متصل به سکوی ثابت در ربات موازی 4-RRUR₂ همواره دارای محورهای موازی (موازی محور z) و چهار مفصل لولایی متصل به عملگر نهایی در این ربات همواره دارای محورهایی موازی صفحه x-y می‌باشند.



شکل ۵ طرح کلی زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی 4-RRUR₂

ملاحظه می‌گردد که حالت‌های خاص مکانیزم‌های موازی "R'R'R'R"-4 و "R'R'R'R"-4 با نام 4-RRUR₂ معرفی گردیده‌اند. اما همان‌گونه که در شکل‌های ۱ و ۲ نیز مشاهده می‌شود، راستای مفاصل لولایی و قیود حاکم بر زنجیره‌های سینماتیکی این دو ربات موازی با یکدیگر کاملاً متفاوت بوده و مشابه بودن نام این دو ربات دلیل بر یکسان

θ (موقعیت چهارچوب متحرک که بر روی عملگر نهایی نصب می‌گردد) نوشته شود. بنابراین تنها موقعیت نقاط D_i در هر زنجیره سینماتیکی از هر ربات موازی نامشخص می‌باشد که با توجه به قیود هندسی هر زنجیره باید از معادلات حذف گردند.

۳-۱- حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-RRUR₁

با ارجاع به شکل ۴، معادلات (۷) و (۸) بر اساس قیود سینماتیکی حاکم بر λ امین زنجیره از ربات موازی 4-RRUR₁ به دست می‌آید:

$$C_i D_i = (x_{D_i} - x_{C_i})^2 + (y_{D_i} - y_{C_i})^2 + (z_{D_i} - z_{C_i})^2 - L_1^2 \quad (۷)$$

$$D_i E_i = (x_{E_i} - x_{D_i})^2 + (y_{E_i} - y_{D_i})^2 - L_2^2 \quad (۸)$$

با توجه به روابط (۱) تا (۳)، موقعیت تمامی مفاصل به غیر از نقاط D_i معلوم است که بر اساس قیود هندسی هر زنجیره باید از معادلات حذف گردد. بر این اساس، موقعیت نقاط D_i برای λ امین زنجیره، به صورت روابط (۹) تا (۱۱) به دست می‌آید:

$$x_{D_i} = x_{C_i} + \zeta_i c_i = x_{B_i} + a c_i + \zeta_i c_i \quad (۹)$$

$$y_{D_i} = y_{C_i} + \zeta_i s_i = y_{B_i} + a s_i + \zeta_i s_i \quad (۱۰)$$

$$z_{D_i} = z_{E_i} = z \quad (۱۱)$$

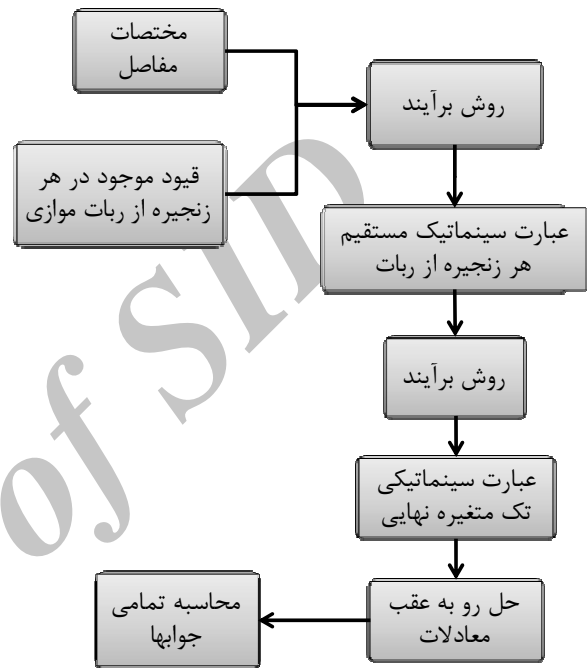
که در روابط فوق، ζ_i تصویر $C_i D_i$ بر روی صفحه $x-y$ است. $c_i = \cos \theta_i$ و $s_i = \sin \theta_i$ می‌باشد. با جای‌گذاری روابط (۱) تا (۳) و (۹) تا (۱۱) در معادلات (۷) و (۸)، روابط زیر برای زنجیره سینماتیکی شماره ۱ از ربات موازی 4-RRUR₁ حاصل می‌شود:

$$C_1 D_1 = z^2 + \zeta_1^2 - L_1^2 \quad (۱۲)$$

$$D_1 E_1 = x^2 + y^2 - 2 a c_1 x - 2 c_1 \zeta_1 x + \zeta_1^2 - 2 a s_1 y - 2 s_1 \zeta_1 y + a^2 + 2 a \zeta_1 - L_2^2 \quad (۱۳)$$

با استفاده از روش برآیند، از دو رابطه (۱۲) و (۱۳)، پارامتر ζ_1 حذف گردیده و عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره اول بر حسب مختصات عملگر نهایی (x, y, z, θ) ، پارامترهای طراحی (a, b, L_1, L_2) ، مقادیر ورودی (θ_1) و مختصات نقطه B_1 به صورت رابطه (۱۴) به دست می‌آید. چون چهارچوب ثابت بر روی نقطه B_1 قرار گرفته است، مختصات نقطه B_1 برابر $(0, 0, 0)$ می‌باشد.

می‌کند. این عبارت تک‌متغیره شامل تمامی جوابهای مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی می‌باشد. در ادامه و پس از به دست آوردن این عبارت ریاضی، با حل آن و حل رو به عقب معادلات، تمامی جوابهای مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی فضایی به دست خواهد آمد (شکل ۷).



شکل ۷ تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی در فضای اقلیدسی سه‌بعدی

برای تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم حالت عمومی هر یک از این ربات‌ها و به دست آوردن عبارت سینماتیک مستقیم هر زنجیره (عبارتی بر حسب x, y, z, θ) و نهایتاً به دست آوردن عبارت تک‌متغیره نهایی، ابتدا چهارچوب ثابت O_{xyz} بر روی مفصل B_1 و چهارچوب متحرک $O'_{x'y'z'}$ بر روی مفصل لولایی انتهایی از اولین زنجیره (همان‌گونه که در بخش قبل توضیح داده شد) جای‌گذاری می‌شود (شکل‌های ۱، ۲ و ۳). با توجه به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم، مقادیر θ_i و موقعیت مفاصل B_i (مفصل لولایی فعال) مشخص می‌باشد. بنابراین موقعیت مفاصل C_i (اولین مفصل لولایی پس از مفصل فعال در هر زنجیره) نسبت به چهارچوب ثابت نیز از رابطه (۳) می‌تواند محاسبه شود. همچنین موقعیت مفصل انتهایی در هر زنجیره نیز می‌تواند از رابطه (۲) بر حسب پارامترهای x, y, z و

می‌گردد (رابطه ۱۷). مزیت استفاده از تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه θ در آنالیز سینماتیک مستقیم عمدتاً به دلیل حذف عبارت‌های مثلثاتی و تولید معادلات همگن می‌باشد.

$$F_2 = \text{Resultant}(C_2 D_2, D_2 E_2, \zeta_2) \quad (17)$$

عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره‌های سوم و چهارم نیز، به صورتی که شرح داده شد، از روابط (۱۸) و (۱۹) به دست آورده می‌شوند.

$$F_3 = \text{Resultant}(C_3 D_3, D_3 E_3, \zeta_3) \quad (18)$$

$$F_4 = \text{Resultant}(C_4 D_4, D_4 E_4, \zeta_4) \quad (19)$$

تا این مرحله، یک عبارت سینماتیک مستقیم به ازای هر زنجیره سینماتیکی از ربات 4-RRUR₁ به دست آورده شده است (عبارت‌های F_1, F_2, F_3, F_4). این عبارت‌ها بر حسب مختصات عملگر نهایی (x, y, z, t) ، پارامترهای طراحی (a, b, L_1, L_2) ، مقادیر ورودی (θ_i) و مختصات نقاط B_i می‌باشند. در مسئله سینماتیک مستقیم، مقادیر (θ_i) به عنوان ورودی به مسئله داده می‌شود. همچنین، پارامترهای طراحی (a, b, L_1, L_2) و مختصات نقاط B_i نیز بر اساس هندسه ربات مشخص می‌باشند. بنابراین، چهار عبارت سینماتیک مستقیم به دست آمده برای چهار زنجیره ربات موازی تنها بر حسب مختصات عملگر نهایی (x, y, z, t) می‌باشند. با استفاده از روش برآیند، مختصات x, y, z از ۴ عبارت سینماتیک مستقیم به دست آمده حذف گردیده و یک عبارت تک‌متغیره بر حسب t که بیان‌کننده سینماتیک مستقیم ربات موازی فوق است، به دست می‌آید. برای این کار، به ترتیب زیر عمل می‌شود:

$$F_{12}(y, z, t) = \text{Resultant}(F_1, F_2, x) \quad (20)$$

$$F_{13}(y, z, t) = \text{Resultant}(F_1, F_3, x) \quad (21)$$

$$F_{14}(y, z, t) = \text{Resultant}(F_1, F_4, x) \quad (22)$$

$$F_{1213}(z, t) = \text{Resultant}(F_{12}, F_{13}, y) \quad (23)$$

$$F_{1214}(z, t) = \text{Resultant}(F_{12}, F_{14}, y) \quad (24)$$

$$F_{t_1}(t) = \text{Resultant}(F_{1213}, F_{1214}, z) \quad (25)$$

روابط (۲۰) تا (۲۲) پارامتر x را از ۴ عبارت سینماتیک مستقیم به دست آمده حذف کرده و سه عبارت بر حسب پارامترهای y, z, t ایجاد می‌کنند. روابط (۲۳) و (۲۴) نیز، پارامتر y را از سه رابطه (۲۰) تا (۲۲) حذف کرده و دو عبارت

$$F_1 = \text{Resultant}(C_1 D_1, D_1 E_1, \zeta_1)$$

$$\begin{aligned} F_1 = & x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 + 4c_1^2x^2z^2 \\ & + 8c_1s_1xyz^2 + y^4 - 2y^2z^2 + 4s_1^2y^2z^2 \\ & + z^4 - 4ac_1x^3 - 4as_1x^2y - 4ac_1xy^2 \\ & - 4ac_1xz^2 - 4as_1y^3 - 4as_1yz^2 \\ & + 2a^2x^2 + 2L_1^2x^2 - 2L_2^2x^2 + 4a^2c_1^2x^2 \\ & - 4c_1^2L_1^2x^2 + 8a^2c_1s_1xy - 8c_1s_1L_1^2xy \\ & - 2L_2^2y^2 + 4a^2s_1^2y^2 + 2a^2y^2 - 4s_1^2L_1^2y \\ & + 2L_1^2y^2 + 2a^2z^2 - 2L_1^2z^2 + 2L_2^2z^2 \\ & + 4ac_1L_2^2x + 4L_1^2ac_1x - 4a^3c_1x \\ & - 4a^3s_1y + 4L_1^2as_1y + 4as_1L_2^2y \\ & - 2a^2L_2^2 - 2L_1^2a^2 - 2L_1^2L_2^2 + a^4 + L_2^4 + L_1^4 \quad (14) \end{aligned}$$

در صورتی که مراحل فوق برای دومین زنجیره نیز اعمال شود، روابط (۷) و (۸) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$C_2 D_2 = z^2 + \zeta_2^2 - L_1^2 \quad (15)$$

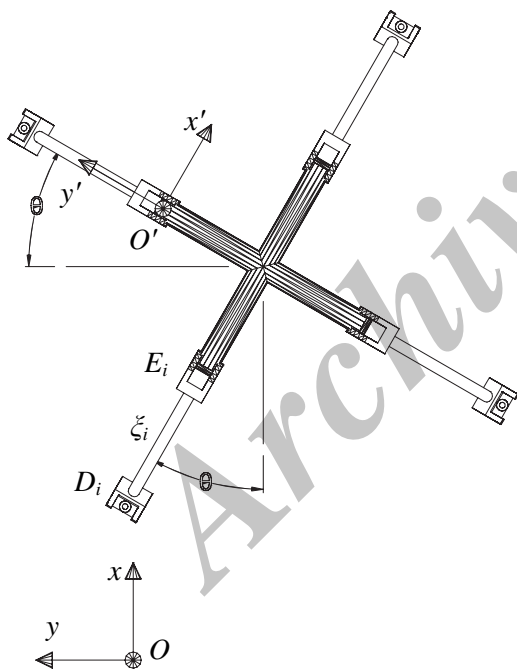
$$\begin{aligned} D_2 E_2 = & x^2 + y^2 - 2x_{B_2}x + 2bc_\theta x + 2bs_\theta x \\ & - 2\zeta_2c_2x - 2ac_2x - 2as_2y - 2\zeta_2s_2y \\ & + 2bs_\theta y - 2y_{B_2}y - 2bc_\theta y + 2y_{B_2}as_2 \\ & - 2bs_\theta ac_2 + 2x_{B_2}\zeta_2c_2 + 2bc_\theta y_{B_2} + 2b^2 \\ & - 2bc_\theta\zeta_2c_2 + 2y_{B_2}\zeta_2s_2 - 2bs_\theta\zeta_2s_2 \\ & + 2bc_\theta\zeta_2s_2 + 2a\zeta_2 - 2bs_\theta as_2 + a^2 \\ & - L_2^2 - 2bs_\theta x_{B_2} + 2bc_\theta as_2 + 2bc_\theta ac_2 \\ & - 2bs_\theta\zeta_2c_2 + x_{B_2}^2 + \zeta_2^2 + y_{B_2}^2 \\ & - 2bc_\theta x_{B_2} - 2bs_\theta y_{B_2} + 2x_{B_2}ac_2 \quad (16) \end{aligned}$$

عبارت به دست آمده برای $D_2 E_2$ شامل عبارت‌های مثلثاتی می‌باشد. برای حذف عبارت‌های مثلثاتی از معادلات فوق و ساده‌تر شدن روابط، ابتدا از تغییر متغیر $t = \tan(\theta/2)$ و $\sin \theta = 2t/(1+t^2)$ و $\cos \theta = (1-t^2)/(1+t^2)$ (تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه θ) استفاده کرده و سپس با استفاده از روش حذفی برآیند، پارامتر ζ_2 از روابط (۱۵) و (۱۶) حذف گردیده و عبارت سینماتیک مستقیم زنجیره دوم حاصل

$$(x_{Di} - x_{Ci})^2 + (y_{Di} - y_{Ci})^2 - L_1^2 = 0 \quad (27)$$

$$(x_{Ei} - x_{Di})^2 + (y_{Ei} - y_{Di})^2 + (z_{Ei} - z_{Di})^2 - L_2^2 = 0 \quad (28)$$

روابط (27) و (28) برای تمامی زنجیره‌های ربات موازی 4-RRUR₂ برقرار می‌باشند. اما با توجه به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم و مشخص بودن مقادیر مفاصل لولایی فعال، پارامترهای طراحی و موقعیت نقاط B_i ، موقعیت نقاط C_i و E_i نیز می‌تواند از رابطه‌های (2) و (3) و بر حسب پارامترهای x ، y ، z و θ نوشته شود. اما موقعیت نقاط D_i در هر زنجیره شناخته شده نیست و باید، با توجه به قیود حاکم بر هندسه ربات، از معادلات حذف گردند. اولین قید حاکم بر زنجیره‌های ربات موازی 4-RRUR₂ را می‌توان به صورت $z_{Di} = z_{Ci}$ نوشت. این رابطه همواره برای تمامی زنجیره‌ها از ربات موازی فوق برقرار است. همچنین، با توجه به شکل 8، مختصات x و y از نقاط D_i نیز به صورت روابط (29) تا (32) نوشته می‌شوند.



شکل 8 تصویر $D_i E_i$ بر روی صفحه $x-y$

$$x_{D1} = x_{E1} - \xi_1 s_\theta, \quad y_{D1} = y_{E1} + \xi_1 c_\theta \quad (29)$$

$$x_{D2} = x_{E2} + \xi_2 c_\theta, \quad y_{D2} = y_{E2} + \xi_2 s_\theta \quad (30)$$

$$x_{D3} = x_{E3} + \xi_3 s_\theta, \quad y_{D3} = y_{E3} - \xi_3 c_\theta \quad (31)$$

$$x_{D4} = x_{E4} - \xi_4 c_\theta, \quad y_{D4} = y_{E4} - \xi_4 s_\theta \quad (32)$$

بر حسب z و t تولید می‌کنند. نهایتاً، با استفاده از رابطه 25، پارامتر z نیز از دو رابطه (23) و (24) حذف گردیده و عبارت تک متغیره نهایی ربات موازی 4-RRUR₁ بر حسب متغیر t حاصل می‌شود.

مثال‌های تصادفی زیادی بر اساس تغییر در مقادیر پارامترهای طراحی (a, b, L_1, L_2) ، مقادیر ورودی (θ_i) و مختصات نقاط B_i برای ربات موازی فوق انجام شده است و در تمامی موارد، عبارت تک‌متغیره نهایی همواره به صورت رابطه (26) به‌دست آمده است:

$$F_k(t) = \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (\lambda_j t^j)^k \right) \right) \quad (26)$$

که در رابطه فوق، λ_j ها ضرایب ثابتی بر حسب پارامترهای طراحی a, b, L_1, L_2 ، ورودی‌های هر زنجیره سینماتیکی (θ_i) همچنین مختصات نقاط B_i می‌باشند. عبارت تک‌متغیره نهایی به‌دست آمده (رابطه 26) همواره شامل چندجمله‌ای‌های تک‌متغیره‌ای می‌باشد که مجموع درجات آن‌ها برابر 334 می‌باشد. این چندجمله‌ای‌ها شامل تمامی مقادیر t از جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-RRUR₁ می‌باشند. به ازای هر جواب به‌دست آمده از عبارت تک‌متغیره نهایی، یک جواب برای مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی وجود دارد. اگر جواب به‌دست آمده از درجه n باشد، تعداد n جواب برای مسئله سینماتیک مستقیم وجود دارد. نتیجتاً، سینماتیک مستقیم ربات موازی فوق حداکثر دارای 344 جواب (حقیقی و موهومی) می‌باشد. تمامی جواب‌های حقیقی و موهومی به‌دست آمده از این روش (در تمامی مثال‌های تصادفی انجام‌شده) در معادلات سینماتیک معکوس ربات موازی قرار داده شده و درستی تعداد جواب‌ها به اثبات رسیده است.

۳-۲- حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-RRUR₂

فرایند به‌دست آوردن عبارت تک‌متغیره نهایی ربات موازی 4-RRUR₂ مشابه بخش قبل می‌باشد، با این تفاوت که قیود حاکم بر زنجیره‌های این ربات متفاوت از ربات قبلی بوده و باید بر اساس هندسه آن تعیین گردد. بر این اساس، زنجیره اصلی ربات موازی 4-RRUR₂ در نظر گرفته شده (شکل 5) و روابط حاکم بر آن نوشته می‌شود:

زنجیره‌های دوم تا چهارم نیز به دست آورده می‌شود. نهایتاً، با اعمال روابط (۲۰) تا (۲۵)، عبارت تک‌متغیره نهایی بر حسب t حاصل می‌شود. مثال‌های تصادفی زیادی بر اساس تغییر در مقادیر پارامترهای طراحی (L_2, L_1, b, a) ، مقادیر ورودی (θ_i) و مختصات نقاط B_i برای این ربات انجام شده است که در تمامی موارد، عبارت تک‌متغیره نهایی همواره به صورت رابطه (۳۶) حاصل شده است.

$$F_k(t) = \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (v_j t^j)^k \right) \right) \quad (36)$$

در رابطه فوق، v_j ها نیز ضرایب ثابتی بر حسب مقادیر پارامترهای طراحی، ورودی‌ها و مختصات نقاط B_i می‌باشند. این عبارت به صورت حاصل ضرب چندین عبارت تک‌متغیره بر حسب t است که مجموع درجات آن‌ها همواره برابر ۲۳۰ است. این نتیجه نشان می‌دهد که سینماتیک مستقیم ربات فوق حداکثر دارای ۲۳۰ جواب (حقیقی و موهومی) می‌باشد. تمامی جواب‌های به دست آمده در هر مرحله، در معادلات سینماتیک معکوس ربات قرار داده شده و درستی نتایج تایید شده است.

۳-۳- حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی

4-RRUR

شکل ۶ زنجیره سینماتیکی نام از ربات موازی 4-RRUR را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، رابطه (۳۷) بر روی هر زنجیره از این ربات حاکم می‌باشد:

$$(x_{E_i} - x_{C_i})^2 + (y_{E_i} - y_{C_i})^2 + (z_{E_i} - z_{C_i})^2 - L_1^2 = 0 \quad (37)$$

با اعمال روابط (۱) تا (۳) و استفاده از روش برآیند، عبارت‌های سینماتیک مستقیم زنجیره‌های (۱) تا (۴) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2a c_1 x - 2a s_1 y + a^2 - L_1^2 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & x^2 + y^2 + z^2 - 2a c_2 x - 2x_{B_2} x \\ & + 2b c_\theta x + 2b s_\theta x - 2y_{B_2} y - 2a s_2 y \\ & - 2b c_\theta y + 2b s_\theta y + 2b^2 + 2b c_\theta a s_2 \\ & - L_1^2 + a^2 - 2b s_\theta a c_2 - 2b s_\theta a s_2 \\ & + x_{B_2}^2 + y_{B_2}^2 - 2b s_\theta y_{B_2} - 2b s_\theta x_{B_2} \\ & + 2y_{B_2} a s_2 + 2b c_\theta y_{B_2} + 2x_{B_2} a c_2 \\ & - 2b c_\theta x_{B_2} - 2b c_\theta a c_2 \end{aligned} \quad (39)$$

که در روابط فوق، ξ_i تصویر بردار $D_i E_i$ بر روی صفحه $x-y$ می‌باشد. با جایگذاری روابط (۱) تا (۳) و (۲۹) تا (۳۲) در معادلات (۲۷) و (۲۸)، روابط زیر برای اولین زنجیره سینماتیکی به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} C_1 D_1 = & x^2 + y^2 - 2a c_1 x - 2\xi_1 s_\theta x \\ & - 2a s_1 y - 2\xi_1 c_\theta y + 2\xi_1 s_\theta a c_1 \\ & + \xi_1^2 + 2\xi_1 c_\theta a s_1 + a^2 - L_1^2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$D_2 E_2 = z^2 + \xi_1^2 - L_2^2 \quad (34)$$

با اعمال روش برآیند بر روی روابط (۳۳) و (۳۴) و حذف پارامتر ξ_1 ، عبارت سینماتیک مستقیم این زنجیره به صورت رابطه (۳۵) حاصل می‌شود.

$$F_1 = \text{Resultant}(C_1 D_1, D_2 E_2, \xi_1)$$

$$\begin{aligned} F_1 = & x^4 + 2x^2 y^2 + 4s_\theta^2 x^2 z^2 - 2x^2 z^2 \\ & + 8s_\theta c_\theta x y z^2 + y^4 + 4c_\theta^2 y^2 z^2 - 2y^2 z^2 \\ & + z^4 - 4a c_1 x^3 - 4a s_1 x^2 y - 4a c_1 x y^2 \\ & - 8s_\theta^2 a c_1 x z^2 + 4a c_1 x z^2 - 8s_\theta c_\theta a s_1 x z^2 \\ & - 4a s_1 y^3 - 8c_\theta^2 a s_1 y z^2 - 8s_\theta a c_1 c_\theta y z^2 \\ & + 4a s_1 y z^2 - 4L_2^2 s_\theta^2 x^2 + 2L_2^2 x^2 - 2L_1^2 x^2 \\ & + 4a^2 c_1^2 x^2 + 2a^2 x^2 + 8a^2 c_1 s_1 x y \\ & - 8L_2^2 s_\theta c_\theta x y + 2a^2 y^2 - 2L_1^2 y^2 \\ & + 2L_2^2 y^2 - 4L_2^2 c_\theta^2 y^2 + 4a^2 s_1^2 y^2 - 2L_2^2 \\ & + 4c_\theta^2 a^2 s_1^2 z^2 + 4s_\theta^2 a^2 c_1^2 z^2 + 2L_1^2 z^2 \\ & - 2a^2 z^2 + 8s_\theta a^2 c_1 c_\theta s_1 z^2 - 4a c_1 L_2^2 x \\ & + 8L_2^2 s_\theta c_\theta a s_1 x + 8L_2^2 s_\theta^2 a c_1 x \\ & + 4L_1^2 a c_1 x - 4a^3 c_1 x - 4L_2^2 a s_1 y \\ & + 4L_1^2 a s_1 y + 8L_2^2 s_\theta a c_1 c_\theta y + 8L_2^2 c_\theta^2 a s_1 y \\ & - 4a^3 s_1 y - 4L_2^2 s_\theta^2 a^2 c_1^2 + a^4 \\ & - 4L_2^2 c_\theta^2 a^2 s_1^2 + L_1^4 + 2L_2^2 a^2 \\ & - 2L_1^2 L_2^2 + L_2^4 - 2L_1^2 a^2 - 8L_2^2 s_\theta a^2 c_1 c_\theta s_1 \end{aligned} \quad (35)$$

با اعمال تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه θ ، عبارت‌های مثلثاتی s_θ و c_θ از عبارت F_1 حذف می‌گردد. در ادامه، به صورتی که تشریح گردید، عبارت‌های سینماتیک مستقیم

معادلات سینماتیک معکوس هر ربات قرار داده شده است. نهایتاً ۱۳۰ جواب حقیقی و ۲۱۴ جواب موهومی برای ربات موازی 4-RRUR₁، ۱۱۰ جواب حقیقی و ۱۲۰ جواب موهومی برای ربات موازی 4-RRUR₂ و ۴ جواب حقیقی و ۴ جواب موهومی برای ربات موازی 4-RUU حاصل شده است.

جدول ۱ مقادیر پارامترهای طراحی، ورودی‌ها و مختصات نقاط B_i برای انجام شبیه‌سازی

4-RUU	4-RRUR ₂	4-RRUR ₁	
(۰,۰,۰)	(۰,۰,۰)	(۰,۰,۰)	B ₁
(-۱,۵,۰)	(-۱,۵,۰)	(-۱,۵,۰)	B ₂
(۴,۶,۰)	(۴,۶,۰)	(۴,۶,۰)	B ₃
(۵,۱,۰)	(۵,۱,۰)	(۵,۱,۰)	B ₄
۲	۲	۲	A
۲	۲	۲	B
۵	۲	۵	L ₁
-	۵	۲	L ₂
۶۰°	۶۰°	۶۰°	θ ₁
۰°	۰°	۰°	θ ₂
-۹۰°	-۹۰°	-۹۰°	θ ₃
۱۸۰°	۱۵۰°	۱۸۰°	θ ₄

$$F_k(t) = \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (\lambda_j t^j)^k \right) \right) =$$

$$\begin{aligned} & (t^{20} - 28.28t^{19} + \dots - 2.38 \cdot 10^7 t + 3.91 \cdot 10^6)^2 \\ & (t^{20} - 45.41t^{19} + \dots - 25795.2t + 7133.62)^2 \\ & (t^{18} - 8.87t^{17} + \dots - 2648.02t + 288.63)^2 \\ & (t^{18} - 16.06t^{17} + \dots - 8767.30t + 1768.40)^2 \\ & (t^{18} - 27.9t^{17} + \dots - 85643.3t + 13866.9)^2 \\ & (t^{18} - 29.7t^{17} + \dots - 10507.4t + 2037.8)^2 \\ & (t^{18} - 10.32t^{17} + \dots - 1.04 \cdot 10^5 t + 8096.35)^2 \\ & (t^{18} - 40.60t^{17} + \dots - 71321.17t + 5439.1)^2 \\ & (t^6 - 8.65t^5 + \dots - 12.06t + 4.21)^2 \\ & (t^6 - 2.08t^5 + \dots - 0.00908t + 0.0000026)^2 \\ & (t^6 - 77.58t^5 + \dots - 1997.36t + 939.32)^2 \\ & (t^2 - 2.309401077t + 0.381197845)^4 \\ & (t^2 - 16t + 25)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

$$F_3 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x_{B_3}x - 2ac_3x + 4bs_\theta x - 2as_3y - 4bc_\theta y - 2y_{B_3}y + 4b^2 - 4bs_\theta a c_3 + x_{B_3}^2 + 2x_{B_3}ac_3 + 4bc_\theta y_{B_3} + 4bc_\theta a s_3 + y_{B_3}^2 + 2y_{B_3}as_3 + a^2 - 4bs_\theta x_{B_3} - L_1^2 \quad (40)$$

$$F_4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2bs_\theta x - 2x_{B_4}x - 2ac_4x - 2bc_\theta x - 2bs_\theta y - 2y_{B_4}y - 2as_4y - 2bc_\theta y + 2y_{B_4}as_4 + 2bc_\theta y_{B_4} + 2bs_\theta a s_4 - 2bs_\theta x_{B_4} - 2bs_\theta a c_4 + 2x_{B_4}ac_4 + 2b^2 + 2bc_\theta a s_4 + 2bs_\theta y_{B_4} + 2bc_\theta a c_4 - L_1^2 + x_{B_4}^2 + y_{B_4}^2 + 2bc_\theta x_{B_4} + a^2 \quad (41)$$

سپس با اعمال تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه θ و استفاده از روابط (۲۰) تا (۲۵)، عبارت تک‌متغیره سینماتیک مستقیم بر حسب t حاصل می‌شود. مثال‌های تصادفی زیادی بر اساس تغییر در مقادیر پارامترهای طراحی، مقادیر ورودی و مختصات نقاط B_i انجام گردید و جواب‌های حاصل در معادلات سینماتیک معکوس ربات قرار داده شدند. نهایتاً این نتیجه حاصل شد که یک عبارت تک‌متغیره بر حسب t از درجه ۸ همواره بیانگر سینماتیک مستقیم ربات موازی 4-RUU می‌باشد. این نتیجه نشان می‌دهد که سینماتیک مستقیم ربات موازی فوق حداکثر دارای ۸ جواب (حقیقی و موهومی) می‌باشد.

۴- شبیه‌سازی و مقایسه نتایج

مثال‌های تصادفی متعددی برای سه ربات موازی فوق انجام شده و پس از به‌دست آوردن عبارت سینماتیک مستقیم تک‌متغیره نهایی برای هر ربات و حل آن، با قراردادن مقادیر به‌دست آمده در معادلات قبلی (حل رو به عقب معادلات)، تمامی جواب‌های حقیقی و موهومی مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی به‌دست آمده است. سپس، برای تایید نهایی، این جواب‌ها در معادلات سینماتیک معکوس ربات‌ها قرار داده شده است. به‌عنوان نمونه، به‌ازای مقادیر داده شده در جدول ۱، عبارت‌های سینماتیک مستقیم سه ربات موازی 4-RRUR₁، 4-RRUR₂ و 4-RUU (روابط ۴۲ تا ۴۴) محاسبه شده است. سپس تمامی جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم هر ربات به‌دست آورده شده و تمامی جواب‌ها (حقیقی و موهومی) در

جدول ۳ مقادیر به دست آمده از معادلات برای دو پیکربندی از ربات موازی فضایی 4-RRUR₁

اولین پیکربندی	دومین پیکربندی	
۱/۳۰۶۵	۰/۴۶۱۴	x
۴/۷۸۵۹	۱/۷۲۲۱	y
۲/۳۹۲۹	۴/۴۷۸۲	z
۲۰/۳۰	۱۲۹/۷۰	θ
(۳/۱۹۵, ۵/۵۳۴, ۲/۳۹۳)	(۰/۱۱۲, -۰/۱۹۴, ۴/۴۷۸)	D_1
(۵/۳۹۰, ۵/۰۰۰, ۲/۳۹۳)	(-۱/۲۲۴, ۵/۰۰۰, ۴/۴۷۸)	D_2
(۴/۰۰۰, -۰/۳۹۰, ۲/۳۹۳)	(۴/۰۰۰, ۶/۲۲۴, ۴/۴۷۸)	D_3
(-۱/۳۹۰, ۱/۰۰۰, ۲/۳۹۳)	(۵/۲۲۴, ۱/۰۰۰, ۴/۴۷۸)	D_4
(۱/۳۰۶, ۴/۸۷۶, ۲/۳۹۳)	(۰/۴۶۱, ۱/۷۲۲, ۴/۴۷۸)	E_1
(۳/۸۷۶, ۳/۶۹۳, ۲/۳۹۳)	(۰/۷۲۲, ۴/۵۳۸, ۴/۴۷۸)	E_2
(۲/۶۹۳, ۱/۱۲۴, ۲/۳۹۳)	(۳/۵۳۸, ۴/۲۷۸, ۴/۴۷۸)	E_3
(۰/۱۲۴, ۲/۳۰۶, ۲/۳۹۳)	(۳/۲۷۸, ۱/۴۶۱, ۴/۴۷۸)	E_4

جدول ۴ مقادیر به دست آمده از معادلات برای دو پیکربندی از ربات موازی فضایی 4-RRUR₂

اولین پیکربندی	دومین پیکربندی	
۱/۲۲۴۷	۰/۳۷۰۰	x
۲/۵۲۷۷	۳/۷۳۸۶	y
۴/۸۵۹۴	۴/۹۹۷۴	z
۱۵۶/۷۰	۶۵/۴۰	θ
(۱/۶۹۱, ۳/۶۰۹, ۰)	(۰/۵۱۴۸, ۳/۶۷۲۳, ۰)	D_1
(-۰/۹۰۱, ۵/۶۲۳, ۰)	(۲/۹۵۵۱, ۴/۵۷۸۷, ۰)	D_2
(۲/۳۴۳, ۵/۱۱۹, ۰)	(۴/۱۵۱۱, ۲/۰۰۵۷, ۰)	D_3
(۴/۹۳۴, ۳/۱۰۶, ۰)	(۱/۴۲۱۲, ۱/۲۳۲۰, ۰)	D_4
(۱/۲۲۵, ۲/۵۲۸, ۴/۸۵۹)	(۰/۳۷۰, ۳/۷۳۸, ۴/۹۹۷)	E_1
(۰/۱۸۰, ۵/۱۵۶, ۴/۸۵۹)	(۳/۰۲۱, ۴/۷۲۳, ۴/۹۹۷)	E_2
(۲/۸۰۹, ۶/۲۰۱, ۴/۸۵۹)	(۴/۰۰۶, ۲/۰۷۲, ۴/۹۹۷)	E_3
(۳/۸۵۳, ۳/۵۷۲, ۴/۸۵۹)	(۱/۳۵۵, ۱/۰۸۷, ۴/۹۹۷)	E_4

$$F_k(t) = \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (v_j t^j)^k \right) \right) =$$

$$(t^{20} - 16.64t^{19} + \dots + 1.7 \cdot 10^7 t - 1.68 \cdot 10^6)^2$$

$$(t^{16} + 1.37t^{15} + \dots + 2947.31t - 427.15)^2$$

$$(t^{16} + 5.81t^{15} + \dots + 9272.52t - 4289.71)^2$$

$$(t^{16} + 2.98t^{15} + \dots + 27126.8t - 3841.5)^2$$

$$(t^{16} + 22.8t^{15} + \dots - 8.0 \cdot 10^5 t + 1.0 \cdot 10^5)^2$$

$$(t^6 + 6.92t^5 + \dots + 382.99t - 114.19)^2$$

$$(t^6 + 14.92t^5 + \dots - 14.45t - 14.11)^2$$

$$(t^6 + 9.66t^5 + \dots - 14.08t - 8.36)^2$$

$$(t^5 - 8.74t^4 + \dots + 45.97t - 13.71)^2$$

$$(t^2 - 1.51t - 1)^2 (t^2 - 0.37t - 1)^2$$

$$(t^2 + 8.92t - 1)^2 (t^2 + 1.46t - 1)^2 \quad (43)$$

$$F_k(t) = \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (\mu_j t^j)^k \right) \right) =$$

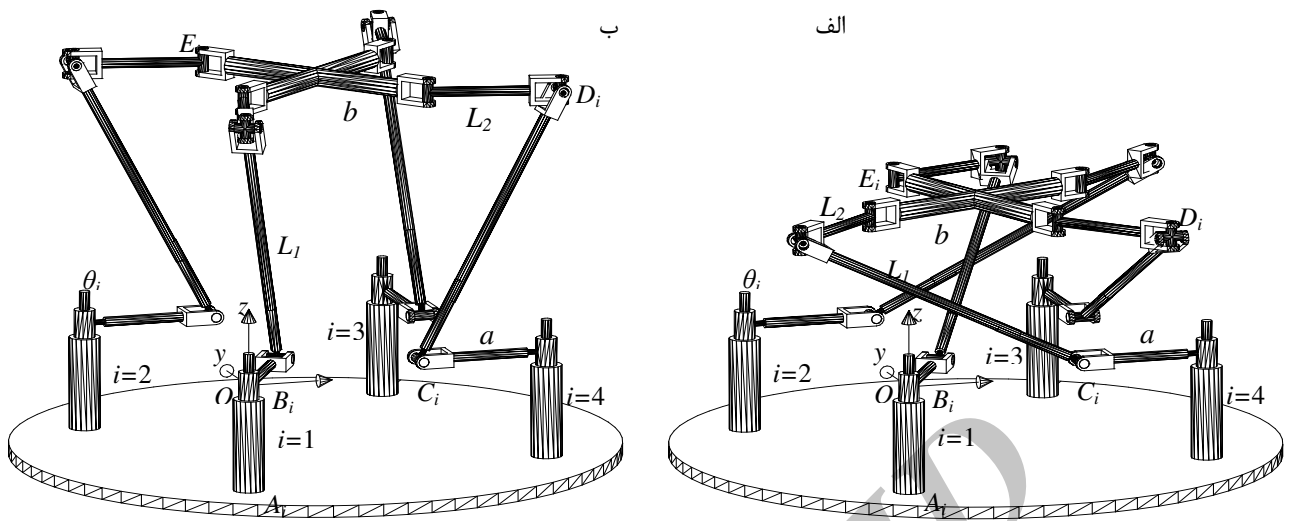
$$(t^2 - 2.309401077t + 0.381197845)^2$$

$$(t^2 - 3.20t + 2.60)^2 (t^2 + 1)^{10} \quad (44)$$

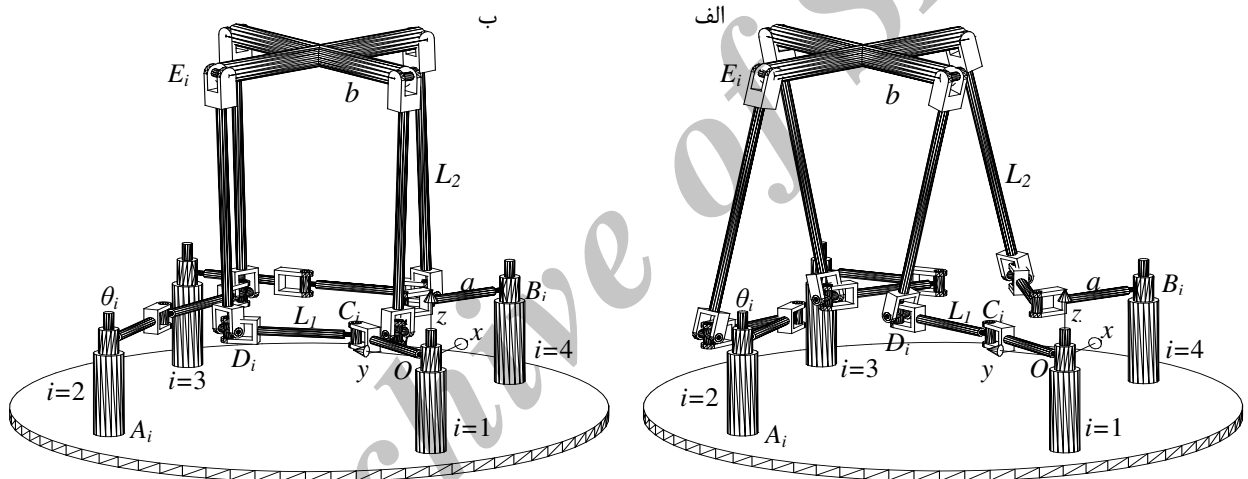
همچنین، در جداول ۲ تا ۴ نیز، مقادیر به دست آمده از معادلات سینماتیک مستقیم برای دو پیکربندی از هر ربات آورده شده و در شکل‌های ۹ تا ۱۱ ترسیم شده است.

جدول ۲ مقادیر به دست آمده از معادلات برای دو پیکربندی از ربات موازی فضایی 4-RUU

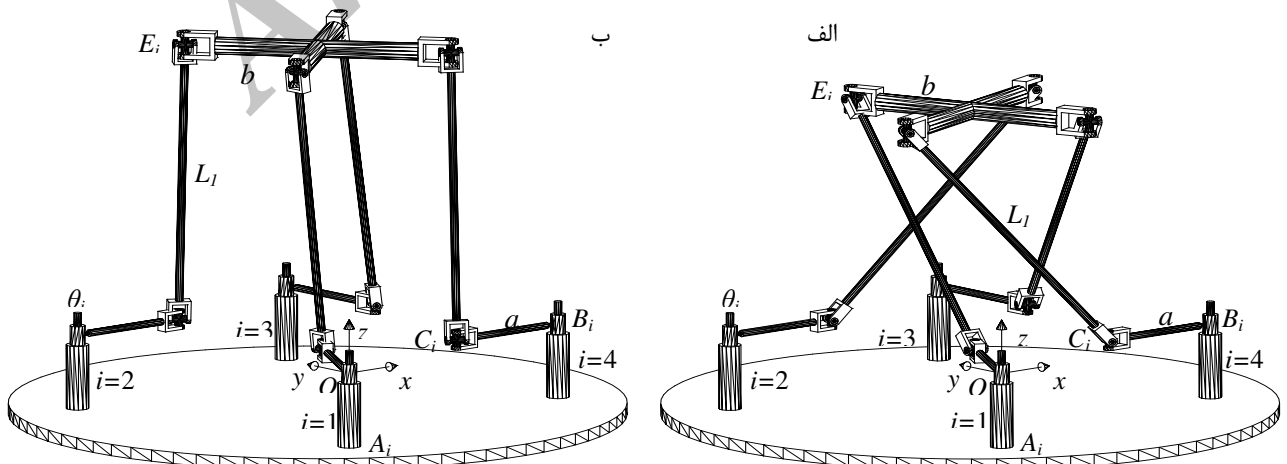
اولین پیکربندی	دومین پیکربندی	
۱/۳۰۶۵	۰/۴۶۱۴	x
۴/۸۷۵۹	۱/۷۲۲۱	y
۳/۸۷۴۸	۴/۹۷۰۹	z
۲۰/۳۰	۱۲۹/۷۰	θ
(۰/۴۶۱, ۱/۷۲۲, ۴/۹۷۱)	(۱/۳۰۶, ۴/۸۷۶, ۳/۸۷۶)	E_1
(۰/۷۲۲, ۴/۵۳۸, ۴/۹۷۱)	(۳/۸۷۶, ۳/۶۹۳, ۳/۸۷۶)	E_2
(۳/۵۳۸, ۴/۲۷۸, ۴/۹۷۱)	(۲/۶۹۳, ۱/۱۲۴, ۳/۸۷۶)	E_3
(۳/۲۷۸, ۱/۴۶۱, ۴/۹۷۱)	(۰/۱۲۴, ۲/۳۰۶, ۳/۸۷۶)	E_4



شکل ۹ الف- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری اولین پیکربندی ربات 4-RRUR₁ ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری دومین پیکربندی ربات 4-RRUR₁



شکل ۱۰ الف- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری اولین پیکربندی ربات 4-RRUR₂ ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری دومین پیکربندی ربات 4-RRUR₂



شکل ۱۱ الف- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری اولین پیکربندی ربات 4-RUU ب- طرح شبیه‌سازی نرم‌افزاری دومین پیکربندی ربات 4-RUU

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، مسئله سینماتیک مستقیم سه ربات موازی ۴ درجه آزادی با زنجیره‌های یکسان و الگوی حرکتی ۳ درجه انتقالی و یک درجه‌ی دورانی موسوم به شونفلیز در فضای اقلیدسی سه‌بعدی بررسی گردیده و عبارت تک‌متغیره‌ای برای بیان سینماتیک مستقیم هر یک از این ربات‌ها با استفاده از روش برآیند به‌دست آورده شده است و با حل سینماتیک معکوس آن مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که عبارت‌های تک‌متغیره‌ای از درجات ۳۴۴، ۲۳۰ و ۸، به ترتیب، بیان‌کننده سینماتیک مستقیم سه ربات موازی 4-RRUR_1 ، 4-RRUR_2 و 4-RUU می‌باشند. بنابراین، مسئله سینماتیک مستقیم سه ربات موازی فوق به ترتیب دارای حداکثر ۳۴۴، ۲۳۰ و ۸ جواب حقیقی می‌باشد. همچنین، نتایج به‌دست آمده از روش برآیند نشان می‌دهد که چند عبارت تک‌متغیره کاملاً مجزا بیانگر مسئله سینماتیک مستقیم ۳ ربات موازی فوق می‌باشند.

۶- مراجع

- [9] Herve J. M., "The Lie Group of Rigid Body Displacements, A Fundamental Tool for Mechanisms Design", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, No. 5, 1999, pp. 719-730.
- [10] Kong X., Gosselin C. M., "Type Synthesis of 4-DOF SP-Equivalent Parallel Manipulators: A Virtual-Chain Approach", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 41, No. 11, 2006, pp. 1306-1319.
- [11] Kong X., Gosselin C. M., *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*, Berlin, Springer 2007, pp. 141-157.
- [12] Angeles J., "The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators", *Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Canada, Quebec, October 3-4, 2002, pp. 160-169.
- [13] Tale-Masouleh M., Gosselin C. M., Husty M. L., Walter D. R., "Forward Kinematic Problem of 5-RPUR Parallel Mechanisms (3T2R) with Identical Limb Structures", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 46, No. 7, 2011, pp. 945-959.
- [14] Husty M. L., "An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 4, 1996, pp. 365-379.
- [15] Gosselin C. M., Merlet J. P., "The Direct Kinematics of Planer Parallel Manipulators: Special Architectures and Number of Solution", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 29, No. 8, 1994, pp. 1083-1097.
- [16] Yee C. S., Lim K. B., "Forward Kinematics Solution of Stewart Platform using Neural Networks", *Neurocomputing*, Vol. 16, 1997, pp. 333-349.
- [17] Bruyninckx H., "Forward Kinematics of Hunt-Primrose Parallel Manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, 1999, pp. 657-664.
- [18] Lee T. Y., Shim J. K., "Forward Kinematic of General 6-6 Stewart Platform using Algebraic Elimination", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 36, 2001, pp. 1073-1085.
- [19] Tale-Masouleh M., Gosselin C. M., Saadatzi M. H., Kong H., Taghirad H. D., "Kinematic Analysis of 5-RPUR (3T2R) Parallel Mechanisms", *Meccanica*, Vol. 46, 2011, pp. 131-146.
- [20] Craig J. J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Pearson Education Inc; Third Ed., 2005, pp. 62-92.
- [21] Cox D. A., Little J. B., O'Shea D., *Using Algebraic Geometry*, Berlin Heidelberg, Springer Verlag 2005, pp. 77-136.
- [1] Siciliano B., Khatib O., *Springer Handbook of Robotics*, Germany, Berlin Heidelberg, Springer, 2008, pp. 269-281.
- [2] Stewart D., "A Platform with 6 Degrees of Freedom", *Proc. Inst. Mech. Eng*, Vol. 180, 1965, pp. 371-386.
- [3] Wang J., Liu X. J., "Analysis of a Novel Cylindrical 3-DoF Parallel Robot", *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 42, 2003, pp. 31-46.
- [4] Jensen K. A., Lusk C. P., Howell L. L., "An XYZ Micromanipulator with Three Translational Degrees of Freedom", *Robotica*, Vol. 24, No. 3, 2006, pp. 305-314.
- [5] Zlatanov D., Gosselin C. M., "A Family of New Parallel Architectures with Four Degrees of Freedom", *Electronic Journal of Computational Kinematics*, Vol. 1, No. 1, 2001, pp. 1-10.
- [6] Joshi S. A., Tsai L. W., "Jacobian Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators", *ASME J Mech. Des.*, No. 124, 2002, pp. 254-258.
- [7] Clavel R., "DELTA, A Fast Robot with Parallel Geometry", *18th International Symposium on Industrial Robots*, Lausanne Switzerland, 1988, pp. 91-100.
- [8] Kong X., Gosselin C. M., "Generation of Parallel Manipulators with Three Translational Degrees of Freedom using Screw Theory", *Proceedings of the CCToMM Symposium on Mechanisms*,